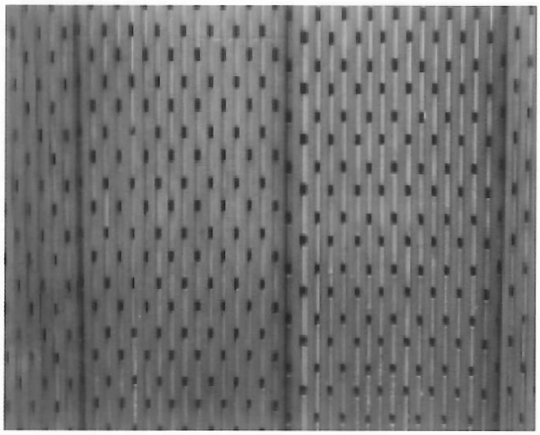


图 7-16　微孔共振消声系统



图 22-1　人体热辐射主要集中在红外波段，
需要通过电子设备转换成人眼可视的图像

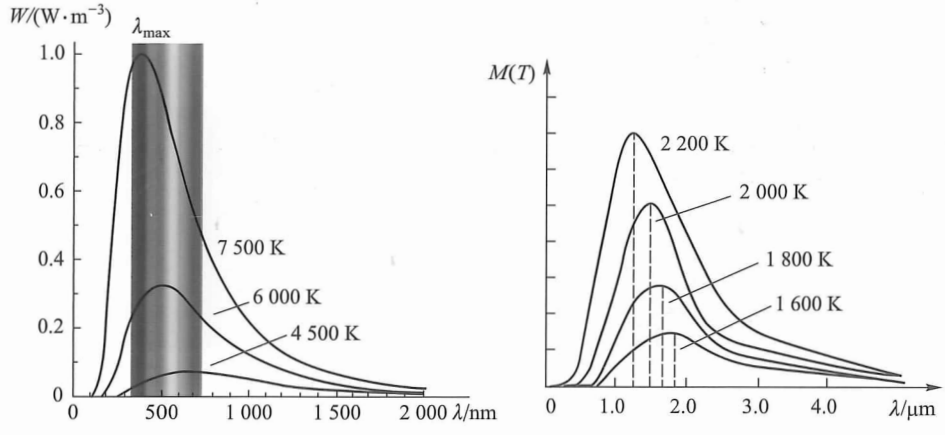
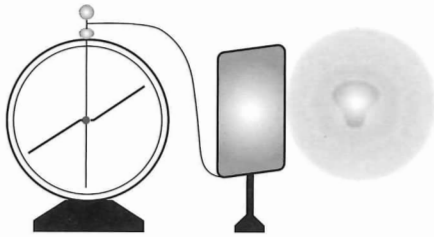
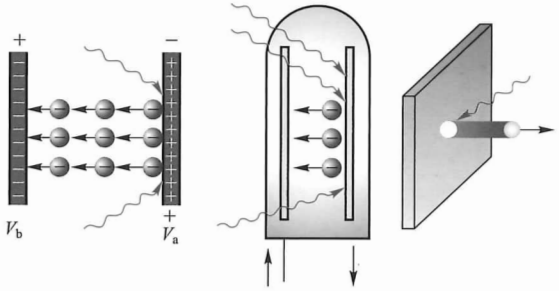


图 22-2　单色辐出度与温度的关系



(a) 锌板在紫外线照射下，显现出带电荷



(b) 在真空隔离的两金属板加上电压，负极受到电磁波照射后，有电子溢出，在正极吸引下形成电流

图 22-9　光电效应机制的示意图和验证电子逃逸的实验示意图

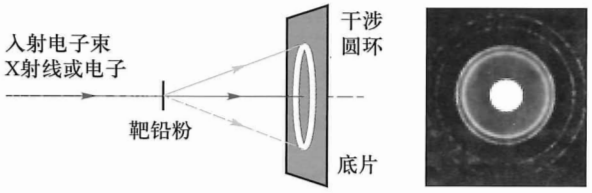


图 24-4　G.P. 汤姆孙的多晶电子衍射实验

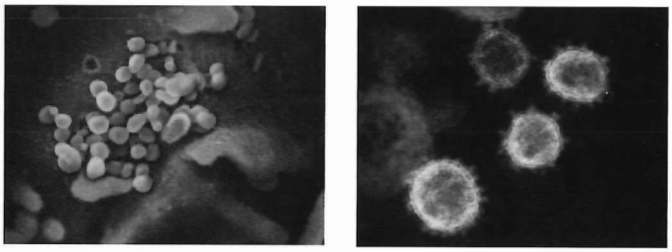


图 24-6　电子显微镜下的冠状病毒

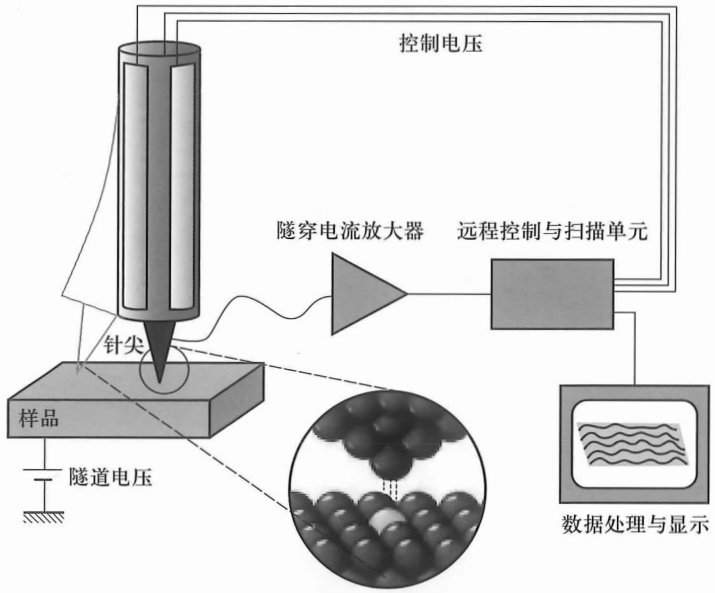


图 24-14　扫描隧道显微镜的示意图

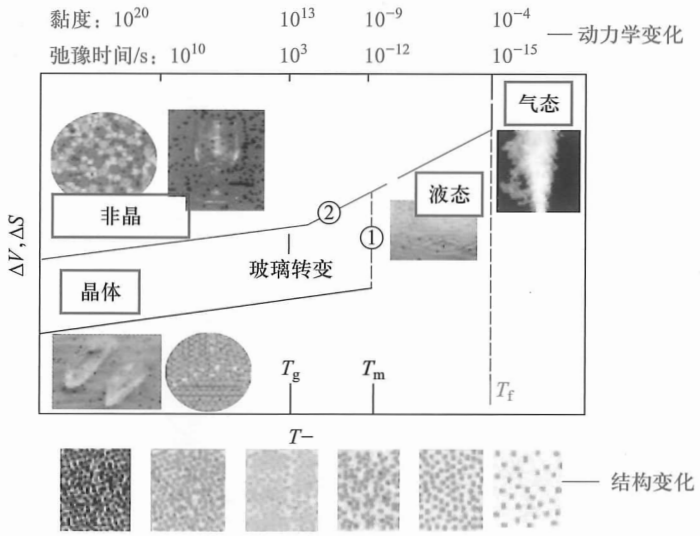


图 25-1　凝聚态物理的研究范畴，上图展示在不同的黏度、弛豫时间、温度、体积变化和熵变条件下凝聚态物质的物态。下图则展示在微观图像中，凝聚态物质的结构随温度的变化

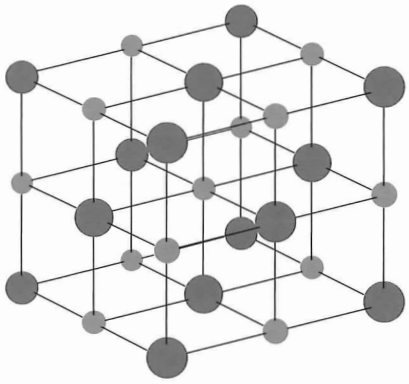


图 25-2　离子晶体氯化钠的晶体结构

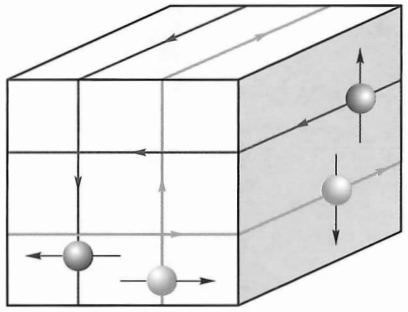
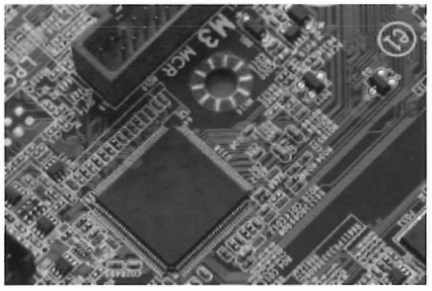
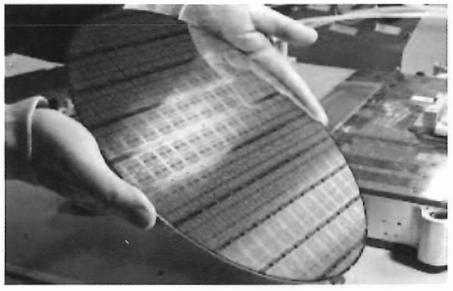


图 25-10　拓扑绝缘体表面电流示意图



(a) 集成电路



(b) 制备的芯片

图 25-14　半导体器件的应用

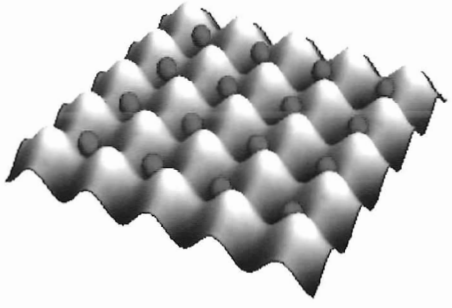


图 25-15　莫特绝缘体示意图，势垒如同蛋托，
将像鸡蛋一样的电子束缚在框中

浙江省普通本科高校
"十四五"重点立项建设教材

工程物理学

（第三版）

名誉主编　诸葛向彬
主编　陆赟豪　金洪英
参编　王琴妹　潘正权　谢小平　张　乾

GONGCHENG WULIXUE

中国教育出版传媒集团
高等教育出版社·北京

内容提要

本书是浙江省普通本科高校“十四五”重点立项建设教材，是在上一版的基础上修订而成的。本书在结构和内容上，相对上一版教材及其他工科类专业大学物理教材均有较大的变化和更新，具有两个突出的特点：现代化和工程化。全书包括力学、振动和波、相对论、气体动理论、热力学、电磁学、光学、量子理论、凝聚态物理、核物理和粒子物理等内容。

本书可作为高等学校工程类专业大学物理课程的教材或参考书，也可供其他理工科类专业的师生使用或参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程物理学 / 陆赟豪，金洪英主编. -- 3 版. 北京 ：高等教育出版社，2024. 10. -- ISBN 978-7-04-062866-1

Ⅰ. TB13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024P9X090 号

GONGCHENG WULIXUE

策划编辑	张琦玮	责任编辑	张琦玮	封面设计	王凌波	版式设计	杜微言
责任绘图	马天驰	责任校对	张　薇	责任印制	刘弘远		

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	唐山市润丰印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787 mm×1092 mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	40.75		
字　　数	960 千字	版　　次	1999 年 10 月第 1 版
插　　页	2		2024 年 10 月第 3 版
购书热线	010－58581118	印　　次	2024 年 10 月第 1 次印刷
咨询电话	400－810－0598	定　　价	79.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有　侵权必究

物 料 号　62866-00

序言

物理学自诞生以来始终在人类理解自然、改造世界的过程中扮演着举足轻重的角色。从古代对天体运动的简单探索，到近现代对微观粒子与宇宙奥秘的深入研究，物理学的每一次进步都标志着人类认知的重大飞跃。今天，物理学不仅是独立的学科，更是现代科学技术的基础，广泛影响着我们生活的方方面面。

物理学的进展，是人类探索自然、追求真理的成果。自古希腊时代起，亚里士多德等哲学家提出了早期的自然哲学思想，虽然这些思想有其局限性，但为后来的科学发展奠定了基础。16至17世纪，科学革命在欧洲兴起，伽利略通过系统的实验研究确立了科学方法，而牛顿的经典力学则彻底改变了人类对自然界的认识。他的三大运动定律和万有引力定律，不仅完美解释了行星运动，还为工程、建筑和机械等领域提供了理论支持。

随着工业革命的展开，物理学的实际应用变得愈发重要。电磁学和热力学等分支学科的建立，推动了蒸汽机、电力和通信技术的发明与发展。到了19世纪末和20世纪初，物理学发生了革命性变化。普朗克的量子论、爱因斯坦的相对论、玻尔的原子模型等突破性的理论，颠覆了经典物理在某些极端条件下的适用性，揭示了微观粒子世界的奇特行为，并拓展了我们对自然法则的理解。

现代物理学的发展不仅体现在理论创新上，也体现在实验技术和应用领域的拓展上。对量子力学、粒子物理、凝聚态物理和天体物理等分支的深入研究，使我们得以窥见宇宙的极端状态，例如黑洞、早期宇宙的演化以及亚原子粒子的相互作用。同时，物理学在信息技术、能源开发、材料科学和医学成像等领域的广泛应用，极大地推动了现代科技的进步，改善了人类的生活质量。

然而，随着物理学的深入发展，新的谜题和挑战也不断涌现。在这个充满未知和挑战的背景下，学习物理学变得尤为重要。物

理学不仅是一门课程，更是一种思维方式。通过学习物理学，我们不仅掌握自然界的基本规律，还可学会如何运用这些规律来解决实际问题。物理学培养了我们的严谨逻辑思维能力和批判性思维，使我们能够从基本原理出发，分析、推理并解决复杂的科学和工程问题。

学习物理的过程，是对自然现象进行系统化理解的过程。它不仅要求我们掌握基本概念、定律和数学工具，还要求我们理解这些理论背后的物理意义，并学会将抽象的理论应用于具体实际问题中。通过实验与观察，我们验证理论的正确性，也发现其局限，从而推动知识的进一步发展。

希望这本书能够帮助读者打下扎实的物理学基础，为未来的科学探索和技术创新铺平道路。无论是为了满足求知的欲望，还是为了解决工程与技术中的实际问题，物理学的学习都是成长路上至关重要的一环。通过物理学的学习，读者既能领略人类智慧的辉煌成果，也能展望未来无限的探索可能。

中国科学院院士　林海青
2024 年 9 月 1 日
于杭州浙江大学物理学院

第三版前言

《工程物理学》第二版出版至今已过去二十余年，原书多数作者已经退休。为使内容更加符合现代工程学科的需求，浙江大学物理学院组织教师对《工程物理学》进行了第三版的修订，在修订工作中不仅保留了前两版的优点，还结合近年来的研究成果和教学经验，对内容进行了更新和扩展，主要涉及的问题有下列几个方面：

首先，我们对教材的内容进行了全面的更新和扩展。第三版增加了许多新章节和新内容，例如对于纳米技术、量子计算等前沿领域的介绍。这些新增内容不仅反映了当前科学研究的热点，也为学生了解和掌握最新的科学技术提供了参考。此外，我们还对原有的章节进行了修订和补充，使内容更加系统和全面。例如，在热力学部分，我们增加了对非平衡态热力学的介绍；在光学部分，增加了激光技术和光通信的内容；在凝聚态物理部分，增加了对拓扑绝缘体的介绍；并把万有引力部分和其他章节进行了融合。

然后，我们对教材的结构和编排进行了优化。为了便于学生学习和掌握，我们对各章节的内容进行了重新组织，使之更加条理清晰。章首设有学习目标和重点内容提示，帮助学生明确学习方向；章尾附有本章摘要、思考题和习题，帮助学生巩固所学知识。此外，我们还增加了大量的插图和实例，通过图文并茂的方式，使抽象的理论更易于理解和接受。对于一些复杂的公式和定理，我们提供了详细的推导过程，并配以典型的例题讲解，帮助学生加深理解。

此外，我们注重理论与实践相结合。在第三版中，我们增加了许多与实际工程应用相关的案例和实验内容。例如，在力学部分，我们介绍了结构力学在桥梁设计中的应用；在电磁学部分，我们介绍了电磁兼容技术在电子设备中的应用。这些内容不仅有

助于学生理解物理学原理在工程中的实际应用，也为他们今后的职业发展提供了借鉴。

最后，我们加强了对教学资源的支持。为了配合教材的使用，我们开发了一系列配套的教学资源，包括电子教案、课件、习题集和实验指导书等。这些资源不仅方便教师备课和授课，也为学生提供了更多的学习材料和练习机会。此外，我们还建立了在线学习平台，提供视频讲解、在线测试和答疑服务，方便学生随时随地进行学习和复习。

总体来说，《工程物理学》(第三版)是在前两版教材的基础上，结合近年来的科研成果和教学经验，进行的一次全面升级。希望本教材能够为学生打下扎实的物理学基础，培养他们分析和解决实际问题的能力。

受浙江大学物理学院委托，陆赟豪教授主持了这次修订工作。潘正权教授负责第一至第六，第十九至第二十一章的修订，谢小平教授负责第七章、第八章、第十至第十八章的修订。金洪英教授重新撰写了第九章和第二十二至第二十四章的内容。陆赟豪教授重新撰写了第二十五章的内容。张乾教授修订了第二十六章的内容。金洪英教授和陆赟豪教授负责整个稿件的阅读和修订。我们怀念已过世的原主编诸葛向彬老师，对他及其他之前参加《工程物理学》编著工作的老师表示感谢。同时，由衷感谢使用本书的各位老师的支持和帮助。限于作者水平，书中仍会有部分错误和不当之处，欢迎读者批评指正。

《工程物理学》(第三版)修订组

2024 年甲辰仲秋

与杭州求是园

第二版前言

《工程物理学》出版至今刚好三年了。在这段时间里，我们曾以不同方式向本书的使用者广泛征求意见，同时结合当前我国高等教育事业迅速发展的形势，以及工程类专业对物理学教学提出的新要求，认为现在出一个新版是合适的。

为了提高教学效果，便于易教易学，我们根据本书使用者的意见和自己的教学经验及体会，对全书作了深入细致的审改，同时阅读了国内外一些最新出版的物理学书籍和科学文献，经过深入细致的比较和分析，最后我们对书中某些部分的叙述作了重大修改，主要是改进了一些物理内容的表述方法，对问题的论述更加深入浅出，同时注意内容的正确性和科学性，并使物理概念更为准确。取消了一些较难的例题，对有些论题和部分内容补充了新的基本例题。归结为一句话，就是要更加方便教师进行课堂教学，更加方便学生课后阅读和正确理解，也更加适应通识教育和社会对人才知识结构的需求。

这次再版，我们对习题作了较大的改进，习题数目比原来增加了25%，大部分新增题目都经过了课堂使用。为了方便教学，我们还编写了习题解答，供使用该教材的师生作为教学参考书。

为了适应目前高等学校工程类专业物理课程教学时数普遍比较少的情况，本书的总字数在原先比同类书籍少的情况下，这次不但没有增加，还适当减少了一些，这对使用本书的教师在教学上是十分有利和方便的。

本书第二版的修改工作仍由原作者负责各自的工作，这样既有利于加深对教材内容的理解和思考，又保持了编写工作的连贯性，从而提高了教材的编写质量。

限于作者水平，书中仍会有不少错误和不当之处，欢迎读者批评指正。

作　者

2002 年壬午仲秋

于杭州求是园

第一版前言

《工程物理学》是浙江省高等教育重点教材建设项目成果，是适合于高等学校工程类专业使用的大学物理教材，是一本面向21世纪的教材。就内容的深度和广度来说，本书也可供有关院校物理学专业的师生使用和参考。

本书是根据浙江省相关重点教材建设项目文件的精神编写的，在成书过程中，曾以讲义的形式在浙江大学相关工程类专业试用，在通过各种方式征求同行专家和学生意见的基础上，进行了认真的修改直至最后定稿。

本书有两个突出的特点：现代化和工程化。

作者认为，物理学是不断发展的，随着物理学的前沿课题在各学科领域不断向纵深推进，教材中应尽量体现最现代化的内容和观点——在内容上，应尽量反映20世纪的新成就；在篇幅上，要压缩经典物理，加强近代物理。为此，本书把对称性、相对性、量子性和非线性作为一条线索，贯穿到全书的叙述中去，用现代物理的这些观点审视整个经典物理的内容，从而达到经典物理更新观念和现代化的目的。

作者还强调，物理学是具有实际应用的基础科学，因此本书作为工程类专业大学生的基础教科书，不仅要反映物理知识在新技术和工程中的应用，而且要加强物理学与各工程学科之间互相交叉、互相渗透的联系，特别要结合工程实际阐述物理学的概念。读者可在书中看到现代科学技术和现代生活中的各类物理知识。

当用现代物理的观点审视传统的牛顿力学时，不难发现牛顿力学中最基本的力的概念在现代物理中已经显得单薄了，牛顿运动定律在微观领域中也不适用了。因此，本书非常突出动量、能量和角动量的概念，从寻找守恒量的观点出发自然地引入这三个

守恒量，并以动量、能量和角动量三个守恒定律为中心来展开整个传统力学的内容；把三大守恒定律提高到时空对称性的高度加以介绍，指出守恒律缘于对称性，并用“普物风格”对深奥莫测的对称性和守恒律的关系进行了简明的论证。

作者把热学改革的重点放在把传统的熵概念拓宽到信息熵，引入自由能概念以加深对熵概念的理解；还用大学物理的语言介绍了耗散结构，使读者能够看到熵在信息论、生命科学及社会科学中广泛应用的前景。

在讲述电磁学时，虽然标题和通常的教材差不多，但是研讨的方法已和传统方法有所不同，从一开始就把注意力集中到电荷守恒、电荷不变性和场的意义上。同时，我们采用循序渐进的方法先介绍经典电磁学，然后用狭义相对论和电荷不变性来阐明运动电荷的电场和磁场，从而在狭义相对论的基础上建立起电磁学的新体系。

在光学中，我们主要抓住相干性、量子性和非线性这条线索作为思路进行编写，努力反映现代光学中的一些主要原理和应用，力求使经典光学和现代光学接轨。

非线性物理已成为现代科学技术中的一个前沿课题，本书用“普物风格”在适当的章节中增加了激波、分岔、混沌等内容的介绍。

在现代物理方面，内容上有了明显的加强，这是大学物理教学内容现代化的需要。从广度上来说，除了介绍相对论和量子力学之外，还简明地论述了原子物理、凝聚态物理、核物理和粒子物理，以及天体物理等前沿科学的内容；在深度上，运用定性、半定量的方法引进了有关现代科学的新概念，尽量地避开繁琐和复杂的数学演绎，突出问题的提出和物理模型的建立，这种处理方法很受学生欢迎。

在思考题和习题的配置上，我们对国内外教材进行了统计和比较，以选取合适的思考题和习题数量。在题型上，除尽量反映新学科内容外，还首次配置了少量用计算机解答的习题，以提高读者用计算机解题的能力。

本书在保证经典物理基本内容完整的前提下，用较大篇幅介

绍了现代物理和现代科学技术，但与目前国内外同类大学物理教科书相比，全书在字数上不但没有增加，反而有较大的压缩，这给国内采用本书的教师在教学上带来方便，即在使用时可根据不同专业的教学要求及学时数，对有关内容作适当选择；若学时数不够，可略去部分内容，一般来说，它不会影响教材前后内容的连贯性。

本书的物理学名词和符号基本上采用和参照全国自然科学名词审定委员会公布的《物理学名词》和国家标准确定的物理量名称和符号，适当考虑长期的教学习惯，保留了少数现行用法。

本书由诸葛向彬主编。具体编写工作分工如下：诸葛向彬编写第 1 章至第 7 章、第 13 章至第 19 章、第 24 章至第 28 章，以及全部附录；浙江工程学院（原浙江丝绸工学院）田中一编写第 9 章至第 12 章；王琴妹编写第 8 章、第 20 章至第 23 章（含思考题和习题）；潘正权编写第 1 章至第 7 章、第 9 章至第 19 章、第 24 章至第 28 章的思考题和习题。全书最后由诸葛向彬进行统稿。另外，宗普和阅读了初稿，并提出许多宝贵意见，在此表示谢意。

本书由浙江大学博士生导师曹培林教授负责审稿，他对原稿进行了认真、仔细的审阅，并结合自己在浙江大学混合班长期讲授 R. Resnick 等编著的 *Physics* 教材的丰富教学经验，对本书的思想性和科学性提出了不少宝贵意见，浙江大学的吴璧如教授也提出了许多有益和宝贵的意见。作者在此一并表示衷心的感谢。

由于时间紧迫和限于作者的教学经验及学术水平，书中一定还存在不少缺点和错误，欢迎同行专家及广大读者批评指正。

作　者

1998 年戊寅仲秋

于杭州求是园

目录

第一章　绪论 …… 1
1-1　物理学的范畴 …… 1
1-2　物理学与工程技术 …… 2
1-3　物理量与测量单位 …… 4
1-4　量纲 …… 8
1-5　科学记数法 …… 10
本章摘要 …… 10
思考题 …… 11
习题 …… 11

第二章　质点运动学 …… 12
2-1　机械运动 …… 12
2-2　速度 …… 13
2-3　加速度 …… 15
2-4　相对运动 …… 18
本章摘要 …… 20
思考题 …… 21
习题 …… 21

第三章　动量　动量守恒定律 …… 24
3-1　牛顿第一定律与惯性系 …… 24
3-2　质量、动量和动量守恒定律 …… 25
3-3　力　质点系的动量守恒条件 …… 29
3-4　冲量　动量定理 …… 33
3-5　牛顿运动定律的实际应用 …… 35
3-6　非惯性系 …… 41
本章摘要 …… 43
思考题 …… 43
习题 …… 44

第四章　能量　能量守恒定律 …… 48
4-1　动能和功 …… 48
4-2　势能 …… 51
4-3　能量守恒定律 …… 56
4-4　一维势能曲线 …… 59
本章摘要 …… 61
思考题 …… 61
习题 …… 62

第五章　角动量　角动量守恒定律 …… 65
5-1　角动量 …… 65
5-2　角动量守恒定律 …… 67
5-3　对称性与守恒定律 …… 71
5-4　天体运动 …… 74
本章摘要 …… 75
思考题 …… 76
习题 …… 77

第六章　刚体力学 …… 79
6-1　刚体的运动 …… 79
6-2　刚体的质心运动 …… 82
6-3　刚体的定轴转动 …… 85
6-4　刚体平面平行运动 …… 97
6-5　回转效应 …… 99
本章摘要 …… 101
思考题 …… 102

习题 …… 103

第七章 机械振动 …… 108
7-1 简谐振动 …… 108
7-2 自由简谐振动 …… 112
7-3 自由简谐振动的能量 …… 117
7-4 阻尼振动 受迫振动 共振 …… 119
7-5 简谐振动的合成 …… 121
7-6 微孔共振消声 …… 128
本章摘要 …… 129
思考题 …… 131
习题 …… 132

第八章 机械波 …… 136
8-1 机械波的产生和传播 …… 136
8-2 平面简谐波的余弦表达式 …… 142
8-3 机械波的能量和能流 …… 145
8-4 波的干涉 …… 148
8-5 驻波 …… 151
8-6 多普勒效应 …… 155
8-7 超声多普勒血流仪和医学超声成像诊断仪 …… 157
本章摘要 …… 158
思考题 …… 160
习题 …… 160

第九章 狭义相对论 …… 164
9-1 光速 …… 164
9-2 麦克斯韦电磁理论 …… 165
9-3 以太 …… 166
9-4 相对论 …… 168
9-5 伽利略变换 …… 168
9-6 绝对时空 …… 169
9-7 洛伦兹变换 …… 171
9-8 光速不变 …… 172
9-9 同时性 …… 175
9-10 时间延缓 …… 178
9-11 长度收缩 …… 180
9-12 四维时空 …… 182
*9-13 时空因果区域 …… 184
9-14 速度变换 …… 186
9-15 相对论力学 …… 187
9-16 光的多普勒效应 …… 193
*9-17 四维动量 …… 195
本章摘要 …… 197
习题 …… 199

第十章 气体动理论 …… 201
10-1 平衡态 状态参量 理想气体 …… 201
10-2 理想气体的压强和温度 …… 204
10-3 能量均分定理 理想气体的内能 …… 208
10-4 麦克斯韦速率分布律 …… 211
10-5 玻耳兹曼分布律 …… 217
10-6 气体分子的碰撞频率和平均自由程 …… 219
10-7 气体的输运现象 …… 220
10-8 范德瓦耳斯方程 …… 223
10-9 电路中的热噪声 …… 225
本章摘要 …… 227
思考题 …… 228
习题 …… 229

第十一章 热力学基础 …… 232
11-1 热力学第一定律 …… 232

11-2 热容 …… 236
11-3 热力学第一定律在理想气体准静态过程中的应用 …… 238
11-4 循环过程 卡诺循环 …… 244
11-5 热力学第二定律 …… 248
11-6 熵 熵增加原理 …… 252
11-7 热力学第二定律的统计意义 …… 258
11-8 热泵 …… 262
本章摘要 …… 264
思考题 …… 265
习题 …… 266

第十二章 静电场 …… 271
12-1 电荷 …… 271
12-2 库仑定律 …… 273
12-3 电场·电场强度 …… 276
12-4 高斯定理 …… 284
12-5 利用高斯定理计算电场 …… 287
12-6 电势 …… 290
12-7 电势梯度 …… 296
12-8 离子推进器 …… 298
本章摘要 …… 300
思考题 …… 300
习题 …… 302

第十三章 静电场中的导体和电介质 …… 306
13-1 导体的静电平衡 …… 306
13-2 外电场中的导体 …… 309
13-3 电容 …… 312
13-4 电介质的极化 …… 316
13-5 面束缚电荷和体束缚电荷 …… 318
13-6 电介质中的静电场 …… 319
13-7 电场的能量 …… 324
13-8 静电复印 …… 327
本章摘要 …… 329
思考题 …… 330
习题 …… 331

第十四章 电流和磁场 …… 335
14-1 电流 …… 335
14-2 电动势 …… 336
14-3 电容器的充电和放电 …… 338
14-4 磁力 …… 339
14-5 磁场 …… 340
14-6 运动电荷的场 …… 341
14-7 毕奥-萨伐尔定律 …… 343
14-8 磁场的高斯定理 安培环路定理 …… 346
14-9 洛伦兹力 …… 351
14-10 安培定律 …… 352
14-11 相对论磁学 …… 354
14-12 均匀磁场对载流线圈的作用 …… 359
14-13 等离子体的磁约束 …… 361
本章摘要 …… 363
思考题 …… 365
习题 …… 366

第十五章 物质中的磁场 …… 371
15-1 磁介质的磁化 …… 371
15-2 磁场强度 …… 372
15-3 顺磁性与抗磁性 …… 375
15-4 铁磁性 …… 377
15-5 磁记录 …… 380

本章摘要 …… 382
思考题 …… 383
习题 …… 384

第十六章 电磁感应 …… 386
16-1 法拉第实验 …… 386
16-2 法拉第电磁感应定律与楞次定律 …… 388
16-3 动生电动势 …… 391
16-4 发电机和电动机的原理 …… 394
16-5 感生电动势 …… 395
16-6 涡电流 …… 399
16-7 自感现象 …… 401
16-8 *LR* 电路 …… 404
16-9 互感 …… 405
16-10 磁场的能量 …… 407
16-11 传感器 …… 409
本章摘要 …… 411
思考题 …… 412
习题 …… 414

第十七章 麦克斯韦方程 电磁波 …… 418
17-1 位移电流 …… 418
17-2 麦克斯韦方程 …… 421
17-3 电磁波 …… 423
17-4 电磁波谱 …… 429
17-5 短距离无线通信技术 …… 430
本章摘要 …… 433
思考题 …… 434
习题 …… 435

第十八章 带电粒子在电场和磁场中的运动 …… 437
18-1 带电粒子在均匀磁场中的运动 …… 437
18-2 运动的带电粒子在电场和磁场中的偏转 …… 439
18-3 电子比荷的测定 …… 441
18-4 带电粒子加速器 …… 443
18-5 霍尔效应 …… 446
18-6 磁控管 …… 448
本章摘要 …… 451
思考题 …… 453
习题 …… 453

第十九章 光的干涉 …… 456
19-1 光的本性 …… 456
19-2 光的相干性 …… 457
19-3 光程和光程差 …… 459
19-4 杨氏双缝实验 …… 461
19-5 劳埃德镜实验 半波损失 …… 463
19-6 薄膜干涉 …… 464
19-7 干涉现象的应用 …… 471
19-8 迈克耳孙干涉仪 …… 474
本章摘要 …… 475
思考题 …… 476
习题 …… 477

第二十章 光的衍射 …… 481
20-1 光的衍射现象 惠更斯-菲涅耳原理 …… 481
20-2 夫琅禾费单缝衍射 …… 482
20-3 夫琅禾费圆孔衍射 光学仪器的分辨本领 …… 486
20-4 衍射光栅 光栅光谱 …… 488
20-5 X 射线衍射 …… 493
20-6 全息照相原理 …… 496

本章摘要 …… 499
思考题 …… 500
习题 …… 500

第二十一章 光的偏振 …… 503
21-1 光的五种偏振态 …… 503
21-2 偏振光的产生和检验 …… 505
21-3 偏振光的干涉及应用 …… 511
21-4 旋光现象 …… 515
本章摘要 …… 515
思考题 …… 516
习题 …… 517

第二十二章 光的量子论 …… 519
22-1 热辐射 …… 519
22-2 基尔霍夫定律 …… 520
22-3 黑体辐射的性质 …… 522
22-4 经典电磁学对黑体辐射的解释 …… 523
22-5 能量量子化 …… 527
22-6 光电效应 …… 529
22-7 康普顿效应 …… 531
习题 …… 534

第二十三章 玻尔的原子模型 …… 536
23-1 卢瑟福模型 …… 536
23-2 氢原子光谱 …… 537
23-3 氢原子玻尔模型 …… 539
23-4 激光 …… 542
本章摘要 …… 543
习题 …… 544

第二十四章 量子力学初步 …… 545
24-1 德布罗意波 …… 545
24-2 不确定关系 …… 549
24-3 波函数 …… 552
24-4 薛定谔方程 …… 555
*24-5 波的叠加与态的叠加 …… 556
24-6 定态 …… 559
24-7 一维无限深势阱 …… 559
24-8 量子隧道效应 …… 562
24-9 氢原子 …… 567
24-10 塞曼效应 …… 572
24-11 电子自旋 …… 574
*24-12 量子纠缠和量子通信 …… 576
本章摘要 …… 579
习题 …… 580

第二十五章 凝聚态物理 …… 582
25-1 凝聚态物理的研究对象 …… 582
25-2 晶体的结合类型 …… 584
25-3 能带理论 …… 586
25-4 金属 …… 588
25-5 绝缘体 …… 591
25-6 半导体 …… 592
25-7 电子关联效应 …… 597
本章摘要 …… 600
思考题 …… 601
习题 …… 602

第二十六章 核物理和粒子物理简介 …… 603
26-1 原子核的组成和特征 …… 603
26-2 原子核的模型 …… 606
26-3 核力 …… 608
26-4 放射性衰变及其应用 …… 609
26-5 核裂变与核动力反应堆 …… 612

26-6 核聚变与受控热核反应 …… 615
26-7 粒子的性质和分类 …… 617
26-8 粒子和反粒子 …… 620
本章摘要 …… 621
思考题 …… 622
习题 …… 622
附录Ⅰ 矢量知识 …… 624
附录Ⅱ 常用物理常量表 …… 628
附录Ⅲ 太阳、地球与月球的数据 …… 629
附录Ⅳ 诺贝尔奖及诺贝尔物理学奖获得者 …… 630
主要参考书目 …… 631

第一章　绪　　论

在人类发展的历史中，物理学的很多重大突破极大地推动了工程技术的迅速发展，进而对社会进步产生了重大的影响。



本章补充资源

1-1　物理学的范畴

NOTE

物理学是研究物质结构和运动基本规律的科学。它研究的是自然界中万物共同遵守的最基本、最普遍的客观规律。物理学是一门高度成熟且生机勃勃的学科，它始终是推动人类文明和工程技术发展的主要学科。

通常人们把19世纪后期形成的牛顿力学、热学、光学和电磁学称为经典物理学，把20世纪初至20世纪30年代发展起来的相对论和量子力学称为近代物理学。经典物理学研究的对象是宏观大小（尺度比原子的尺度10^{-10} m大得多）、运动速度远小于光速（3×10^{8} m/s）的物体的行为。近代物理学是研究延伸到微观和高速运动的物体时发展起来的。无论是经典物理学还是近代物理学，其思想方法是由伽利略（G. Galilei）开创的，到牛顿（I. Newton）得到了发扬光大。虽然随后物理学发生了翻天覆地的变化，但物理学的思想方法始终是没有变化的。这种方法是：力求实验的精确性，通过实验归纳得到普遍规律。这种规律是由数学公式表示的。基于数学公式，人们可以通过数学演绎得到新的结论。这些新的结论必须在新的实验中得到证实。如果与实验结果不相符，必须回头修正公式（规律），使新的公式符合所有的实验结果；然后基于新的公式继续演绎，推导出新的结论，这个过程是永无止境的。随着技术的发展、实验精度的提高、人类研究领域的不断扩展，原有的理论被推翻只是时间的问题。因此物理学的理论都是相对真理，是有边界的。它的边界就是人类的实验范围。伽利略建立起来的这种方法，我们称之为科学。通过科学这种方法建立起来的认识未必是正确的，然而这种方法有自我纠偏的功能，能把人类从错误的轨道上拉回到正确的轨道上。从这个

NOTE

意义上说，物理学是最好的科学示范课程。

物理学的研究范围涵盖了从 10^{-18} m 到整个宇宙尺度的所有现象。因此与其他任何一门科学都有密切的联系。虽然目前物理学并不能直接解决所有尺度的实际问题，但它可以为各个学科的研究提供指导。比如化学是研究原子、分子的学科，根据表 1-1，我们知道在这个尺度上，由电磁相互作用主导，我们基本可以忽略万有引力、强相互作用和弱相互作用。除此以外，基于物理学原理发明出来的各种仪器在各个学科的研究中大放异彩。可以说，没有这些仪器，各个学科的研究几乎成为不可能。21 世纪，信息科学和人工智能突飞猛进，这些技术的突破都来源于我们对微观世界的理解。物理学也把目光投向更深邃的宇宙，探寻宇宙起源。现在的观测表明，宇宙中 95% 的物质对目前的人类来说是不可见的，即我们对它们一无所知。因此物理学远远没有结束，也许它只是刚刚开始。

表 1-1 四种基本相互作用

类型	源	相对强度	作用距离
引力相互作用	质量	$\sim 10^{-38}$	长
电磁相互作用	电荷	$\sim 10^{-2}$	长
强相互作用	色荷	1	短（$\sim 10^{-15}$ m）（由于夸克禁闭）
弱相互作用	所有粒子	$\sim 10^{-15}$	短（$\sim 10^{-15}$ m）

1-2 物理学与工程技术

物理学是从研究宏观物理现象开始的，对宏观物理现象的研究推动了经典物理学的诞生、发展和在生产中的广泛应用。19 世纪后期，物理学研究进入微观和高速运动领域，其研究范围迅速扩大，研究也更为深入。一个世纪以来，物理学建立的基本规律深刻地影响了其他学科的发展，也推动了技术和工程科学的重大进步和创新，对社会和经济发展产生了重大影响。

从历史上看，物理学的发展对世界上三次工业革命起着十分关键的作用。

NOTE

第一次工业革命开始于18世纪60年代,其主要标志是蒸汽机的广泛应用,而这正是牛顿力学和热力学理论应用和发展的直接结果。最初,由瓦特(J.Watt)发明的蒸汽机虽然已被用于火车、轮船,但其热机效率仅为5%~8%。1824年,法国青年工程师卡诺(S.Carnot)为提高热机效率提出了被后人称为卡诺定理的理论,奠定了热力学理论的基础,才为在实用中提高热机效率指明了方向,从而使当今的蒸汽机效率提高到15%,内燃机效率提高到40%,涡轮机效率提高到50%。

第二次工业革命始于19世纪下半叶。它的主要标志是电力的广泛应用和无线电通信技术的发明和使用。这是电磁现象和电磁学理论的重大突破和发展的必然结果。自从1831年法拉第(M.Faraday)发现电磁感应定律后,各种发电机和电动机的研究便应运而生,到19世纪70年代,电力已在许多方面得到了应用。而1862年麦克斯韦(J.C.Maxwell)电磁场理论的建立和1888年赫兹(H.R.Hertz)关于电磁波的实验,又进一步推动了无线电的发明,从而推动了广播、电视、传真等新技术产业的诞生和发展。

第三次工业革命发生于20世纪40年代。由于一些重要实验的发现,以爱因斯坦(A.Einstein)为代表的一批杰出物理学家创立了相对论和量子力学,为近代物理学奠定了基础,这使20世纪成为物理学史上最富有创造性的年代。近代物理学所提出的新概念和发现的实验事实,使世界的面貌从此焕然一新,出现了信息技术、新材料技术、新能源技术、生物工程和空间技术等一系列高新技术,并以它们为基础创造出了一系列新产品和新装置,如半导体、电子计算机、激光器、核电站和通信卫星等。它们不仅改变了人们的生产和生活方式,而且还完善了人类探索大自然及社会现象的手段。

到了21世纪20年代,也许我们将迎来第四次技术革命——信息技术大爆发。一方面量子计算机研究方兴未艾,不断接近实用。量子计算机是基于量子力学原理研制的新型计算机,在计算能力、模拟自然发生过程上比经典计算机有质的飞跃。另一方面,基于纳米尺度技术的进展,人工智能发展迅速,在一些特殊的领域将取代人类。人类生活会得到翻天覆地的变化。

下面,我们就以一些活跃的学科为例,作一些简单介绍。

凝聚态物理是物理学中内容最丰富、应用最广泛的一门学科。世界上第一台通用电子计算机于1946年研制成功。由于固体能带理论以及半导体锗和硅的基础性研究,从1948年贝尔实验室的巴丁(J.Bardeen)、布拉坦(W.H.Brattain)和肖克莱(W.B.Shockley)发明晶体管,到1958年制造出集成电路,1968年制

NOTE

成大规模集成电路，1978 年制成超大规模集成电路，短短 30 余年，电子计算机就四次更新换代！其中，半导体物理、微电子学和磁学是功不可没的。

1917 年，爱因斯坦在他的辐射理论中预见了受激辐射的存在，于是人们才有可能在 1960 年发明了第一台激光器，而且很快地使其在军事、工农业生产、医疗卫生等方面得到广泛应用。激光可以被用来测量距离，而且测量精度很高。例如，用激光测量月球和地球之间的距离时，精度可达到±2 cm；在现代战争中，使用精度为±5 cm 的激光测距仪，在弹道计算机的辅助下，可使火炮命中率高达 97%；在工业上，激光可用于打孔、焊接；在医学上，则可用“激光刀”进行外科手术；激光技术与核技术结合起来，还可实现激光核聚变。

高能物理和核物理的研究不仅向人们揭示了微观世界的基本规律，而且其研究成果迅速地被转化为生产力。如原子核裂变和链式反应的发现，使人们能够建造核电站，制造核武器和核动力舰船；加速器技术在同位素生产、放射治疗、食品保鲜和辐射育种等方面得到广泛的应用。

在物理学研究进入微观世界之后，对生物学的研究也起到了促进作用。由于 X 射线衍射、中子衍射、核磁共振、电子显微镜等的应用，生物学的研究进入分子层次。例如，人们可测量到很大的蛋白质的分子结构、观察到 DNA 的复制过程等。

物理学的研究成果和实验技术在医学中也有日益广泛的应用，如可用于 X 射线层析照相、核磁共振层析照相、超声成像技术等，使医学中的诊断技术发生了天翻地覆的变化。

综上所述，一方面，物理学的研究成果在工程技术中源源不断地得到应用；另一方面，社会发展和技术进步也向物理学提供了大量研究课题，促使物理学不断地向前发展和建立新的理论。毫无疑问，物理学和工程技术将继续十分紧密地联系在一起，作为一种理论基础和思想方法，物理学与工程技术的结合将结出丰硕的果实，造福于人类。

1-3 物理量与测量单位

物理学是一门高度定量化的科学，它的大部分内容都要涉及物理量的测量，如长度、时间、频率、速度、体积、质量、密度、电荷量、温度、能量等。这些物理量并不是相互独立的，其中有不少是

NOTE

相互联系的。例如速度等于长度除以时间，密度等于质量除以体积。我们可以从所有可能的物理量中挑选出少数几个称为基本量的物理量，所有其他的量均可由它们导出，因而被视为导出量。基本量是不能用其他物理量定义的，而导出量可用基本量表示。基本量的数目，应该是完整描述物理学中所有各量的最小数目。大多数物理量都与长度、质量和时间有关，因此长度、质量和时间为基本量。

负责基本量的选择和标准确定等事务的是位于巴黎附近塞弗尔(Sévres)的国际计量局，它与全世界的标准化实验室保持联系。国际计量大会定期开会，作出决议或建议。1971 年举行的第 14 届国际计量大会选择了列于表 1-2 中的七个量的单位作为物理量的基本单位，这是国际单位制(缩写为 SI，来源于法文 Système International d'Unités)的基础。

表 1-2 国际单位制(SI)基本单位

量	单位	国际符号	中文符号
长度	米	m	米
质量	千克	kg	千克
时间	秒	s	秒
电流	安[培]	A	安
热力学温度	开[尔文]	K	开
物质的量	摩[尔]	mol	摩
发光强度	坎[德拉]	cd	坎

我们将在全书中给出许多国际单位制导出单位，诸如速度、力，等等，它们均可由表 1-2 导出。例如力的国际单位制单位为牛[顿](国际符号为 N)，它用国际单位制中的基本单位定义为

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg \cdot m/s^2}$$

当我们用国际单位制(基本单位或导出单位)表示诸如地球的半径或两个原子核事件的时间间隔时，往往要用到很大或很小的数字。为便于表示，第 14 届国际计量大会也在以前工作的基础上推荐了一些级次词头，现把部分常用词头列于表 1-3。于是，我们可以把地球的平均半径 6.37×10^6 m 写为 6.37 Mm；而把核物理中经常遇到的时间间隔，例如 2.35×10^{-9} s，写为 2.35 ns。十进倍数的词头来源于希腊语；十进分数的词头来源于拉丁语。

NOTE

表 1-3 部分国际单位制(SI)级次词头

十进倍数	中文词头	国际符号(中文)	十进分数	中文词头	国际符号(中文)
10^{1}	十	da(十)	10^{-1}	分	d(分)
10^{2}	百	h(百)	10^{-2}	厘	c(厘)
10^{3}	千	k(千)	10^{-3}	毫	m(毫)
10^{6}	兆	M(兆)	10^{-6}	微	μ(微)
10^{9}	吉伽	G(千兆)	10^{-9}	纳	n(纳)
10^{12}	太拉	T(太)	10^{-12}	皮	p(皮)

除国际单位制外,目前世界上还有几种重要的单位制。一种是高斯制,许多物理学文献是用它来表述的。另一种是英制,在我国已停止使用,而在英、美等国的工业界仍经常采用,其长度单位是英寸、英尺、码、英里等;重量单位是盎司、磅等。还有一种是自然单位制,在基础物理学中常用,它是将自然常量,如光速 c、约化普朗克常量 $\hbar$ 设置为 1。相对来说,国际单位制是使用最广泛的。因此,在本书中将全部采用国际单位制单位,有关高斯制、英制和国际单位制的换算关系可参阅有关书籍。

1. 长度单位:标准米

在国际单位制中,长度的标准单位是米。国际公认的标准米尺是一根铂-铱合金棒,存放于巴黎的国际计量局。各国都有其复制品作为本国的长度标准,每个复制品都称为国际米原器。任何工厂生产的尺子必须直接或间接地用这些米原器校准。

1 m 的标准长度最初定义为从地球赤道到北极的距离的千万分之一,并以铂-铱合金棒的两端刻线为标记,但后来用这种铂-铱合金棒刻线所代表的 1 m 去精确测量赤道到北极的距离时,却并未正好是 1 m 的 1 000 万倍,而多出 880 m——略有误差。

随着时间的推移,存放于巴黎的标准米尺难免被损坏;此外,用显微镜对照细刻线的技术来进行长度之间的比较,其精度已不能满足近代科学技术的需要。于是,科学家多年来一直努力寻求一种既不易损坏又不受外界影响的长度标准。

利用迈克耳孙干涉仪这种十分精密的光学仪器,现已正式法定用氪 86(Kr^{86})原子的一条橙黄色谱线的波长来定义标准米,规定米为这条橙黄色谱线波长的 1 650 763.73 倍。新标准使长度比较的精度比旧标准(铂-铱合金棒)提高了 10 倍。

2. 时间单位:标准秒

NOTE

时间是一个物理概念,因而它的定义就与某些物理定律有关。例如,地球自转的周期在很大精度内是恒定不变的,这个事实就可以用来定义时间的一个基本单位——平均太阳日。现在平均太阳日仍然是天文学家常用的测量标准,1 平均太阳秒规定为 1 平均太阳日的 1/86 400。用地球自转定义的时间称为世界时间。

1960 年,科学家又根据物理定律采用了新的秒定义。人们发现,在石英晶体振荡器中,如果温度等外界条件保持不变,则振动着的石英晶体的振动周期也保持不变,所以可把石英晶体振荡器做成非常精确的时钟。最好的这种石英钟在一年中的最大计时误差为 0.02 s。现在我们在市场上看到的由电池供能的石英手表和电子数字手表里用的就是石英晶体振荡器。

然而,如果我们用精确的石英钟来测量地球的自转,就会发现,地球的自转速度夏季大而冬季小(北半球),而且逐年变慢。现在我们知道,风的季节性运动导致地球自转的季节性变化,作用于地球上的潮汐力引起地球自转变慢。另一方面,如果我们将两个完全相同的石英晶体振荡器的频率作比较,就会发现,它们也会有很小的差别。这种漂移效应,现在已被人们充分了解。我们对物理定律的理解,使我们期望利用原子中电子的振动频率,使时间测量达到更高的精度。目前,最精确的时钟是按照铯(Cs^{133})原子的辐射来计时的,它是利用铯原子周期性振动的特征频率作为时间标准的。1967 年,第 13 届国际计量大会正式采用以铯钟为基础的秒作为国际标准秒。秒的定义是 Cs^{133} 原子特定跃迁中周期性地振动 9 192 631 770 次所用的时间。这一规定使时间测量的精度提高到 $1/10^{12}$。现在最准确的铯原子钟 2 000 万年后误差不超过 1 s。

3. 质量单位:标准千克

质量是描述物体惯性大小的物理量,也是描述物体运动的基本量之一。在国际单位制中,质量的标准单位是千克(kg)。质量的基准是保存在巴黎国际计量局里的一个铂-铱合金圆柱体,称为千克原器,第一届国际计量大会规定,千克原器的质量为 1 千克(kg)。后来用 ^{12}C 的原子质量单位定义千克,最新定义的 1 kg 是当普朗克常量值为 $6.626\ 070\ 15\times10^{-34}\ J\cdot s$ 时的质量单

位。关于质量的具体引入方法将在本书第三章中介绍。

1-4 量纲

NOTE

在许多物理问题中，必须从一两个基本方程出发推导出一个特定的公式。假如我们忘记了如何推导这个特定的公式，或者在某个中间步骤遇到了困难，应该怎么办呢？一般情况下，可以用一种简单而有效的方法来推导或检验所有公式，这个方法就是量纲校核法。它可以给出正确的函数形式，而只差一个无量纲的比例常数。

一个数本身没有确定的意义。要赋予其实在的意义，必须给它配一个单位。在前面我们已经谈到，在物理学中，这个单位可以由表 1-2 中的基本单位构成。任何一个物理量通过物理关系与基本量联系起来的关系式称为量纲，任意一个物理量的量纲可通过将该量的字母置于方括号内来表示。我们常用特殊符号表示基本量的量纲：L 是长度的量纲，M 是质量的量纲，T 是时间的量纲。例如，速度的量纲是长度除以时间，记为 $[v]=\frac{[l]}{[t]}=\mathrm{LT}^{-1}$；加速度的量纲是长度除以时间的二次方，记为 $[a]=\frac{[v]}{[t]}=\mathrm{LT}^{-2}$，对于一个力学量 Q，其量纲可写为 $[Q]=\mathrm{L}^{p}\mathrm{M}^{q}\mathrm{T}^{r}$（$p,q,r$ 为量纲指数，可以为正数可以为负数，也可以为零）的形式。在任何合理的物理方程中，所有各项的量纲必定是相同的，各个量的量纲符号，可以完全像代数量一样处理，可以合并、消除等，就像方程中的因子一样。

下面我们用例子来说明应用量纲的步骤。

例如，一辆汽车由静止出发作匀加速直线运动，经过的距离为 x。我们希望有一个特定的公式，把速度 v 表示为加速度 a 与距离 x 的函数。在这个例子中，基本方程是速度与加速度的定义式。因此，可先写出一个总是成立的普遍关系式

$$v \propto a^{p}x^{q} \tag{1-1}$$

其中 p,q 均为未知的指数。然后，我们来检查此式两边的量纲。速度的量纲是 LT^{-1}，在上式的右边，我们看到 $a^{p}x^{q}$ 的量纲是

$$\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^{2}}\right)^{p}\mathrm{L}^{q}=\mathrm{L}^{(p+q)}\mathrm{T}^{-2p}$$

令上式和速度的量纲相等，就得到

$$\mathrm{LT}^{-1}=\mathrm{L}^{(p+q)}\mathrm{T}^{-2p}$$

由于两边 L 的指数必定相等，就有

$$1=p+q \tag{1-2}$$

再令 T 指数相等，就得到

$$-1=-2p,\quad p=\frac{1}{2}$$

把 p 的值代入(1-2)式得

$$q=\frac{1}{2}$$

然后把求出的 p，q 的值代入(1-1)式，就得到

$$v\propto a^{1/2}x^{1/2}$$

即

$$v\propto\sqrt{ax}$$

特定的公式应为 $v=\sqrt{2ax}$，这里仅差一个因子$\sqrt{2}$。

量纲还可以用来检验任意物理公式的正确性。具体方法是检验其中所有各项的量纲。例如，用量纲来检验公式 $x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$ 时，我们注意到 x 和 x_0 具有长度的量纲 L，故其余两项也必定具有长度的量纲。v_0t 这一项的量纲是

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\mathrm{T}=\mathrm{L}$$

而$\frac{1}{2}at^2$ 这一项的量纲是

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\mathrm{T}^2=\mathrm{L}$$

因此这个公式在量纲上是正确的。

NOTE

例

试问一辆质量为 10^3 kg 的汽车应该以多大速率行驶，才能使空气阻力与其重量大致相等？假定该车的横截面积约为 2 m^2，空气密度约为 1 $\mathrm{kg/m}^3$；再假定空气阻力与车的横截面积 A 有关，又与车排开前方空气的密度 ρ 有关，而且还与车的速度 v 有关，即

$$F_{阻}\propto A^p\rho^q v^r \tag{1-3}$$

解 力的量纲为 MLT^{-2}，因此有

$$\mathrm{MLT}^{-2}=(\mathrm{L}^2)^p(\mathrm{ML}^{-3})^q(\mathrm{LT}^{-1})^r$$

令两边的有关指数相等：

对于 M　　$1=q$

对于 L　　$1=2p-3q+r$

对于 T　　$-2=-r$

解上述方程得到 $q=1$，$r=2$，$p=1$。把这些值代入(1-3)式，得到

$$F_{阻}\propto A\rho v^2$$

事实上，将这个比例式改为等式，只需

将右边乘以一个因子 2。从上式可求出车速 v 为

$$v \propto \sqrt{\frac{F_{阻}}{A\rho}}$$

当空气阻力大到与汽车重量相等时，由题意知 $F_{阻} = 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$，我们有

$$v \propto \sqrt{\frac{10^4}{2\times 1}} = 70.7(\text{m/s}) = 254(\text{km/h})$$

由此可得出结论，要使汽车以大约 254 km/h 的速率前进，所需要的发动机推动力大约相当于它在竖直墙面上向上行驶时所需要的推动力。此外，我们知道空气阻力正比于车速的二次方，所以这辆汽车若以 63 km/h 的速率前进，则所受空气阻力仅约为原来的 1/16。显然，慢慢开车可以节约燃料。

1-5 科学记数法

NOTE

在科学研究和工程技术中，往往要用一些极大的或很小的数字。天文学家所遇到的距离很大、时间很长；而研究分子、原子和原子核的人遇到的却是连电子显微镜都难以分辨的小距离。原子和亚原子事件变化的时间短至纳秒量级。为了便于书写和处理这些数字，标准的方法是：对任何量，不管大小，都写成 1 与 10 之间的数（称为尾数）乘以 10 的适当幂次，这就是科学记数法。例如地球到最近的星云（在仙女座中）的距离是 2×10^{22} m，其尾数为 2，而 10 的幂次或者说 10 的指数就为 22；电子的质量记作 9.11×10^{-31} kg。对于有科学记数功能的计算器，其计算范围可从 10^{-99} 到 10^{99}。显然，使用具有科学记数功能的计算器对学物理的学生来说是很有用的。

科学记数法的一大优点是，在 10 的幂次的相乘或相除时，只要将指数相加或相减就可以了，即我们可以利用以下关系式：

$$10^a \times 10^b = 10^{a+b}, \quad 10^a \div 10^b = 10^{a-b}$$

我们在计算中应适当选取有效数字，不要把各类量值一律用一长串数字来表示，这是没有意义的。

本章摘要

1. 物理学是研究自然界中万物所共同遵守的最基本、最普遍的客观规律的基础学科，也是推动人类文明和工程技术发展的主要学科。

2. 力学中描述物体运动的基本物理量是长度、时间与质量，它们的国际单位制单位分别为米、秒和千克。

3. 任何一个物理量或者物理关系式都可以通过量纲来推导或检验其正确性。

思考题

1-1 什么是 SI？SI 中有哪些基本单位？什么是导出单位？它们与基本单位有何联系？

1-2 什么是量纲？量纲有什么用途？量纲和单位有何区别与联系？

1-3 什么是科学记数法？科学记数法有什么优点？

习题

1-1 试写出下列物理量的量纲表达式：速度、加速度、力、功、动能、势能、力矩、功率、动量、冲量。

1-2 试用量纲校核法导出质点作匀速圆周运动时所需向心力的表达式。

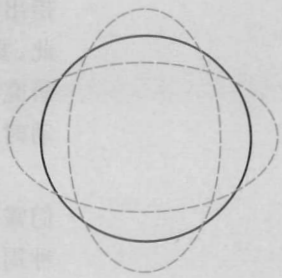
1-3 某同学算得一习题答案为 $F=\frac{1}{3}\rho v^2$（式中 F 和 ρ 分别表示力和密度，v 表示速度），试判断该结果是否正确。

1-4 试确定引力常量 G 在 SI 中的单位。

1-5 一质量为 m 的物体悬挂在弹性系数为 k 的弹簧下面作竖直振动，不考虑空气阻力时，物体在振动过程中所受的合力为 $F=-kx$，x 为物体离开平衡位置的位移。试用量纲分析来确定物体的振动周期 T 与 k，m 的关系式。

1-6 对于在水下深处由爆炸产生的一个气泡，其振动周期 T 由压强 p、水的密度 ρ 及爆炸的能量 E 确定，试写出其振动周期表达式。

1-7 2013 年 6 月 20 日，“神舟十号”女航天员王亚平在“天宫一号”目标飞行器里成功进行了我国首次太空授课。授课中的一个实验展示了失重状态下液滴的表面张力引起的效应。视频中可发现漂浮的液滴处于周期性的“振动”中（平时在地球表面附近，重力的存在会导致液滴下降太快，以致很难观察到液滴的这种“振动”现象）。假设液滴处于完全失重状态，液滴的上述“振动”可视为液滴形状的周期性的微小变化，如图所示。



习题 1-7 图 振动的液滴

（1）该液滴处于平衡状态时的形状是怎样的？

（2）用量纲校核法导出液滴振动频率的关系式。

习题答案

第二章　质点运动学



本章补充资源

运动学的主要任务是描述物体的运动，而运动是在空间中、在时间的流逝中发生的，因此运动学是通过将空间和时间作为参量来描述物体的运动的，不涉及运动产生和改变的原因。

2-1　机械运动

NOTE

机械运动是形式最简单的物质运动。它是指物体与物体之间或物体内部各部分之间相对位置随时间而变化的过程。力学研究的就是物体的机械运动规律。在日常生活中，我们经常可以看到物体的机械运动。由此可见力学概念的直观性，这就是为什么在所有自然科学中力学最先获得广泛发展。

在力学中，运动就是物体相对位置的变化，因此如果没有能指出物体位置变化的任何参照物，该物体的运动就无从谈起。因此，要描述某一物体的运动，必须选择另一个物体作参照物，然后研究这个物体相对于参照物是如何运动的。这个在描述物体运动时选作参考的物体称为参考系。

机械运动是物体在空间中发生的变化，要度量这种变化，我们需要一种仪器——钟。钟的形态各种各样，本质上它作的是一种周期性运动。周期性运动包括地球绕太阳转动、地球的自转、单摆的运动等。我们把这种周期长度定义为一个时间单位（年、天、秒等），从而建立起了另外一种维度——时间。时间的度量是用一种运动度量另外一种运动，这也是显而易见的。没有运动，就没有变化，就没有时间的概念。

同一物体相对于不同的参考系，其运动会有不同的形式。例如，在一列匀速前进的火车中，车厢顶上落下一个物体，站在车厢里的人看到物体沿直线自由落下，而地面上的人却看到物体作平抛运动。其原因是他们所选的参考系不同：车厢上的人以车厢为参考系，地面上的人以地面为参考系。这一事实，称为描述运动的相对性。从对运动的描述来说，参考系可以任意选择，主要由

问题的性质和研究的方便来决定。

为了定量地确定一个物体相对于某参考系的位置，还需要在参考系上选择一个适当的坐标系，而物体的位置就由它在坐标系中的坐标决定。最常用的坐标系是直角坐标系。根据需要，也可以选用极坐标系、自然坐标系、球面坐标系等。

在物理学中，没有一个问题能绝对精确地求解，通常得到的都是近似解，其近似程度取决于问题的性质和所要求的精确度。在近似求解问题时，为了突出研究对象的主要性质，我们往往忽略一些次要的因素。例如，当研究地球绕太阳的运动时，地球的大小完全可以忽略不计，这样，对地球运动的描述就可以大大地简化。因为在这种情况下，地球空间的位置由一个点来确定。因此，在研究机械运动时，我们可以根据所给定的问题的条件来选择近似的程度。如当物体的形状和大小影响不大而可以忽略不计时，我们就可以把该物体视为一个具有质量的点——质点。当然，这是一个理想化的模型。能否把一个具体给定的物体当作质点，不取决于物体的大小，而取决于问题的条件。同一物体在某些情况下可当作质点，但在另外的情况下必须考虑其形状和大小。

处理一个质点比处理一个有大小的物体简单得多，所以我们将首先研究质点力学，并且先从运动学开始，再深入研究动力学。

NOTE

2-2 速度

质点在运动过程中所经过的路径称为轨道（或轨迹）。根据轨道的形状，可将质点的运动分为直线运动、圆周运动和曲线运动等。设曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 是质点运动轨道的一部分（图 2-1），在时刻 t，质点在 A 点；在时刻 $t+\Delta t$，质点到达 B 点；质点在 A，B 两点的位置分别用矢量 $\boldsymbol{r}_A$ 和 $\boldsymbol{r}_B$，称为位置矢量，或称为径矢。在时间 Δt 内，质点沿曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 实际走过的长度 Δs 称为路程，是一个标量；而质点位置的变化可用 A 到 B 的矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 来表示，称为位移矢量，位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和位置矢量（径矢）$\boldsymbol{r}_A$，$\boldsymbol{r}_B$ 之间的关系为

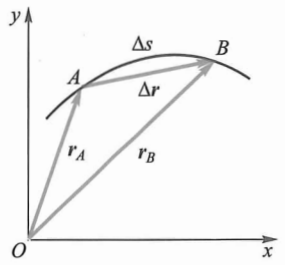


图 2-1 曲线运动中的位移

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A \tag{2-1}$$

在物理学中，速度是一个矢量，它不但描述质点在每一时刻沿轨道移动的快慢，而且描述其每一时刻在轨道上运动的方向。我们注意到在直线运动中，位移和运动轨道完全重合；在曲线运动中，只有在 Δt 很短的情况下，质点的位移和运动轨道才可以近

似地视为重合；在 $\Delta t \to 0$ 的极限情况下，位移和相应的无限小的轨道弧元重合。因此，在研究运动速度时，可以把曲线运动视为由无穷多个无限短的直线运动组成，于是，我们可把轨道分成很多个长度为 ds 的无限小线段，每一小线段对应一个无限小的位移 $d\boldsymbol{r}$，用相应的时间 dt 除这个位移，于是得到轨道上给定点的速度，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{2-2}$$

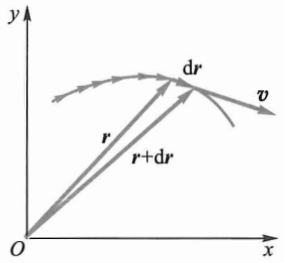


图 2-2 速度矢量

速度是一个矢量，是质点的位置矢量对时间的导数。位移 $d\boldsymbol{r}$ 同无限小的轨道弧元 ds 相重合，因此，矢量 $\boldsymbol{v}$ 的方向沿轨道的切线方向（图 2-2）。

下面来求（2-2）式中速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小：

$$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} \tag{2-3}$$

上式中不允许用 Δr 代替 $|\Delta \boldsymbol{r}|$，因为矢量 $\Delta \boldsymbol{r}$ 实质上是两个矢量之差（$t+\Delta t$ 时刻的 $\boldsymbol{r}$ 减去 t 时刻的 $\boldsymbol{r}$）。符号 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 表示矢量 $\boldsymbol{r}$ 的增量的大小，而 Δr 是矢量 $\boldsymbol{r}$ 的大小的增量，即 $\Delta|\boldsymbol{r}|$。这两个量一般说来并不相等，即

NOTE

$$|\Delta \boldsymbol{r}|\neq \Delta|\boldsymbol{r}|=\Delta r$$

轨道弧元 Δs 在 $\Delta t\to 0$ 的极限情况下和 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 相等，所以在（2-3）式中能用 Δs 代替 $|\Delta \boldsymbol{r}|$，结果得到 $\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt} \tag{2-4}$$

于是，质点速度的大小等于路程对时间的导数。

速度的大小称为速率。显然，日常生活中所谓的速度实际上是速度的大小，即速率。

速度矢量在直角坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{2-5}$$

式中 v_x, v_y, v_z 为 v 的三个分量：

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt} \tag{2-6}$$

而式中 x, y, z 是径矢 $\boldsymbol{r}$ 在直角坐标系中的三个分量。

速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小可表示为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{2-7}$$

2-3 加速度

质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小和方向都可能随时间 t 变化。为了反映速度变化的快慢，我们引进加速度的概念。如图 2-3 所示，在时刻 t 质点位于 A 点，速度为 $\boldsymbol{v}_A$；在时刻 $t+\Delta t$，质点位于 B 点，速度为 $\boldsymbol{v}_B$；在 Δt 时间间隔内，速度的增量为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$。这时，质点在 t 时刻的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{2-8}$$

这就是说，加速度 $\boldsymbol{a}$ 等于速度 $\boldsymbol{v}$ 对时间的导数。它既反映速度大小的变化，又反映速度方向的变化。

质点沿曲线运动时，速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿着轨道的切线方向，但加速度 $\boldsymbol{a}$ 并不沿着切线方向，而是与 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 的方向一致。如果质点沿着平面曲线运动，那么我们可以把加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 分解为沿着轨道的切向和法向两个分量。设 $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ 为 t 时刻质点沿轨道上 A 点的切线的单位矢量，$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 为沿轨道法向的单位矢量；又设在一个极短的时间间隔 Δt 内，质点沿曲线运动到 B 点，如图 2-4(a)所示。显然，随着质点的运动，单位矢量 $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ 和 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 的方向是在不断地变化的。可以证明，切向单位矢量 $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ 的导数和法向单位矢量 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 之间有如下关系式：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{n} \tag{2-9}$$

由于速度 $\boldsymbol{v}$ 沿着轨道的切线方向，与 $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ 的方向相同，故可将速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 写成表达式

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_\mathrm{t} \tag{2-10}$$

式中 v 是速度的大小。

将 $\boldsymbol{v}$ 的表达式(2-10)式代入(2-8)式，得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(v\boldsymbol{e}_\mathrm{t})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t} \tag{2-11}$$

因而加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 就能表示为两个分量的矢量和形式，其中第一项与 $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ 同方向，即沿着轨道的切线方向，所以用 $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ 表示，并称为切向加速度，记为

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t} \tag{2-12}$$

(2-11)式中的第二项 $v\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}$，方向沿轨道的法向，并指向曲线凹

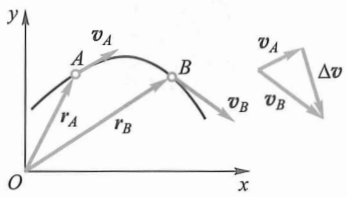


图 2-3 速度增量

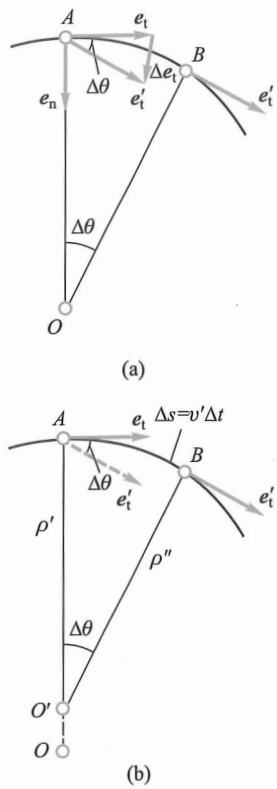


图 2-4 自然坐标系中的加速度

(2-9)式证明

侧，所以用 a_n 表示，并称为法向加速度，记为

$$\boldsymbol{a}_n = v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t} \tag{2-13}$$



(2-14)式证明

在轨道是平面曲线的简单情况下，可以证明法向加速度分量为

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \tag{2-14}$$

式中 ρ 是曲线上给定点的曲率半径。

NOTE

下面我们来研究这两个分量的性质。

在轨道是平面曲线运动的情况下，切向加速度(2-12)式的大小为

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{2-15}$$

a_t 反映了速度大小的变化。若 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}>0$，即速度在数值上增大，则矢量 $\boldsymbol{a}_t$ 与 $\boldsymbol{e}_t$ 同方向，即与 $\boldsymbol{v}$ 同方向；若 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}<0$，即速度在数值上随时间减小，则矢量 $\boldsymbol{a}_t$ 的方向与 $\boldsymbol{v}$ 的方向相反；在 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$ 的匀速运动情况下，没有切向加速度。

法向加速度(2-14)式的大小为

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{2-16}$$

a_n 反映了速度方向的变化。

这样，质点沿平面作曲线运动时的加速度可表示为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \tag{2-17}$$

加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \tag{2-18}$$

上述将加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 分解为切向分量 $\boldsymbol{a}_t$ 和法向分量 $\boldsymbol{a}_n$ 的方法是比较方便的。我们通常将矢量的这种表示法称为自然坐标系表示法。由于这种分解方法和所选用的坐标无关，故上述方程又称为内禀方程。

质点在作直线运动的情况下，法向加速度 $\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t$；若质点作匀速圆周运动，速度的大小不变，方向不断变化，因而切向加速度 $a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，只有法向加速度，且大小不变，方向恒指向圆心，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n=\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_n$（$R$ 为圆的半径）；若质点作变速圆周运动，如

图 2-5 所示，则有：

切向加速度 $a_t=\dfrac{dv}{dt}$，反映速度大小的变化。

法向加速度 $a_n=\dfrac{v^2}{R}$，反映速度方向的变化。

总加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小为

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}$$

$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为

$$\tan\theta=\frac{a_n}{a_t}$$

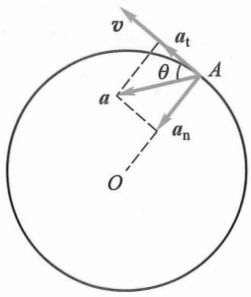


图 2-5 变速圆周运动中的加速度

有时用 R 和 T 表示质点作匀速圆周运动时向心加速度的大小较为方便，其中 T 为质点绕转周期。此时质点的速率 $v=\dfrac{2\pi R}{T}$，向心加速度为

$$a=\frac{v^2}{R}=\frac{(2\pi R/T)^2}{R}=\frac{4\pi^2}{T^2}R \qquad (2-19)$$

此式常用于计算行星的向心加速度。

例 1

试问：地球赤道上的物体，由地球自转引起的向心加速度为多大？已知地球半径 $R=6.37\times10^6$ m。

解 周期 $T=1\ \text{d}=8.64\times10^4$ s，由(2-19)式，向心加速度为

$$a=\frac{4\pi^2}{T^2}R=\frac{4\pi^2\times6.37\times10^6}{(8.64\times10^4)^2}\ \text{m/s}^2=0.034\ \text{m/s}^2$$

这仅为 $g=9.8\ \text{m/s}^2$ 的 0.35%，如果地球是理想的球体，那么人在赤道上的体重比在两极附近的体重减少 0.35%，这就是人们认为在赤道上比在高纬度处容易打破以前的运动记录的理由之一。

例 2

如图 2-6 所示，曲柄 $|OA|=r$，绕定轴 O 以匀角速度 ω 转动，连杆 AB 用铰链与曲柄端点 A 连接，并可在具有铰链的滑套 N 内滑动，当 $\varphi=0$ 时，A 端位于滑套 N 处。已知 $|AB|=l>2r$，求当 $\varphi=0$ 时，连杆上 B 点的速度、加速度的大小，切向加速度、法向加速度和轨道的曲率半径。

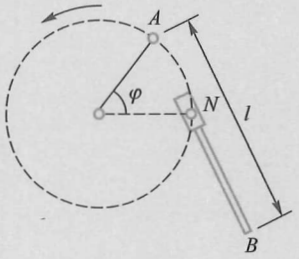


图 2-6

解 建立直角坐标系，取 O 点为坐标原点，x 轴水平向右，y 轴竖直向上，如图 2-7 所示。则 B 点的坐标为

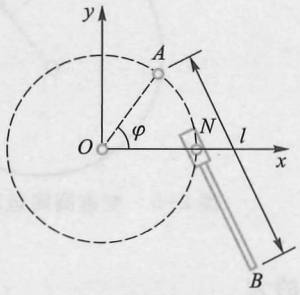


图 2-7

$$x=r\cos\varphi+l\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=r\cos\varphi+l\sin\frac{\varphi}{2} \quad (1)$$

$$y=r\sin\varphi-l\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=r\sin\varphi-l\cos\frac{\varphi}{2} \quad (2)$$

对(1)式和(2)式分别求导得

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-r\sin\varphi\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}l\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$=-r\omega\sin\varphi+\frac{1}{2}l\omega\cos\frac{\varphi}{2} \quad (3)$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=r\omega\cos\varphi+\frac{1}{2}l\omega\sin\frac{\varphi}{2} \quad (4)$$

再对(3)式和(4)式分别求导，得

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-r\omega^2\cos\varphi-\frac{1}{4}l\omega^2\sin\frac{\varphi}{2} \quad (5)$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-r\omega^2\sin\varphi+\frac{1}{4}l\omega^2\cos\frac{\varphi}{2} \quad (6)$$

利用(3)式和(4)式得到 B 点的速率为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\omega\sqrt{r^2+\frac{l^2}{4}-rl\sin\frac{\varphi}{2}} \quad (7)$$

对(7)式求导得 B 点的切向加速度

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2v}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{4v}rl\omega^3\cos\frac{\varphi}{2} \quad (8)$$

根据两个坐标系间的加速度变换得 B 点的法向加速度

$$a_n=\sqrt{a_x^2+a_y^2-a_\tau^2}=\frac{8r^2+l^2}{4\left(4r^2+l^2\right)^{1/2}}\omega^2 \quad (9)$$

由自然坐标系中的法向加速度定义，得 B 点运动轨道的曲率半径为

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{\left(4r^2+l^2\right)^{3/2}}{8r^2+l^2} \quad (10)$$

2-4 相对运动

NOTE

假定在一列正在加速运行的火车上，旅客以恒定速度在车厢里行走，那么旅客相对于车厢的运动是匀速的，而相对于地面的运动则是加速的，这就是我们前面提到的运动描述的相对性。虽然描述物体运动的参考系是可以任意选择的，但参考系选得是否适当，对描述物体运动是否方便有很大关系，所以在实际问题中我们常从一个参考系变换到另一个参考系。因此，我们要研究两个参考系之间的变换关系，即讨论一个参考系中一确定物体的位移、速度和加速度和另一个参考系中同一物体的位移、速度和加速度之间的变换关系。这里，第二个参考系是相对于第一个参考

系运动的。

我们分别以地面和运动的车厢为参考系来观察车厢中旅客的运动。通常取地面为静止参考系，用 S_1 系表示，取车厢为运动参考系，用 S_2 系表示，如图 2-8 所示。S_2 系相对 S_1 系作匀加速直线运动。在时刻 t，S_2 系（车厢）相对 S_1 系（地面）的径矢为 $\boldsymbol{r}_0$；旅客 P 相对 S_1 系（地面）的径矢、速度和加速度分别为 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_1$，则旅客 P 相对 S_2 系（车厢）的径矢 $\boldsymbol{r}_2$、速度 $\boldsymbol{v}_2$ 和加速度 $\boldsymbol{a}_2$ 分别为

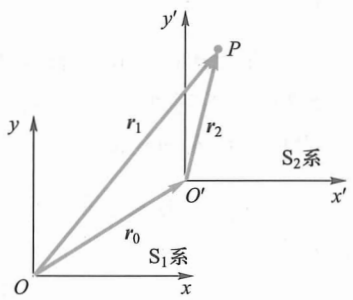


图 2-8 相对运动

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0 \\ \boldsymbol{v}_2=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{a}_2=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_0 \end{cases} \tag{2-20}$$

NOTE

式中 $\boldsymbol{v}_0$，$\boldsymbol{a}_0$ 分别为 S_2 系相对 S_1 系的速度和加速度。如果用旅客（研究对象）、地面和车厢（两个参考系）来表示的话，(2-20) 式中的速度和加速度可改写成

$$\boldsymbol{v}_{\text{人对车}}=\boldsymbol{v}_{\text{人对地}}-\boldsymbol{v}_{\text{车对地}}$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{人对车}}=\boldsymbol{a}_{\text{人对地}}-\boldsymbol{a}_{\text{车对地}}$$

(2-20) 式是经典力学中同一物体在相对作平动的两个参考系中位移、速度和加速度的变换式。需要指出的是，它们建立在经典力学中绝对时空观之上，即假设在两个参考系中具有同一时间变量 t，这个假设只在两个参考系的相对运动速度 v_0 远低于光速 c 的情况下是成立的。在相对论章节，我们会详细讨论这个问题。

例 3

如图 2-9 所示，两船 A 和 B 分别以速度 v_A 和 v_B 在平静的湖水中行驶，它们是否会相碰？

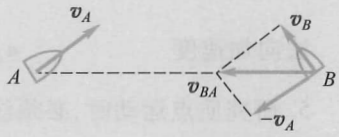


图 2-9 若 v_{BA} 方向指向 A 船，将相碰

解 取 A 为参考系，B 船相对 A 船的速度 $v_{BA}=v_B-v_A$，若 v_{BA} 的方向指向 A 船，则两船将要相碰；若 v_{BA} 方向不指向 A 船，则两船不会相碰。在此题中，若我们用水面作参考系，就不容易看清楚，难以得出正确的结论。

例 4

在无风的下雨天行人走路撑伞，如图 2-10 所示，雨滴以 5.0 m/s 的速度竖直下落，行人以 2.5 m/s 的速度行走，求雨滴相对于行人的速度。

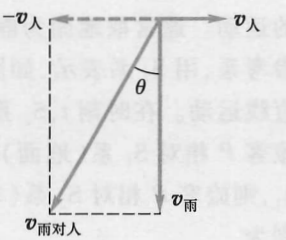


图 2-10 雨天行人走路撑伞

解 以行人为参考系，行人观察到雨滴的速度为

$$\boldsymbol{v}_{雨对人}=\boldsymbol{v}_{雨}-\boldsymbol{v}_{人}$$

由矢量合成得

$$v_{雨对人}=\sqrt{v_{雨}^2+(-v_{人})^2}$$

$$=\sqrt{5^2+(-2.5)^2}\ \text{m/s}=5.59\ \text{m/s}$$

$$\theta=\arctan\frac{v_{人}}{v_{雨}}=\arctan\frac{2.5}{5.0}=26.57°$$

因此，行人观察到的雨滴是与竖直方向成 26.57°斜着落下来的。人跑得越快，行人看到的雨滴下落方向倾斜得越厉害，所以雨天急着行走的人要向前斜着撑雨伞。

本章摘要

NOTE

1. 力学研究的对象是机械运动。运动学只描述物体的运动。

2. 质点是忽略物体形状和大小的一种理想化模型，注意：它不是几何点。

3. 参考系是描述运动时选作参考的物体系，或者说是观察者所在的系统。

4. 研究曲线运动的方法是选取适当的坐标系将运动加以分解，例如，平面运动在自然坐标系中

切向加速度 $$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

法向加速度 $$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{\rho}$$

5. 研究质点运动时，必须注意位移、速度和加速度的相对性、瞬时性和矢量性。

6. 相对运动是分析质点在两个相对作平动的参考系中位移、速度和加速度之间的关系和差异。

$$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_0,\quad \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_0$$

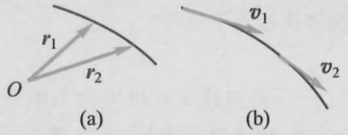
式中，$\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{a}_0$ 分别为 S_2 系相对 S_1 系的速度和加速度。上述变换式仅在非相对论情况下成立。

思考题

2-1 为什么在研究物体运动时要引入参考系、坐标系和质点等概念？

2-2 什么是理想化模型？它们在研究问题时有何实际意义？写出物理学中你所知道的理想化模型。

2-3 在图(a)、(b)中，分别标出 $\Delta\boldsymbol{r}$、Δr 与 $\Delta\boldsymbol{v}$、Δv。



思考题 2-3 图

2-4 速度与速率有何区别？物体能否具有恒定的速率而仍有变化的速度？如果物体具有恒定的速度，是否可能仍有变化的速率？

2-5 物体作曲线运动时，加速度通常可分为法向加速度 a_n 和切向加速度 a_t，它们分别反映速度哪方面的变化？什么样的运动只有 a_t 而没有 a_n？什么样的运动只有 a_n 而没有 a_t？

2-6 在一般曲线运动中，加速度 $\boldsymbol{a}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角为 θ，那么切向加速度 a_t 等于多少？法向加速度 a_n 等于多少？若 θ 角始终保持 0°，是什么运动？θ 角始终保持 90°，是什么运动？

2-7 汽车仪表盘的速度计显示的速度是什么速度？试分析。

2-8 装有竖直挡风玻璃的公共汽车在大雨中以速度 $\boldsymbol{u}$ 前进，而雨滴以速率 v_t 恰好竖直下落。问雨滴以什么角度击打挡风玻璃？

习题

2-1 一架小型运输机至少要达到 360 km/h 的速度才能从跑道上起飞，假定飞机加速度恒定且跑道长为 1.8 km，试问飞机至少要有多大的加速度才能从静止开始起飞？

2-2 一汽车正以 45 km/h 的速度向某交叉路口驶去，当汽车离交叉路口还有 20 m 时，交叉路口的红灯突然闪亮。设驾驶员的反应(从看见红灯到开始刹车)时间为 0.7 s，刹车的加速度为 $-7.0\ \mathrm{m/s^2}$。试通过计算判断该驾驶员会不会闯红灯。(设红灯亮的时间足够长)

2-3 已知一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(2-t^2)\boldsymbol{j}$ (SI 单位)。

(1) 求质点的轨道方程；

(2) 求从 $t=1$ s 到 $t=2$ s 的位移；

(3) 求 $t=1$ s 和 $t=2$ s 时的速度和加速度；

(4) 在 $t>0$ 的时间内，质点的位置矢量和速度在哪些时刻，分别与加速度的方向垂直？

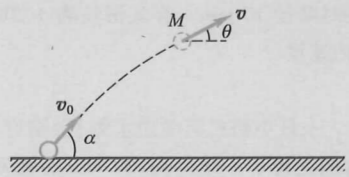
2-4 一质点在 xy 平面内运动，其运动方程分别为 $x=3\cos 4t$，$y=3\sin 4t$(SI 单位)，试求：

(1) 质点任一时刻的速度和加速度的表达式；

(2) 质点的切向加速度和法向加速度的大小。

2-5 一质点沿 x 轴运动，其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为 $a=4+3x^2$(SI 单位)。若质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

2-6 如图所示，手球运动员以初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 沿与水平方向成 α 角的方向抛出一球，当球运动到 M 点处时，它的速度与水平方向成 θ 角，若忽略空气阻力，求：



习题 2-6 图

（1）球在 M 点处速度的大小；

（2）球在 M 点处切向加速度和法向加速度的大小；

（3）抛物线在该点处的曲率半径。

2-7 一滑块以加速度 $a=-\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t$（SI 单位）沿直线运动，设滑块初速度为 $v_0=2\pi$，且以滑块中心与坐标原点重合时为起始位置，求：

（1）滑块任意时刻的速度；

（2）滑块的运动方程。

2-8 一人造地球卫星在地球表面的上方 640 km 的圆形轨道上运动，今测得它绕地球一周的时间为 98 min，求它在轨道上的向心加速度。（取地球半径 $R=6\ 400$ km）

2-9 一汽车沿半径为 50 m 的圆形公路行驶，任意时刻汽车经过的路程 $s=10+10t-0.5t^2$（SI 单位）。求 $t=5$ s 时，汽车的速率以及切向加速度、法向加速度和总加速度的大小。

2-10 一自行车特技演员在半径为 R 的圆形轨道内进行自行车特技表演，其速率与时间的关系为 $v=ct^2$（式中 c 为常量）。求：

（1）他运动的路程与时间的关系；

（2）t 时刻他的切向加速度和法向加速度。

2-11 一质点从静止出发沿半径 $R=3$ m 的圆周运动，切向加速度为 $a_t=3\ \mathrm{m/s^2}$，试问：

（1）经过多少时间它的总加速度与径向成 45°？

（2）在上述时间内，质点所经过的路程为多少？

2-12 一队战士以 1.5 m/s 的速度前进，一个通讯员从队伍末尾骑马到队伍前面，传令后又返回到队伍末尾，耗时共计 10 min。若队伍长为 1 200 m，求通讯员骑马的速度。

2-13 一只小船在河中逆水划行，刚好在经过某座桥时，从船上掉下一个木箱，30 min 后被发觉，立即掉头追赶，终于在该桥的下游 5.0 km 处赶上木箱。假设小船顺流和逆流时相对水流的划行速度不变，试求小船回程追赶所需的时间，并求水流速度。

2-14 某飞机在飞行中遇到方向恒定向北、速度大小为 65 km · $\mathrm{h^{-1}}$ 的风，同时飞机上的罗盘指出飞机的飞行方向向东（相对空气），飞机速率指示器显示速度为 215 km · $\mathrm{h^{-1}}$。

（1）试求飞机相对于地面的速度；

（2）如果要求飞机向东飞行，它应朝向何方飞行？相对于地面的速率大小如何？

2-15 一人骑自行车在风中向东而行。当车速为 10 m · $\mathrm{s^{-1}}$ 时，他觉得有南风；当车速为 15 m/s 时，他觉得有东南风。求风的速度。

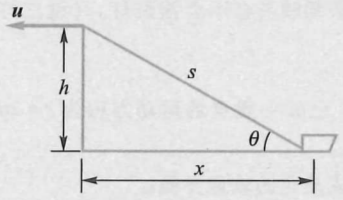
2-16 一升降机以加速度 1.22 $\mathrm{m/s^2}$ 上升，当上升速度为 2.44 m/s 时，有一螺帽自升降机的顶板上落下，升降机顶板与升降机的底面相距 2.74 m，问：

（1）螺帽相对于升降机作什么运动？其加速度为多少？螺帽相对于地面作什么运动？其加速度为多少？

（2）螺帽从升降机顶板落到升降机底面需多长时间？

（3）螺帽相对于升降机外的固定柱子下降多长距离？

2-17 如图所示，在离水面高度为 h 的岸边上，有人用绳子拉船靠岸，收绳的速率恒为 u，求船与岸的水平距离为 x 时，船的速度和加速度的大小。（提示：绳长 $s^2=h^2+x^2$，$u=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$）



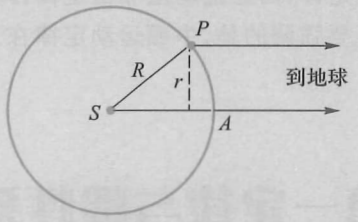
习题 2-17 图

2-18 某一雨滴在下落时受到空气阻力的作用，其运动方程为

$$\frac{dv}{dt}=g-cv$$

式中 g 为重力加速度，c 是与空气黏性有关的常量。请设计一个计算机程序来计算任意时刻雨滴的速度，并画出相应的 $v-t$ 图。要求程序能输入 g，c 等值，讨论 c 取 0，0.1，0.15 和 0.30 等值时的各种情形，并进行分析总结。[提示：方程变换后，$v=\frac{g}{c}(1-e^{-ct})$，并设雨滴离地面足够高]

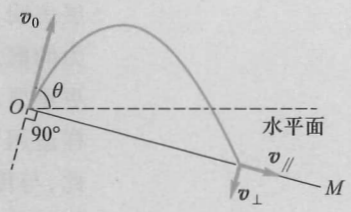
2-19 某恒星 S（视为一个质点）的外围半径 R 处被尘埃组成的球壳所包围，该星发出的光首先被尘埃球壳所吸收，然后再由尘埃发射光。当该恒星突然经历一次新星爆炸发出很强的光脉冲后，在远处地球上的观察者将先看到由题图中 A 处辐射的光，然后才看到由 P 处辐射的光，总的效果是一个以 A 为中心、半径 r 不断扩大的光环。将真空光速记为 c，光环从出现到半径达到最大，需要多长时间？光环扩大的速率 dr/dt 与半径 r 的关系式如何？



习题 2-19 图

2-20 在地面上同一地点分别以 v_1 和 v_2 的初速先后向上抛出两个小球，第二个小球抛出后经过 Δt 时间与第一个小球在空中相遇。改变两球抛出的时间间隔，便可以改变 Δt 的值。若 $v_1>v_2$，则 Δt 的最大值为多少？若 $v_1<v_2$，则 Δt 的最大值为多少？

2-21 如图所示，小球从竖直平面内的 O 点斜向上方抛出，抛射角为 θ，速度大小为 v_0。在此竖直平面内作射线 OM 与小球抛射方向垂直，小球到达射线 OM 时的速度分解为图示中与射线 OM 垂直方向上的分量 $v_\perp$ 和沿射线 OM 方向上的分量 $v_{/\!/}$，则 $v_\perp$ 和 $v_{/\!/}$ 的大小分别为多大？



习题 2-21 图

习题答案

第三章　动量　动量守恒定律



本章补充资源

动力学是探究物体发生变化的原因的物理学分支，它通过研究物体间的相互作用寻找物体运动状态变化的规律。

动力学的内容一般总是以三大牛顿(I.Newton)运动定律为核心来展开的，把质量和力作为动力学中最基本的概念，从而导出动量和能量的概念以及三大守恒定律。但是，现代物理学的发展表明，在描述物质的运动和相互作用时，动量和能量的概念比力的概念要基本得多，守恒定律比牛顿运动定律更基本、更普遍、更重要。例如，动量和动量守恒定律不仅适用于宏观世界，也同样适用于微观世界，而牛顿运动定律在微观世界并不适用。因此，与传统的处理方法不同，我们没有完全按照历史的发展从牛顿运动定律导出动量守恒定律，而是把动量守恒定律作为最基本的定律去介绍的。最后还要强调的是，牛顿运动定律在工程上仍有很重要的实际意义。

3-1　牛顿第一定律与惯性系

NOTE

伽利略通过实验归纳出一个结论，即不受外界作用的物体，其运动状态是不变的。约一百年之后，牛顿成功地总结出动力学最基本的定律之一：

任何物体都保持静止或匀速直线运动的状态，直至其他物体的作用强迫它改变这种状态为止。

这就是牛顿第一定律。物体保持原有运动状态不变的特性，称为惯性。因此，牛顿第一定律也被称作惯性定律。

牛顿第一定律不是在任何参考系都成立的，我们曾指出，运动的特征与参考系的选择有关。我们考察两个彼此以一定加速度相对运动的参考系，若一物体相对于其中一个参考系是静止的，那么显然，它相对于另一参考系作加速运动，因此牛顿第一定律不能同时在这两个参考系中成立。

牛顿第一定律在其中成立的参考系称为惯性系，否则称为非

惯性系[①]。实验表明，任何一个相对某惯性系作匀速直线运动的参考系同样是一个惯性系，因此可以说有无限个惯性系存在。实验还表明，原点位于太阳中心而其轴指向适当选取的恒星的参考系是一个（近似）惯性系，这个参考系称为日心参考系，任何相对日心参考系作匀速直线运动的参考系都是惯性系。

地球相对太阳和其他恒星沿椭圆曲线轨道运动，而曲线运动总是具有一定加速度的；此外，地球还绕自身轴转动，因此，与地球表面相连的参考系相对日心参考系作加速运动，即严格说来，它不是惯性系。但是，这个参考系的加速度是如此之小，以至在很多场合下可把它当作惯性系。以后若不加特别说明，我们就把与地球相连的参考系当作惯性系，并称之为基本参考系。

NOTE

3-2 质量、动量和动量守恒定律

1. 质量

质量（mass）一词是17世纪初开始流行起来的。现在我们用一个理想实验给出质量的定义。设想有两个质点，它们仅在自身之间有相互作用，而与外界物体没有作用，即这是一个封闭系统。假如我们使这两个质点发生相互作用，它们各自的速度随时间而改变，则它们的路径一般是弯曲的，如图3-1中的曲线1和曲线2所示。在 t 时刻，质点1在 A 点，速度为 $\boldsymbol{v}_1$，质点2在 B 点，速度为 $\boldsymbol{v}_2$；在 t' 时刻，两个质点分别位于 A' 和 B' 处，速度分别为 $\boldsymbol{v}_1'$ 和 $\boldsymbol{v}_2'$，则在这段时间内，速度的增量分别为

$$\Delta\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_1'-\boldsymbol{v}_1$$

$$\Delta\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_2'-\boldsymbol{v}_2$$

实验证明，速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}_1$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}_2$ 的方向总是相反的，然而，$\Delta\boldsymbol{v}_1$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}_2$ 的大小之比总是不变的，与这两个给定质点的相互作用方式和强度无关[②]。因此，我们可以得到

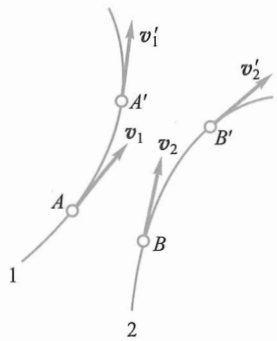


图3-1 两个质点之间的相互作用

① 可以说先有牛顿第一定律，然后才有惯性系这个概念。然而运动是相对的。将其中一个参考系设定为惯性参考系，在力学中具有优先地位，而另外一个是非惯性参考系，被排除在力学定律适用范围外，这种做法显然不能让牛顿满意。为此牛顿提出了绝对空间的概念，为惯性参考系找到了绝对的定义。

② 这个结论仅在质点的速度比光速小得多的情况下成立，否则要考虑相对论效应。

NOTE

$$\Delta \boldsymbol{v}_1 = -K\Delta \boldsymbol{v}_2 \tag{3-1}$$

比例系数 K 仅仅取决于两个质点的某种固有属性，故令

$$K=\frac{m_2}{m_1}$$

则

$$m_2 = -\frac{\Delta \boldsymbol{v}_1}{\Delta \boldsymbol{v}_2} m_1 \tag{3-2}$$

m_1 和 m_2 就分别称为质点 1 和质点 2 的质量。

如果我们选定一个物体作为标准物体，然后让任意质点与标准物体碰撞，并把标准物体的质量 m_0 作为标准质量，则(3-2)式可写成

$$m = -\frac{\Delta \boldsymbol{v}_0}{\Delta \boldsymbol{v}} m_0 \tag{3-3}$$

式中，Δv_0 是标准物体的速度增量，$\Delta \boldsymbol{v}$ 是任意质点 m 的速度增量。由上式就可以确定任意质点的质量。

如果我们取标准质量 $m_0 = 1$ kg，(3-3)式变为

$$\Delta \boldsymbol{v}_0 = -m\Delta v$$

可见，这样定义的质量，其大小反映了质点在相互作用过程中速度改变的难易程度，或者说，反映了质点惯性的大小。因此，我们把这样定义的质量称为惯性质量。

历史上还有一种质量叫引力质量，它是由牛顿的万有引力定律来定义的，反映了物体之间相互吸引的性质。但是大量实验都证明，同一物体的惯性质量和引力质量总是相等的，也就不必加以区分，统称为质量。爱因斯坦还从这两种质量的同一性出发，创立了广义相对论。

2. 动量 动量守恒定律

我们把由上述理想实验得到的结果(3-2)式，改写成下列形式：

$$m_1\Delta \boldsymbol{v}_1 + m_2\Delta \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \tag{3-4}$$

然后把 $\Delta \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_1$，$\Delta \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2$ 代入(3-4)式，经移项后得到

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2' \tag{3-5}$$

结果表明，在两质点相互作用的过程中，每一个质点的质量 m 和它的速度 $\boldsymbol{v}$ 的乘积都是一个守恒量。用符号 $\boldsymbol{p}$ 表示，则有

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{3-6}$$

我们把 $\boldsymbol{p}$ 称为质点的动量，动量是一个矢量，其方向与速度相同，

NOTE

于是(3-5)式可写成

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1'+\boldsymbol{p}_2' \tag{3-7}$$

这里$\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$和$\boldsymbol{p}_1'$、$\boldsymbol{p}_2'$分别为两质点在时刻t、t'的动量。于是我们得出结论:由两个相互作用的质点组成的封闭系统的总动量保持恒定,即

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\text{常量} \tag{3-8}$$

上述结论就是动量守恒定律,它是物理学中最基本的普适原理之一。

当今航天和宇航技术有了高度的发展,载人飞往月球和进行星际探索都已实现。火箭的喷气推进原理是动量守恒定律最重要的应用之一,以下就以火箭为例,探讨动量守恒定律的应用。

火箭体内燃料燃烧生成的高温高压气体不断从火箭尾部喷出形成高速气流,在喷射气体的反方向上给火箭一个反冲力,这个反冲力就成为火箭向前推进的动力。显然,火箭不依靠空气提供推力,因而可以在空气稀薄的高空甚至没有空气的太空中飞行。由于火箭体内燃料不断燃烧,不断喷出气体,因此火箭是一个变质量的物体。为简单起见,我们考虑火箭在外层空间飞行,此时火箭受到的重力和空气阻力都足够小,可以忽略不计。对于由火箭和喷出气体组成的系统,其动量守恒。

设火箭飞行中的某一时刻t,火箭和燃料的总质量为$m_{总}$,它们相对于地面的速度为$\boldsymbol{v}$[如图3-2(a)所示],该时刻的总动量为$m_{总}\boldsymbol{v}$,经过时间$\mathrm{d}t$以后,喷出的气体质量为$\mathrm{d}m$,喷出气体相对于火箭的速度$\boldsymbol{v}_r$称为喷气速度,于是喷出气体相对于地面的速度为$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_r$,而这时火箭和未燃烧的燃料的质量已减少到$m_{总}-\mathrm{d}m$,其速度变为$\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}$,如图3-2(b)所示。因此,在$t+\mathrm{d}t$时刻,火箭的动量为$(m_{总}-\mathrm{d}m)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})$,喷出气体的动量为$\mathrm{d}m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_r)$,系统的总动量为

$$(m_{总}-\mathrm{d}m)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})+\mathrm{d}m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_r)$$

根据动量守恒定律,可以写出

$$(m_{总}-\mathrm{d}m)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})+\mathrm{d}m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_r)=m_{总}\boldsymbol{v}$$

整理并忽略二阶无穷小量$\mathrm{d}m\mathrm{d}\boldsymbol{v}$,得

$$m_{总}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_r\mathrm{d}m=\boldsymbol{0}$$

$$d\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_r\frac{\mathrm{d}m}{m_{总}} \tag{3-9}$$

式中,$m_{总}$为火箭及燃料的质量,$\mathrm{d}m$为喷出气体的质量。由于喷出气体的质量就是火箭质量的变化量,因此火箭质量的变化量$\mathrm{d}m_{总}$应为$-\mathrm{d}m$,于是(3-9)式可写成

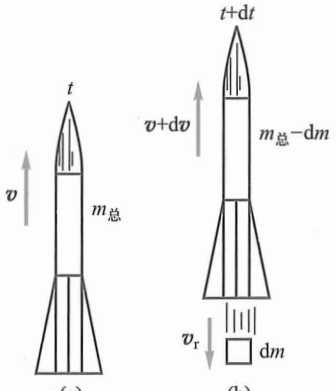


图3-2 火箭的喷气推进原理

NOTE

$$d\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_r\frac{(-dm_{总})}{m_{总}}=-\boldsymbol{v}_r\frac{dm_{总}}{m_{总}} \tag{3-10}$$

上式表示:火箭每喷出质量为 dm 的气体,速度就增加 $d\boldsymbol{v}$。将上式积分后,可得

$$\int_{\boldsymbol{v}_1}^{\boldsymbol{v}_2}d\boldsymbol{v}=\int_{m_1}^{m_2}-\boldsymbol{v}_r\frac{dm_{总}}{m_{总}}$$

即

$$\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_r\ln\frac{m_{总1}}{m_{总2}} \tag{3-11}$$

此式表示火箭质量从 $m_{总1}$ 减至 $m_{总2}$ 时,火箭速度相应从 $\boldsymbol{v}_1$ 增加到 $\boldsymbol{v}_2$。

我们研究一下(3-11)式的含义。火箭速度的增加与喷气速度 v_r 成正比。理论上,通过化学燃烧能达到的最大喷气速度大约为 5 000 m/s。但在实际上,由于燃烧不完全和其他损失,很难超过这个理论值的 50%,即 2 500 m/s;另一方面,火箭速度的增加还和质量比 $m_{总1}/m_{总2}$ 的对数成正比,为了增大质量比,应当使火箭携带尽可能多的燃料。例如,要使火箭具有 7 900 m/s 的速度(第一宇宙速度),在喷气速度为 2 000 m/s 的情况下,所需的质量比约为 50,即 1 t 重的火箭必须具备 49 t 燃料,这在技术上有很大困难。只要计算一下就可看出,通过提高质量比来增加火箭速度,效果并不显著,因此,对燃料携带来说很不合算。在目前的技术条件下,一般火箭喷气速度达到 2 500 m/s,质量比达到 6 左右时,火箭所能达到的速度约为 4 500 m/s。由此可知,要使火箭绕地球运转,用单级火箭是无法达到的,必须采用多级火箭。

如果考虑外场的作用,火箭发射过程中的动量关系就变成了著名的密歇尔斯基方程

$$m_{总}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{v}_r\frac{dm_{总}}{dt}$$

其中 $m_{总}$ 为火箭的质量,$\boldsymbol{F}$ 是外场对火箭的作用力,$\boldsymbol{v}_r$ 是喷出的混合气体相对火箭的速度,而 $\boldsymbol{v}_r\frac{dm_{总}}{dt}$ 就是发射过程中火箭主体获得的推力。

动量守恒定律是在惯性系中推导出来的,因此其只在惯性系中成立。最初动量守恒定律是针对机械运动的,随后的研究表明其具有更广泛的适用性。例如,两个运动的带电粒子,它们之间有电磁相互作用。如果只考虑这两个粒子的动量,我们会发现总动量并不总守恒。但是若把系统内的机械动量和电磁场动量一起考虑进去,总动量仍然保持守恒。

相应地，当考虑原子核物理时，我们也必须把强相互作用场和弱相互作用场的动量考虑进来。也就是说，当我们将所有形态的物质都考虑进来后，动量依然守恒。

3-3 力 质点系的动量守恒条件

1. 力 牛顿运动定律

NOTE

牛顿在伽利略所作研究的基础上，用牛顿第一定律确定了力的物理意义。力可描述物体间的相互作用，是改变物体运动状态的基本物理量，因此，力和动量的改变之间有着密切的联系。如果有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用在一个质量为 m 的物体上，则力 $\boldsymbol{F}$ 就定义为动量的时间变化率，即

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{3-12}$$

17 世纪末，牛顿在他的《自然哲学的数学原理》一书中最先阐述了这一关系，我们称之为牛顿第二定律，其表述为：

作用于质点上的外力，等于该质点动量的时间变化率。

对于质量 m 不变的物体，(3-12)式可写成

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a} \tag{3-13}$$

这里 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 是质点的加速度。(3-13)式是牛顿第二定律的另外一种形式，(3-12)式是它更一般的形式，在相对论中也适用。①

在实际问题中，若不止一个力作用于质点上，(3-12)式中的力 $\boldsymbol{F}$ 就是质点上所有作用力的矢量和：

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{3-14}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 称为合外力。(3-14)式称为力的叠加原理。

① 在外力等于零时，牛顿第二定律就退化成牛顿第一定律了。但这不代表牛顿第一定律是多余的，而只是说明两个定律是自洽的。牛顿第一定律独立于牛顿第二定律，即使牛顿第二定律不成立，牛顿第一定律也是可以成立的。

NOTE

牛顿第二定律在直角坐标系中的分量形式为

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z$$

在研究圆周运动和曲线运动的自然坐标系中，采用切向和法向分量的形式，牛顿第二定律可写为

$$\begin{cases} F_t = ma_t = m\dfrac{dv}{dt} \\ F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{\rho} \end{cases} \tag{3-15}$$

如果我们考虑图 3-1 中两个质点间的相互作用，则由动量守恒定律可知该系统的总动量不变：

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 常量$$

两个质点在相互作用中传递着动量。在 dt 时间内，质点 2 失去的动量 $d\boldsymbol{p}_2$ 等于质点 1 获得的动量 $d\boldsymbol{p}_1$，于是可得

$$d\boldsymbol{p}_1 = -d\boldsymbol{p}_2$$

在单位时间内两质点间交换的动量为

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = -\frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} \tag{3-16}$$

(3-16)式反映了每个质点在相互作用中动量的变化率。由牛顿第二定律，我们定义 $\boldsymbol{F}_{12} = \dfrac{d\boldsymbol{p}_1}{dt}$ 为质点 2 给质点 1 的作用力，$\boldsymbol{F}_{21} = \dfrac{d\boldsymbol{p}_2}{dt}$ 为质点 1 给质点 2 的作用力，则由(3-16)式得

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \tag{3-17}$$

在 $\boldsymbol{F}_{12}$ 和 $\boldsymbol{F}_{21}$ 两个力中，如果把 $\boldsymbol{F}_{12}$ 称为作用力，那么 $\boldsymbol{F}_{21}$ 就称为反作用力。(3-17)式表明：

两个质点之间的作用力和反作用力大小相等、方向相反、在同一直线上。

这就是牛顿第三定律。

2. 质点系的动量守恒条件

动量守恒定律指出，由两个相互作用的质点组成的封闭系统的总动量保持不变。总动量是指系统内所有质点的动量的矢量和。封闭系统是指没有任何外力作用的系统，所有的力都是内力，它们都起源于系统的内部。但是，现实问题往往涉及由若干个相互作用的物体(质点)组成的系统，我们称之为质点系。为了处理问题方便，我们往往从一个大系统中分割出一个子系统作

为研究对象，并称之为“系统”，把大系统的其余部分称为系统的外部；系统内质点之间的相互作用力称为内力，外部质点给系统内质点的力称为外力。于是，系统内第 i 个质点所受的作用力为

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_{i外} + \boldsymbol{F}_{i内} \tag{3-18}$$

式中，$\boldsymbol{F}_{i外}$ 和 $\boldsymbol{F}_{i内}$ 分别表示第 i 个质点所受的合外力和合内力。

系统的总动量为 $\boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{p}_i$，它所受到的总作用力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i (\boldsymbol{F}_{i外} + \boldsymbol{F}_{i内}) = \boldsymbol{F}_{外} + \sum_i \boldsymbol{F}_{i内} \tag{3-19}$$

式中 $\boldsymbol{F}_{外} = \sum_i \boldsymbol{F}_{i外}$ 为系统所受的合外力。由牛顿第三定律 $\boldsymbol{F}_{ij内} = -\boldsymbol{F}_{ji内}$，得系统内力的矢量和 $\sum_i \boldsymbol{F}_{i内} = \boldsymbol{0}$，于是(3-19)式化为

$$\boldsymbol{F}_{外} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{3-20}$$

如果系统所受合外力 $\boldsymbol{F}_{外} = \boldsymbol{0}$，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$$

或

$$\boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{p}_i = 常量 \tag{3-21}$$

(3-21)式是动量守恒定律(3-8)式的推广。它不仅把系统拓展到两个质点以上，而且不要求系统必须是封闭的。(3-21)式表明：第一，只要系统所受合外力为零，其动量就守恒；第二，(3-21)式是个矢量式，由于矢量的各个分量的独立性，即使系统合外力不等于零，只要某一方向上的合外力分量等于零，则尽管系统的总动量不守恒，但该方向上的动量分量守恒。炮车的反冲就是动量分量守恒的一个例子。动量守恒定律说明系统的内力可以改变系统内每个质点的动量，但并不能改变系统的总动量。这一结果与内力的性质无关，也就是说，无论什么类型的相互作用力(引力、电磁力、核力等)都遵从这个规律。(这里的力都是超距作用，不考虑场。当力是借助于场的近距相互作用时，牛顿第三定律不再成立，动量守恒需要把场的贡献包括进来。)

例 1

一辆质量为 $m_0 = 1.5\times10^3$ kg 的卡车以 $v_0 = 50$ km/h 的速度从后面撞到一辆质量为 $m = 5\times10^2$ kg 的停着的小汽车的保险杠上，使得两辆车的前后保险杠搭在一起。问这两辆汽车碰撞后的共同速度为多少？

解 停着的这辆小汽车在被撞前的速度为零。由动量守恒定律可求出它们碰撞后的共同速度。

$$m_0 v_0 = (m_0 + m) v$$

$$v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + m} = \frac{1.5\times10^3\times50}{1.5\times10^3+5\times10^2}\ \text{km/h} = 37.5\ \text{km/h}$$

可见，我们在驾驶汽车时要注意交通安全，避免交通事故的发生。

例 2

如图 3-3 所示，炮车以仰角 α 发射一颗炮弹。炮车和炮弹的质量分别为 m_0 和 m，炮弹的出口速度为 u，求炮车的反冲速度 v。设炮车和地面的摩擦可忽略不计。

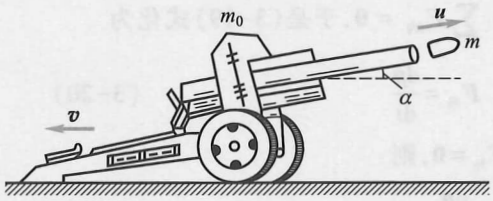


图 3-3 炮车的反冲

解 把炮车和炮弹视为一个系统，则系统所受外力有炮弹和炮车的重力、地面的正压力。在火药点燃前，正压力与重力是平衡的；但在炮弹发射过程中，由于炮车反冲力的作用，地面的正压力增大，因而系统的合外力不等于零（注意：炮弹发射过程中，炮弹受到的冲击力和炮车受到的反冲力是系统的一对相互作用的内力），系统的总动量不守恒。然而，这些外力都是沿竖直方向的，即系统在水平方向不受外力作用。因此，系统的动量水平分量守恒，可对分量应用动量守恒定律。此外，物体的速度必须相对于同一惯性系，否则会造成错误。题目给出的炮弹出口速度 u 是炮弹相对于炮筒的速度，根据相对速度公式，炮弹相对地面在水平方向的速度分量为

$$u\cos\alpha - v$$

于是有

$$m(u\cos\alpha - v) - m_0 v = 0$$

由此解得

$$v = \frac{m}{m_0 + m} u\cos\alpha$$

[说明] 如果考虑炮车和地面间的摩擦力，则系统在水平方向也受外力作用，即系统在水平方向的动量也不守恒，不能通过对分量应用动量守恒定律解本题。但在炮弹发射过程中，由于火药爆炸产生的内力比摩擦力大得多，所以可以近似地应用水平方向的分动量守恒定律。

例 3

一个 α 粒子(氦核),由最初处于静止状态的铀 238 的核中,以 1.4×10^7 m/s 的速度被发射出来。试求剩余原子核(钍 234)的反冲速度。

解 设由钍和 α 粒子组成的系统最初被束缚在一起构成铀核,然后分裂成两个部分。由于分裂时无外力作用,所以系统动量守恒。设 α 粒子和钍核的质量分别为 m_α 和 $m_{钍}$,速度分别为 v_α 和 $v_{钍}$,而且分裂前两粒子是静止的。于是

$$m_\alpha v_\alpha + m_{钍} v_{钍} = 0$$

$$v_{钍} = -\frac{m_\alpha}{m_{钍}} v_\alpha = -\frac{4}{234}\times 1.4\times10^7 \text{ m/s}$$

$$= -2.4\times10^5 \text{ m/s}$$

负号表示剩余原子核(钍)沿着和 α 粒子运动相反的方向反冲。

3-4 冲量 动量定理

NOTE

牛顿第二定律给出了质点动量的时间变化率和所受合外力的瞬时关系。现在,我们来讨论在任意一段时间内,质点的动量改变和外力作用之间的关系。设质点是在变力 $\boldsymbol{F}$ 作用下运动的,则在极小的时间间隔内,其动量的增量可由(3-12)式得出,为

$$\boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

而质点在变力 $\boldsymbol{F}$ 作用下,在 t_1 到 t_2 的一段时间内的动量增量 $\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1$ 可对上式两边积分求得

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 \tag{3-22}$$

上式左方的矢量 $\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$ 称为在 t_1 到 t_2 时间间隔内变力 $\boldsymbol{F}$ 作用在物体上的冲量。(3-22)式称为动量定理,用文字表述如下:

物体在一段时间间隔内所受合外力的冲量等于该时间间隔内物体动量的增量。

动量定理是直接由牛顿第二定律导出的,所以它同样只在惯性系中成立。

变力的冲量表示在一段时间间隔内,力的时间累积作用。冲量所产生的效果是使受力物体的动量发生变化。在 SI 中,冲量的单位是 N·s。

冲量是个矢量。在变力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下,从 t_1 到 t_2,由于 $\boldsymbol{F}$ 的方向随时间变化,因此冲量的方向不能由某一瞬时合外力 $\boldsymbol{F}$ 的方

NOTE

向来确定，而直接用积分 $\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$ 求矢量和是很困难的，且往往求不出。但(3-22)式告诉我们，冲量 $\boldsymbol{I}$ 的方向与物体动量的增量 $\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1$ 的方向相同，因此无须考虑物体在运动过程中外力方向的变化；而冲量的大小完全取决于物体在此段时间间隔内的动量增量的绝对值。这正是应用动量定理解决力学问题的优点所在。

如果 $\boldsymbol{F}$ 是一个方向不变，但大小不断变化的力，则冲量的大小等于外力随时间变化的曲线下的面积。如图 3-4 所示，图中恒力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 下面的矩形阴影面积和变力 $\boldsymbol{F}$ 曲线下面的面积相等，于是可用恒力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 的冲量来代替变力 $\boldsymbol{F}$ 的冲量

$$\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\overline{\boldsymbol{F}}(t_2-t_1) \tag{3-23}$$

式中 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 称为平均冲击力。

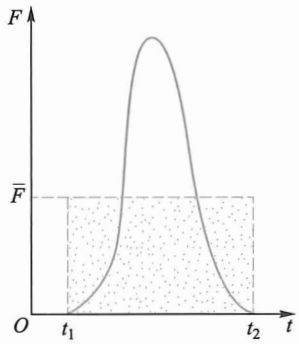


图 3-4 冲力随时间变化曲线和平均冲力

动量定理在解决碰撞、冲击等问题时非常有用。在实际情况中，我们有时要利用冲击力，增大冲击力；有时又要设法减小冲击力，避免造成损害。例如，利用冲床冲击钢板时，由于冲头受到钢板给它的冲量作用，冲头的动量很快减到零，相应的冲击力很大。根据牛顿第三定律，钢板所受到的反作用冲击力也同样很大，所以钢板被冲断了。又如，在高层建筑工地上，工人在高空作业时，万一不慎跌落到地面上，则在与地面碰撞过程中，人的动量将发生很大的改变，人将因受到地面的冲击力而受伤致残；但如果在周围空中放置安全网，人一旦落在网上，由于人与网的持续作用时间较长，因此在人的动量改变差不多的情况下，网作用于人身上的冲击力就小得多，从而起到安全保护作用。

例 4

跳伞员从飞机上跳下时，不是立即打开降落伞而是经过一定时间后才打开，此时跳伞员受到很大的冲击力。若打开伞前的速度为 50 m/s，伞完全打开后的速度为 5 m/s，打开伞的时间是 1.5 s，并假定下降过程是直线运动(忽略空气对人体的阻力)。求跳伞员在打开伞的过程中所受到的绳的平均冲力。

解 跳伞员受降落伞绳的拉力(平均拉力为 $\overline{F}$)和重力 mg 的作用，取竖直向下为正方向，根据动量定理有

$$(mg-\overline{F})\Delta t=mv-mv_0$$

$$\overline{F}=\frac{mv_0-mv}{\Delta t}+mg=\left(\frac{v_0-v}{g\Delta t}+1\right)mg$$

$$=\left(\frac{50-5}{9.8\times1.5}+1\right)mg\approx4mg$$

可见跳伞员在打开伞的过程中受到的绳的平均拉力约为本身体重的 4 倍。

3-5 牛顿运动定律的实际应用

NOTE

牛顿运动定律适用于绝大多数宏观现象，因而在工程学中具有广泛的实际应用。本节我们介绍牛顿运动定律在惯性系和非惯性系中的应用。

1. 力学中常见的力

前面已经提到力有四种基本类型：引力、电磁力、强相互作用和弱相互作用。引力和电磁力是长程力，在宏观现象中起着重要的作用；强相互作用和弱相互作用是短程力，它们的作用只有在原子核内才显示出来。由于牛顿力学规律对于原子核内的运动不再适用，因此在宏观的力学范畴内，只涉及引力和电磁力。我们处理力学问题时，常常会遇到弹性力、摩擦力。这些力其实都是电磁力的宏观表现。当我们挤压物体时，会使物体变形，导致原子、分子之间的距离发生改变。而原子、分子都是由更基本的带电粒子组成的，彼此之间有电磁力。距离的改变导致过去力的平衡被打破，总体上会产生一个反抗外力的弹性力。弹性力、摩擦力这些由于历史原因产生的名词我们将继续使用。

引力是指自然界中任何两个物体之间都有的相互吸引力，遵守的规律为

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

称为万有引力定律。式中 G 为引力常量，m_1 和 m_2 是两物体的质量，r 是两物体间的距离。万有引力定律仅对质点间的相互作用适用。对于电磁力，我们将在电磁学的章节中介绍。

下面我们简单介绍力学中几种常见的力。

(1) 重力

地球对其表面附近物体的引力称为重力。物体因受重力作用而具有的加速度称为重力加速度。根据牛顿第二定律，重力 $G = mg$。

物体作用于其悬吊物或支承物的力称为重量。我们在日常生活中用秤来称量物体时，实际上测得的是该物体作用在秤上的力，这个力的大小就是物体的重量。必须指出，人们往往把重力

NOTE

G 和重量混为一谈，事实上重力和重量是作用于两个不同的物体上的。另外，重力 G 永远等于 mg，而重量却依赖于物体和支承物运动的加速度，它可能大于或小于 mg，特别是在完全失重的情况下，它等于零。

（2）弹性力

物体在受到力的作用而发生形变时，其内部就产生反抗力，力图恢复物体原状，这种力称为弹性力。例如，用手拉伸弹簧，就会出现弹性力。在弹性限度内，弹簧中的弹性力与弹簧的伸长量（或压缩量）成正比，并且总是与拉伸（或压缩）的方向相反，这就是胡克（R.Hooke）定律：

$$F=-kx \tag{3-24}$$

其中 k 为弹簧的弹性系数，x 为伸长量（或压缩量），负号表示弹性力与拉伸（或压缩）方向相反。

当两个物体互相挤压时，在两物体接触处要产生挤压形变，于是在接触处会出现弹性力，这种弹性力的方向与接触面垂直，故称为正压力。

当绳子受到拉伸时，也会略有伸长，出现弹性力，这种力的方向沿绳长方向。这种弹性力不仅作用在绳子两端的物体上，同时也存在于绳的内部。我们可以在一条拉紧的绳上任意处，设想作一截面把绳截为两部分，则这两部分在截面处彼此都有弹性力的作用，通常把绳上任意截面处两侧的弹性力称为张力。如果绳的质量可以忽略不计，则绳中各处张力相等；如果绳的质量不可忽略，则张力还和绳的加速度有关。一般说来，绳中不同截面处的张力不再相等，因而绳两端的张力大小不同。

综上所述，如果形变物体是弹簧，受力后有明显的可以确定的形变，则可以利用胡克定律来确定弹性力的大小。然而在一般涉及正压力和绳中张力问题时，我们难以通过这些不确定的形变计算出弹性力，而必须根据各个物体的运动情况，利用牛顿运动定律来确定。

（3）摩擦力

当两个互相接触的物体作相对运动或有相对运动趋势时，它们之间就有摩擦力。

摩擦可分为干摩擦和湿摩擦两类。干摩擦是两个固体表面之间的摩擦，又叫外摩擦。湿摩擦是液体（或气体）内部，或者固体和液体（或气体）之间的摩擦，因此又叫黏性摩擦或内摩擦。

干摩擦可分为静摩擦、滑动摩擦和滚动摩擦。这里仅介绍静摩擦和滑动摩擦两种。

当两个互相接触的物体相对静止但有相对滑动的趋势时，它

NOTE

们之间产生的摩擦力称为静摩擦力。静摩擦力的大小和外力大小相等，方向相反，但它的大小是可以改变的，依具体情况，可随外力的增大取零到某个最大值之间，这个最大值称为最大静摩擦力，其大小为

$$F_{fs,max}=\mu_s F_N \tag{3-25}$$

式中 μ_s 称为静摩擦因数，其数值由两物体的性质和表面情况而定。

当两个物体之间有相对滑动时，存在于接触面上的摩擦力叫滑动摩擦力，其大小为

$$F_f=\mu F_N \tag{3-26}$$

式中 μ 称为动摩擦因数，其数值不但与两物体的性质和表面情况有关，而且还与物体的相对速度有关。

滑动刚开始时，滑动摩擦力比最大静摩擦力小，而且随着相对速度的增大，滑动摩擦力继续减小，之后又随着相对速度的增加而增加。

与干摩擦不同，湿摩擦的特征是湿摩擦力在速度趋于零的同时趋于零。对于较为稠密的流体（比如水），摩擦力往往正比于速度，而对于比较稀薄的流体（比如空气），摩擦力往往正比于速度的平方。

在自然界中，摩擦有很重要的意义。例如，在冰层覆盖的道路上，若行人脚底或车辆的轮子与路面的摩擦显著减小，将给行人走路和车辆行驶带来困难，因此要设法增大摩擦，如在鞋底和轮胎上做出凹凸不平的花纹。

然而在很多情况下，摩擦的作用是十分不利的，要消耗大量的能源，如使机器发热甚至烧毁，因而必须采取措施减小摩擦。减小摩擦的最根本方法是用滚动摩擦代替滑动摩擦。因为在滚动情况下，摩擦因数小得多，所以滚动时摩擦力要比滑动时小得多，这正是我们在机器和车辆中尽量使用滚珠轴承的原因。此外，我们还可变干摩擦为湿摩擦。例如，在机器的零部件表面和轴承处涂以润滑油或充入高压气体，使两表面之间形成薄薄的油层或气层，这将大大减少滑动摩擦。高速行驶的气垫船就是利用这个原理制成的：船上装有几个大功率的吹风机，使船体与水面（或地面）之间形成气垫，船体浮在空气层上，从而大大减少了摩擦，达到高速行驶的目的。

NOTE

2. 应用举例

应用牛顿运动定律可以解决两类问题：一类是由已知力求物体的运动；另一类是已知运动求力。除此之外，应用牛顿运动定律还可解决二者的混合问题。

下面我们举几个例子，说明牛顿运动定律的实际应用。

例 5

如图 3-5 所示，物体 A 的质量为 $m_A=2$ kg，它与斜面间的动摩擦因数 $\mu=0.3$；物体 B 的质量为 $m_B=4$ kg。求 A，B 的加速度及连接 A，B 之间的绳中的张力 F_T。设绳和滑轮的质量及滑轮与轴间的摩擦均忽略不计，重力加速度 $g=10\ \mathrm{m/s^2}$。

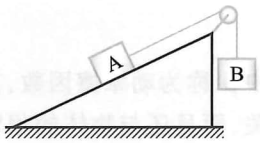


图 3-5

解 首先作隔离图，进行受力分析。如图 3-6 所示，根据牛顿第二定律，有

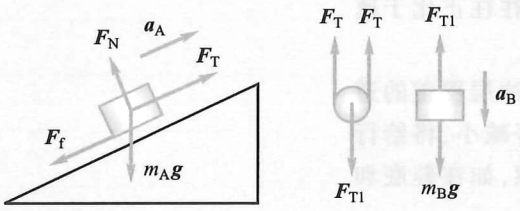


图 3-6

$$F_T-m_Ag\sin 30°-\mu m_Ag\cos 30°=m_Aa_A \quad (1)$$

$$F_{T1}=2F_T \quad (2)$$

$$m_Bg-F_{T1}=m_Ba_B \quad (3)$$

根据动滑轮性质，在相同的时间内，物体 A 通过的路程是物体 B 通过路程的两倍，故得

$$a_A=2a_B \quad (4)$$

联立方程(1)—(4)得

$$a_B=\frac{[m_B-2m_A(\sin 30°+\mu\cos 30°)]g}{4m_A+m_B}$$

$$=\frac{[4-2\times2(\sin 30°+0.3\cos 30°)]\times10}{4\times2+4}\ \mathrm{m/s^2}$$

$$=0.8\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_A=2a_B=1.6\ \mathrm{m/s^2}$$

$$F_{T1}=\frac{2m_Am_B(2+\sin 30°+\mu\cos 30°)g}{4m_A+m_B}$$

$$=\frac{2\times2\times4(2+\sin 30°+0.3\cos 30°)\times10}{4\times2+4}\ \mathrm{N}$$

$$=36.8\ \mathrm{N}$$

$$F_T=\frac{F_{T1}}{2}=18.4\ \mathrm{N}$$

例 6

如图 3-7 所示，在光滑的水平桌面上放置一块质量为 $m_0=10$ kg 的平板；质量为 $m=5$ kg 的物块压在平板上，物体与平板间的静摩擦因数和它与斜面间的动摩擦因数均为 $\mu_s=0.1$，动摩擦因数 $\mu=0.09$；质量为 $m_1=1$ kg 的重物由跨过滑轮的细绳与物块 m 连接。设滑轮与细绳的质量忽略不计。求物块 m 与平板 m_0 的加速度及它们之间的摩擦力。

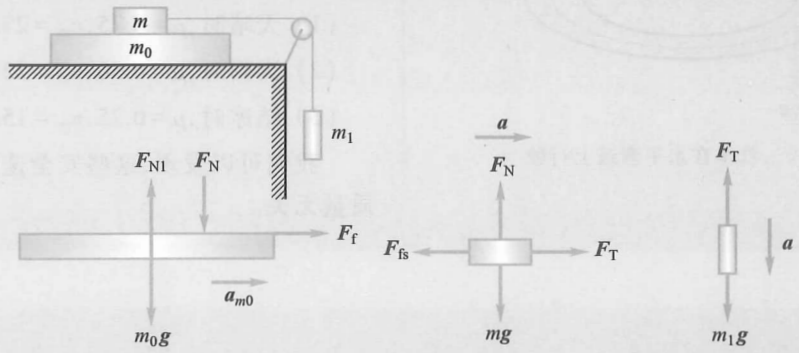


图 3-7

解　首先分别对 m_0，m，m_1 作隔离图，进行受力分析。根据牛顿第二定律

$$F_f=m_0a_{m_0} \tag{1}$$

$$F_T-F_f=ma \tag{2}$$

$$m_1g-F_T=m_1a \tag{3}$$

联立(2)式和(3)式得

$$m_1g-F_f=(m+m_1)a \tag{4}$$

物块 m 与平板 m_0 间的最大静摩擦力为

$$F_{fs,max}=\mu_s mg=0.1\times5\times9.8\ \text{N}=4.9\ \text{N}$$

故平板 m_0 的最大加速度为

$$a_{m_0,max}=\frac{F_{fs,max}}{m_0}=\frac{4.9}{10}\ (\text{m/s}^2)=0.49\ \text{m/s}^2$$

如果物块 m 和平板 m_0 一起运动，则必须有 $a=a_{m_0}=a_{共}$，由(1)—(3)式得

$$a_{共}=\frac{m_1g}{m+m_0+m_1}=\frac{1\times9.8}{5+10+1}\ \text{m/s}^2=0.61\ \text{m/s}^2$$

但是，平板 m_0 的最大加速度 $a_{m_0,max}<0.61\ \text{m/s}^2$

所以物块 m 与平板 m_0 之间将发生相对运动，这时 F_f 应为滑动摩擦力，其大小为 $F_f=\mu F_N=\mu mg=0.09\times5\times9.8\ \text{N}=4.41\ \text{N}$。

由(1)式和(4)式得

$$a_{m_0}=\frac{F_f}{m_0}=\frac{4.41}{10}\ \text{m/s}^2=0.44\ \text{m/s}^2$$

$$a=\frac{m_1g-F_f}{m+m_1}=\frac{1\times9.8-4.41}{5+1}\ \text{m/s}^2=0.9\ \text{m/s}^2$$

例 7

设有一条半径为 100 m 而不倾斜的弯曲公路；又设橡胶与沥青之间的摩擦因数在晴天时为 0.75，在雨天时为 0.50，橡胶与冰之间的摩擦因数为 0.25。问：(1)天晴的时候、(2)下雨的时候、(3)结冰的时候，汽车在该公路上行驶的最大安全速度为多少？

解 如图 3-8 所示，汽车在公路上转弯时向心力为摩擦力。设汽车质量为 m，则有

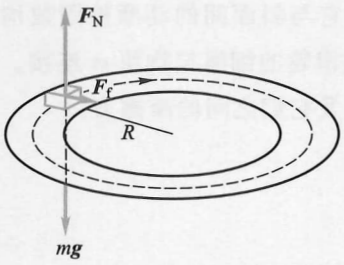


图 3-8 汽车在水平弯道上行驶

$$F_f=\mu mg$$

由牛顿第二定律

$$F_f=m\frac{v^2}{R}=\mu mg$$

故

$$v=\sqrt{\mu Rg}$$

（1）天晴时，$\mu=0.75$，$v_{晴}=27.11$ m/s。

（2）天雨时，$\mu=0.50$，$v_{雨}=22.14$ m/s。

（3）结冰时，$\mu=0.25$，$v_{冰}=15.65$ m/s。

我们可以发现，这些安全速度均与汽车质量无关。

例 8

将质量为 m 的物体以初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 向上斜抛，抛射角（初始运动方向与地面的夹角）为 θ。设物体在空中运动时，受到的阻力与速率成正比，比例系数为 k。求运动方程。

解 设物体的斜抛点为坐标原点，在空中运动位置为 x 和 y 时的速率分别为 v_x 和 v_y，则有

$$F_x=-kv_x=ma_x=m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

$$F_y=-(mg+kv_y)=ma_y=m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

对（1）式和（2）式分别积分，求出该物体的速度分量：

$$\int_{v_0\cos\theta}^{v_x}\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x}=\int_0^t-\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0\sin\theta}^{v_y}\frac{k}{mg+kv_y}\mathrm{d}v_y=\int_0^t-\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

$$v_x=v_0\cos\theta\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{3}$$

$$v_y=\left(v_0\sin\theta+\frac{mg}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k} \tag{4}$$

再对（3）式和（4）式分别积分，求出其运动方程：

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t v_0\cos\theta\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^y\mathrm{d}y=\int_0^t\left[\left(v_0\sin\theta+\frac{mg}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}\right]\mathrm{d}t$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{m}{k}v_0\cos\theta\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)\\ y=\dfrac{m}{k}\left(v_0\sin\theta+\dfrac{mg}{k}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)-\dfrac{mg}{k}t\end{cases} \tag{5}$$

3-6 非惯性系

NOTE

前面我们已经提到，牛顿运动定律只在惯性系中成立。牛顿运动定律不能成立的参考系称为非惯性系。在实际问题中，我们经常和非惯性系打交道。

在非惯性系中牛顿运动定律不成立的原因是：对于同一个运动物体，虽然在非惯性系与惯性系中所受的作用力相同，但加速度不同。例如，有一质量为 m 的小球静止在光滑的水平地面上，如图 3-9 所示。站在地面上的人 A 看到小球 m 静止在地面上；而对于站在以加速度 $\boldsymbol{a}$ 向前行驶的汽车上的人 B 来说，小球 m 却以 $-\boldsymbol{a}$ 的加速度向后作加速运动。站在地面上的人 A 是以地面为参考系来描述小球 m 的运动的，他对于所看到的现象可以这样来解释：因为地面光滑，小球 m 在水平方向不受力，根据牛顿第二定律，它在水平方向没有加速度，所以保持静止状态。但是，站在汽车上的人 B 以汽车为参考系来描述这一现象时，就出现问题了。因为在他看来，小球 m 在水平方向未受到任何作用力，但却有加速度向后作加速运动，也就是说，不受力产生加速度，这显然不符合牛顿运动定律。

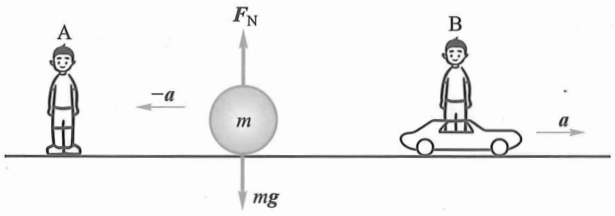


图 3-9 在汽车参考系中观察小球

为了能在非惯性系中求解力学问题，我们设想小球 m 除受到物体间相互作用的力外，还有一个等于 $-m\boldsymbol{a}$ 的力作用于小球上，这个力叫惯性力 $\boldsymbol{F}_{惯}$。在非惯性系中引入惯性力 $\boldsymbol{F}_{惯}$ 后，我们就能利用牛顿运动定律描述物体在非惯性系中的运动了，即

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{惯}=m\boldsymbol{a}' \tag{3-27}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 是物体受到相互作用力的合外力；$\boldsymbol{F}_{惯}$ 是惯性力，其大小等于受力物体的质量 m 乘以非惯性系的加速度 a，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反，即 $\boldsymbol{F}_{惯}=-m\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}'$ 是物体相对非惯性系的加速度。

读者必须注意，不能把惯性力与弹性力、重力和摩擦力同等看待，因为它不是由于物体间的相互作用而产生的真实力。惯性力是一种虚拟力，既没有施力者，也没有反作用力。惯性力的实

NOTE

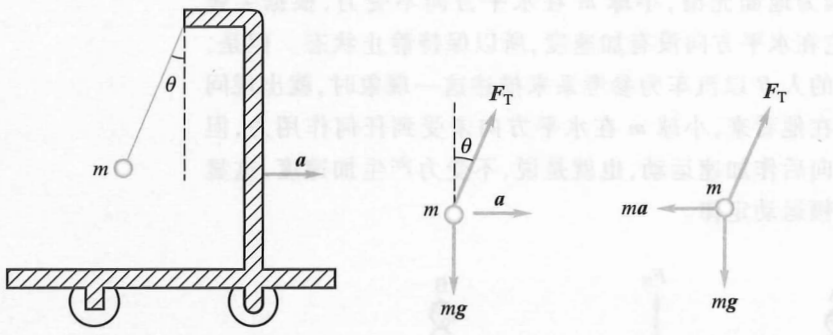
质是物体的惯性在非惯性系中的反映。(在广义相对论中,惯性力等效于引力。)

$\boldsymbol{F}_{惯}=-m\boldsymbol{a}$ 形式的惯性力适用于作加速平动的非惯性系,对于作转动的非惯性系,同样可以引入相应的惯性力,只不过表示有所不同而已,本书中不作介绍。

下面我们通过例子来说明惯性力概念的应用,并分别比较用惯性系和非惯性系处理问题的一致性。

例 9

一质量为 m 的小球用细线悬挂在小车上。当小车沿水平面以加速度 a 作匀加速直线运动时,悬线偏离竖直线一角度 θ[见图 3-10(a)]。求悬线偏离竖直线的角度和线中的张力(见图 3-10)。



(a) 小车以加速度a作平动　(b) 在地面参考系中　(c) 在小车参考系中

图 3-10

解法 1　在地面参考系(惯性系)中,如图 3-10(b)所示。小球 m 受两个力:线的张力 F_T 和重力 mg。根据牛顿第二定律,有

$$F_T\sin\theta=ma$$

$$F_T\cos\theta-mg=0$$

解得

$$F_T=m\sqrt{a^2+g^2},\quad \theta=\arctan\frac{a}{g}$$

解法 2　以小车为参考系(非惯性系),如图 3-10(c)所示。在小车上的观察者看来,小球 m 静止不动,它除了受张力 $\boldsymbol{F}_T$ 和重力 $m\boldsymbol{g}$,还受到一惯性力 $\boldsymbol{F}_{惯}$,此三力应互相平衡。应用牛顿运动定律有

$$F_T\sin\theta-ma=0$$

$$F_T\cos\theta-mg=0$$

于是可解得同样的结果。

本章摘要

NOTE

1. 牛顿第一定律和惯性系。

2. 惯性质量是物体惯性大小的量度。

3. 动量

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$$

动量守恒定律：当质点系所受合外力为零时，$\sum_i \boldsymbol{p}_i$ = 常量 。利用动量守恒定律，可将未知质量 m 与标准质量 m_0 进行比较，然后算出未知质量 m。

4. 力是物体动量的时间变化率，即在单位时间内物体在相互作用中传递的动量。

5. 冲量是描述力在时间上的累积作用的物理量。它是一个矢量，$\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$ 。

动量定理 $\quad \boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1$

6. 牛顿第二定律和牛顿第三定律只能在惯性系中成立。

7. 惯性力是惯性在非惯性系中的反映。在平动非惯性系中，$\boldsymbol{F}_{惯}=-m\boldsymbol{a}$。

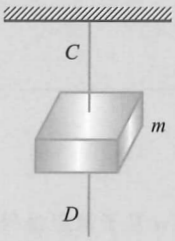
思考题

3-1 在杂技表演中，常可看到一杂技演员平躺在钉子上，身上压着一块大而重的石板，另一演员用大铁锤猛击石板，结果石裂而人未受伤。这是什么原因？有人说如果用很厚的棉被代替石板，演员会更安全，你说对吗？试分析之。

3-2 在“马拉车、车拉马”的问题中，马拉车的作用力等于车拉马的反作用力，两个力大小相等且方向相反，为什么车还能前进呢？

3-3 试推算离地面高度为 $h=210$ km 处的人造地球卫星绕地球运转的速度。设该高度处 $g=9.2\ \mathrm{m/s^2}$（因为重力加速度随地面高度的增加而减小），地球半径 $R=6\ 370$ km。

3-4 如图所示，用一根线 C 把质量为 m 的物体挂在天花板上，再用一根相同的线 D 系在物体下面。试说明以下事实：如果突然快拉 D，D 就断开；如果慢慢拉 D，C 就断开。



思考题 3-4 图

3-5 试分析飞机和火箭的飞行原理的不同之处。

3-6 在一个轨道上运转的太空实验室(宇宙航行器)中的宇航员想不断记录他每天的体重,假如他处于失重的状态,你能否设计一个帮他测定自己体重的方法?

3-7 如图所示,两弹性球被置于光滑的桌面上,质量分别为 m_1,m_2,速度分别为 v_1,v_2,它们相向而行发生碰撞。

(1) 若碰撞后 m_2 恰好静止,求此时 m_1 的速度;

(2) 若 m_2 固定于桌面上(譬如说,钉在桌上),m_1 以 $\boldsymbol{v}_1$ 的速度与它碰撞,再以 $-\boldsymbol{v}_1$ 的速度弹回,问此时两球组成系统的动量有无变化?为什么?讨论上述两种情况是否为完全弹性碰撞。



思考题 3-7 图

3-8 为什么雨滴在它下降的最后阶段速度总是恒定的?

3-9 站在秤台上仔细观察你在站起和蹲下的过程中,秤台读数的变化。试用牛顿运动定律解释之。

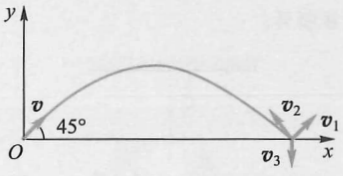
3-10 如果大小不同的两只船与堤岸的距离相同,为什么从小船跳上岸比较难,而从大船跳上岸却比较容易?

3-11 一个人静止在覆盖着整个池塘的完全光滑的冰面上,试问他怎样才能到达岸边?他能否通过步行、滚动、挥动双臂或踢动双脚而到达岸上?

3-12 惯性力有没有反作用力?它是怎样产生的?为什么要引进惯性力?它的大小与方向如何确定?

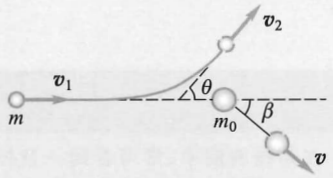
习题

3-1 如图所示,一手榴弹投出方向与水平面成 45°角,投出的速率为 25 m/s。若它在刚要接触与投射点在同一水平面的目标时爆炸,并分成质量相等的三块:一块以速度 v_3 竖直向下,一块沿爆炸处的切线方向以速度 $v_2=15$ m/s 飞出,一块沿轨道法线方向以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 飞出,求 v_1 和 v_3。(不计空气阻力)



习题 3-1 图

3-2 在一次 α 粒子散射过程中,α 粒子与静止的氧原子核发生“碰撞”。实验测得碰撞后 α 粒子沿与入射方向成 $\theta=72°$ 角的方向运动,而氧原子核沿与 α 粒子入射方向成 $\beta=41°$ 角的方向“反冲”,如图所示。求碰撞前后 α 粒子的速率之比。

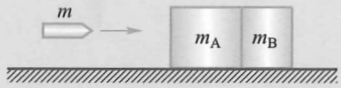


习题 3-2 图

3-3 一个质量为 m 的人站在质量为 m_0 的小船的船头上,小船以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 在静水中向前行驶。若此人突然以相对于小船的速度 $\boldsymbol{u}$ 向船尾跑去,问小船的速度变为多少?如果人到达船尾后停止跑动,此时小船的速度又变为多少?

3-4 一垒球的质量 $m=0.20$ kg,如果投出时速度为 30 m/s,被棒击回的速度为 50 m/s,方向相反。试求球的动量变化和打击力的冲量。如果球与棒接触时间为 $\Delta t=0.002\ 0$ s,求打击的平均力。

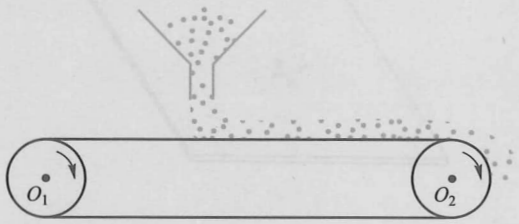
3-5 如图所示，A 和 B 两木块质量分别为 m_A 和 m_B，并排在光滑的水平面上。今有一子弹水平地穿过木块 A 和 B，所用时间分别为 Δt_1 和 Δt_2。若木块对子弹的阻力为恒力 F，问子弹穿过后，两木块的速度各为多少？



习题 3-5 图

3-6 一飞机以 300 m/s 的速度飞行，途中撞到了一只质量为 2.0 kg 的鸟，鸟的长度为 0.3 m。假设鸟撞上飞机后随飞机一起运动，试计算它们相撞过程中的平均冲力。

3-7 如图所示，小石子从料斗中落在水平传送带上，靠传送带输送出去。设每分钟落下的小石子为 20 kg，皮带速率为 15 m/s。试求匀速传送时皮带作用在小石子上的水平力。



习题 3-7 图

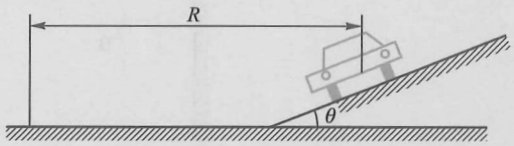
3-8 在无重力场影响的条件下，由静止发射一个质量为 6.0×10^4 kg 的三级火箭。

（1）设燃料相对于火箭的喷出速率为 $v_r=2\ 500$ m/s；三级火箭依次发射后，火箭主体的质量分别变为 2.0×10^4 kg，$\frac{2}{3}\times10^4$ kg，$\frac{2}{9}\times10^4$ kg，求火箭的最终速率。

（2）若把上述火箭改装成一级火箭，发射后火箭主体质量变为 1.2×10^4 kg，问火箭的最终速率是多少？

3-9 一喷气式飞机以 200 m/s 的速度飞行，燃气轮机每秒吸入 50 kg 空气，与机上每秒喷出2 kg 的燃料混合燃烧后，相对飞机以 400 m/s 向后喷出。求该燃气轮机的推力。

3-10 如图所示，一辆汽车驶入曲率半径为 R 的弯道；弯道路面与水平面之间倾斜一角度 θ；轮胎与路面之间的摩擦因数为 μ。求汽车在路面上不作侧向滑动时的最大和最小速率。

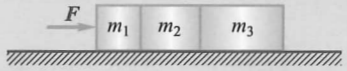


习题 3-10 图

3-11 光滑的水平面上放着三个相互接触的物体，它们的质量分别为 $m_1=1$ kg，$m_2=2$ kg，$m_3=4$ kg。若用 $F=98$ N 的水平力作用在 m_1 上，如图所示。

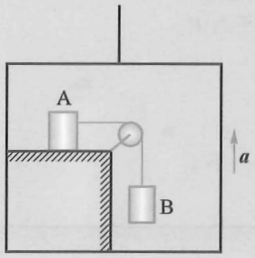
（1）求 m_1，m_2，m_3 之间的相互作用力；

（2）若此力 F 水平向左作用在 m_3 上，情况又如何？



习题 3-11 图

3-12 如图所示，升降机中水平桌面上有质量为 m 的物体 A，它以细绳与质量也为 m 的物体 B 相连。当升降机以加速度 $a=g/2$ 上升时，若略去各种摩擦，机内的人和地面上的人观测到 A 和 B 的加速度各是多少？

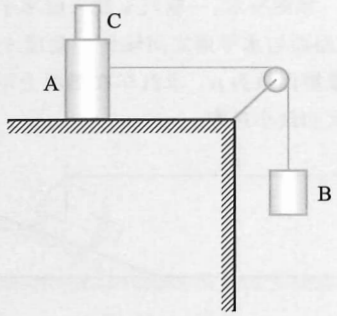


习题 3-12 图

3-13 如图所示，物体 A 的质量为 4.4 kg，物体 B 为 2.6 kg；物体 A 与桌面间静摩擦因数为 0.18，动摩擦因数为 0.15。问：

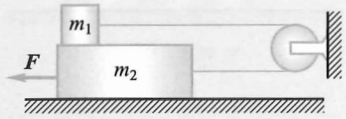
（1）至少要在物体 A 上放置质量为多大的物体 C 才能使 A 不滑动？

（2）如果突然从 A 上拿起物体 C，则物体 A 的加速度是多少？



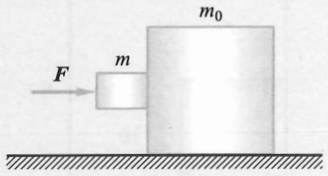
习题 3-13 图

3-14 如图所示，$m_1 = 1.0\ \text{kg}$，$m_2 = 5.0\ \text{kg}$，m_1 与 m_2 之间的摩擦因数 $\mu_1 = 0.10$，m_2 与地面之间的摩擦因数 $\mu_2 = 0.20$。m_1 与 m_2 用一跨过滑轮的轻绳相连，滑轮质量忽略不计。今用大小为 $F = 19.6\ \text{N}$ 的力来拉 m_2，试求 m_1 及 m_2 运动时的加速度，并求绳子的张力。



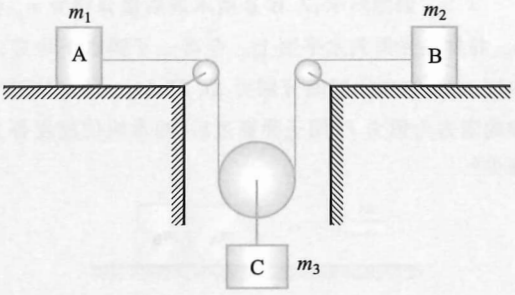
习题 3-14 图

3-15 如图所示，有两个可以自由移动的物体：$m = 16\ \text{kg}$，$m_0 = 88\ \text{kg}$；两物体间的静摩擦因数 $\mu_s = 0.38$，而 m_0 与地面间无摩擦。求要使 m 能紧贴着 m_0 运动的最小水平力 $\boldsymbol{F}$。



习题 3-15 图

3-16 如图所示，物体 A，B，C 的质量各为 m_1，m_2，m_3，且有 $m_3 > m_2 > m_1$。若物体 A，B 与桌面的滑动摩擦因数均为 μ，求三物体的加速度及绳内的张力（不计绳和滑轮的质量及其与轴承的摩擦，绳不可伸长）。



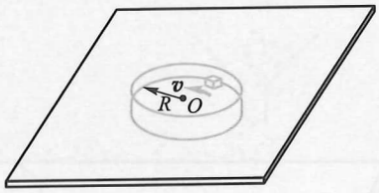
习题 3-16 图

3-17 如图所示，一质量为 m 的木块在一光滑水平面上沿一半径为 R 的环内侧滑动。已知木块与环面间的摩擦因数为 μ，求下列各量关于 m，R，μ 和 v 的函数表达式：

（1）任意时刻作用在木块上的摩擦力；

（2）任意时刻木块的切向加速度；

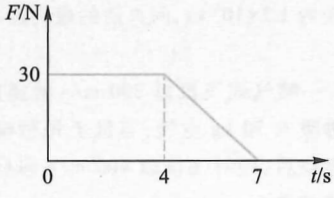
（3）木块的速率 v 由初始 v_0 降为 $v_0/3$ 所经历的时间。



习题 3-17 图

3-18 一物体以初速 v_0 从地面竖直上抛。物体质量为 m，所受空气阻力大小为 kv^2，k 为正常量，求物体所能达到的最大高度。

3-19 用水平拉力 $\boldsymbol{F}$ 拉一静止在水平地面上、质量为 $m = 10\ \text{kg}$ 的木箱。$\boldsymbol{F}$ 的大小随时间变化的关系曲线如图所示。从 $t = 0$ 到 $t = 4\ \text{s}$ 期间，$F = 30\ \text{N}$；从 $t = 4\ \text{s}$ 到 $t = 7\ \text{s}$ 期间，F 由 30 N 线性减小到零。木箱与地面间的摩擦因数为 $\mu = 0.2$，求：



习题 3-19 图

（1）$t=4$ s 时木箱的速度；

（2）$t=7$ s 时木箱的速度；

（3）$t=6$ s 时木箱的速度。

3-20 当一电梯以 $g/3$ 的加速度下降时，电梯中质量为 m_0 的人开始以相对电梯为 $2g/3$ 的加速度举起一质量为 m 的物体。试分别以地面和电梯为参考系，求人对电梯底板的压力。

3-21 一质量为 m_0、长为 L 的小船静止浮在水面上，船的两头分别站着甲、乙两人，甲的质量为 m_0，乙的质量为 $m(m_0>m)$。现两人同时以相同的相对于船的速率 v_0 向位于船正中间但固定于水中的木桩走去。忽略船与水之间的阻力作用，则谁先走到木桩处？所需时间为多长？

3-22 一跳伞员在 3 000 m 高处起跳，在降落伞张开之前他达到一极限速度 30 m/s。

（1）假定空气阻力正比于速度，他达到这个极限速度需多久？达到这个速度时，运行了多少距离？

（2）为了经受一个不大于 $10g$（g 为重力加速度）的反向加速度，在他的伞张开以后，当他碰到地面时，速度已降到 3 m/s，他弯曲膝部以减弱冲撞，需将膝部弯曲多少？假定他的膝部像弹簧一样具有正比于位移的阻力。

（3）空气阻力正比于速度的假定是否合理？

3-23 质量为 m_0 的飞船以大小恒定的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 在太空中航行，为了改变飞船的飞行方向，开启飞船上的喷气发动机使其向外喷出燃料气体，燃料气体使飞船的速度恒为 $\boldsymbol{u}$，且 $\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{u}$ 始终垂直。经过一段时间，飞船的质量变为 m，求这段时间内飞船运动方向改变的角度。

3-24 一质量为 m 的质点，在竖直的 xOy 平面内运动，除受重力外，还受到方向指向原点、大小与径向距离成正比的力作用，比例系数为 k。以 x 轴为水平坐标，y 轴为竖直坐标，向上为正。

（1）求质点受力平衡点的坐标(x_0,y_0)；

（2）若质点从位置(x_1,y_1)处由静止开始运动，试写出质点在 x、y 轴方向的动力学方程，并求任意 t 时刻质点的坐标(x,y)。

3-25 一停泊在赤道无风带的小船，船长决定采取应急措施，把 200 kg 的锚升到 20 m 高的桅杆顶。船的其余部分的质量是 1 000 kg。（地球半径为 6 400 km）

（1）船开始运动，为什么？

（2）船的运动方向如何？

（3）船的运动速度为多大？

（4）使船运动的能量从何而来？



习题答案

第四章　能量　能量守恒定律



本章补充资源

NOTE

在物理学的发展过程中，能量这个概念起到很大的作用。它不仅把自然界中不同形式的运动联系在一起，而且形式多样，可以相互转化。能量概念的巨大价值正在于它转化的守恒性。

能量的概念是英国的物理学家托马斯·杨（Thomas Young）在1807年发表的著作《自然哲学讲义》中第一次提出的，之后，这一新概念很快便在力学、热学、电磁学和化学领域中得到应用。从1842年开始，迈耶（J.R.Mayer）、焦耳（J.P.Joule）和亥姆霍兹（H.von Helmholtz）等人对能量概念做了大量的研究工作，明确地提出了能量守恒定律。有趣的是，他们三个人都不是科班出身的物理学家。迈耶是德国的医生；焦耳是曼彻斯特一个酿酒师的儿子，是一名业余科学家；亥姆霍兹是德国的医生和生理学家。这也从某一方面说明了能量在各个学科领域存在的多样性。

能量守恒定律的确立，对人们制造永动机的梦想从科学上作了最后的彻底的否定。在理论上，这个定律为经典物理学和现代物理学的飞速发展奠定了基础。

4-1　动能和功

质量为 m 的物体的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \tag{4-1}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 是作用于物体的合外力。

在(4-1)式等式两边点乘物体的位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$，得

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{4-2}$$

由于乘积 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ 是物体在时间 $\mathrm{d}t$ 内的速度增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$，再根据

NOTE

$\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)$及$\boldsymbol{v}^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=v^2$,可得

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t=m\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}=m\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{4-3}$$

把上式代入(4-2)式,得关系式

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{4-4}$$

若系统为封闭系统,即物体所受合外力$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$,那么

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=0$$

则

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2 \tag{4-5}$$

保持恒定,我们把E_{k}称为物体的动能。

将(4-5)式的分子和分母同时乘以m,并注意到乘积mv等于物体的动量p,则动能的表达式可写为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{p^2}{2m} \tag{4-6}$$

若有力作用在物体上,则动能将发生变化。在这种情况下,根据(4-4)式,在$\mathrm{d}t$时间内物体动能的增量等于力与位移的标积$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$。量

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{4-7}$$

称为力$\boldsymbol{F}$在位移$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$上做的功。用$\mathrm{d}s$表示位移$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$的大小,θ表示$\boldsymbol{F}$和$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$之间的夹角,则上式可写成

$$\mathrm{d}W=F\mathrm{d}s\cos\theta \tag{4-8}$$

对(4-4)式沿某一路径从点1到点2积分,得

$$\int_1^2\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\int_1^2\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

上式左边部分是物体在点2和点1间的动能之差,即物体在路径1至路径2上的动能增量。于是得

$$E_{\mathrm{k2}}-E_{\mathrm{k1}}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\int_1^2\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{4-9}$$

量

$$W=\int_1^2\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{4-10}$$

是在路径1至路径2上力所做的功。它表明,作用于物体上的合

NOTE

外力的功使物体的动能产生一增量：

$$W=E_{k2}-E_{k1} \tag{4-11}$$

(4-11)式表明，动能是通过相互作用力做功来传递的，这就是动能定理。若力与位移成锐角($\cos\theta>0$)，则功为正；若成钝角($\cos\theta<0$)，则功为负；当$\theta=\pi/2$时，功等于零。最后一种情况特别清楚地表明，力学中功的概念在本质上不同于日常生活中“工作”的概念。在日常生活的含义中，任何用力，例如肌肉紧张，总伴随着“工作”。例如，用手夹持一静止的重物，然后沿水平路径搬运此重物，搬运工人要费很多力，亦即完成很多“工作”。然而，在这种情况下，我们这里作为力学量定义的功，由于力和位移垂直($\theta=\pi/2$)，其功等于零。

现在我们考虑做功所涉及的时间。将一物体举到一定的高度，不论所用时间长或短，所做的功都相同，但我们有时更关心的不是能做多少功，而是做功的效率，即单位时间内做了多少功。单位时间内做的功称为功率，用 P 表示。若在 $\mathrm{d}t$ 时间内做的功为 $\mathrm{d}W$，则功率为

$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tag{4-12}$$

因 $\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$，而$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}$，故

$$P=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{4-13}$$

根据此式，功率等于力与力的作用点的运动速度的标积。

从上面给出的动能和功的定义，不难看出：动能和功的计算必须相对同一参考系，而且能量与功具有同样的单位量度。在 SI 中，这个单位叫作焦[耳]，记作 J：

$$1\ \mathrm{J}=1\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} \tag{4-14}$$

功率的单位为瓦[特]，记作 W，1 W = 1 J/s。[①]

例 1

弹性系数为 k 的弹簧未拉伸时的长度为 $|AB|$，其一端固定在 A 点，另一端与一质量为 m 的物块相连，变力 $\boldsymbol{F}$ 与半径为 R 的光滑圆柱面相切，如图 4-1(a)所示。在变力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，物块缓慢地沿着圆柱体表面从位置 B 移到位置 C，试用积分法计算变力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功。

① 在工程单位制中，功率的单位叫马力(hp)，这是塞佛利提出的。他是第一个用蒸汽开动抽水机的人，当时，矿井里抽水都靠马作为动力，因此，塞佛利建议将一匹马做功所能达到的功率定为功率的单位。后来瓦特采纳了他的建议，用一匹马做功产生的功率作为功率的单位：1 hp = 736 W。

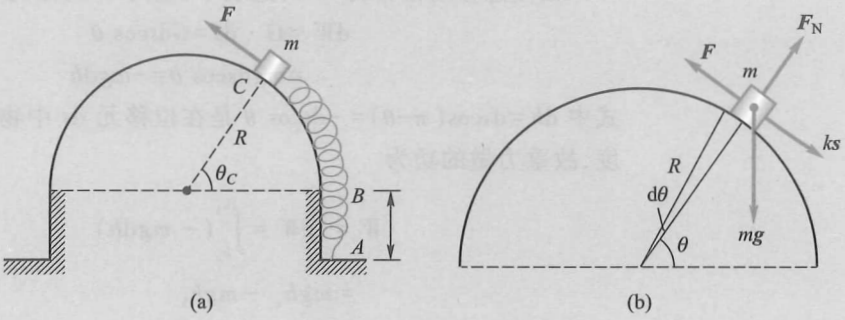


图 4-1 变力做的功

解 物块在任一位置时的受力分析如图 4-1(b)所示。正压力 $\boldsymbol{F}_N$ 不做功。由于物块沿表面移动缓慢，故在切线方向受力平衡，物块处在一个动平衡状态，故有

$$F = ks + mg\cos\theta$$

因为 $s = R\theta$，$\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$，$\boldsymbol{F}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 方向一致，得变力 $\boldsymbol{F}$ 做的功

$$W_{BC} = \int_B^C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^{\theta_C} (kR\theta + mg\cos\theta)R\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}kR^2\theta_C^2 + mgR\sin\theta_C$$

4-2 势能

一个静止的物体可以由于它所处的位置而具有能量。在使物体从某一水平高度提高到另一高度时，必须对它做功，物体所在位置的能量增大。在物体下落的过程中，这种能量转化为动能，兰金(W.J.M.Rankine)建议把物体这种储存着的供以后使用的潜在能量称为势能，并得到了普遍的赞同和认可。因此势能这个名称就被沿用下来了。如果我们从守恒的观点来观察问题，势能的概念更是不可缺少的。下面我们从保守力做功的角度引入势能的概念。

1. 保守力

我们以重力做功为例来定义保守力。

设一质量为 m 的物体，在重力 $\boldsymbol{G}$ 的作用下，从 a 点沿任意曲线 acb 运动到 b 点。a 点和 b 点距地面的高度分别为 h_a 和 h_b，如图 4-2 所示。

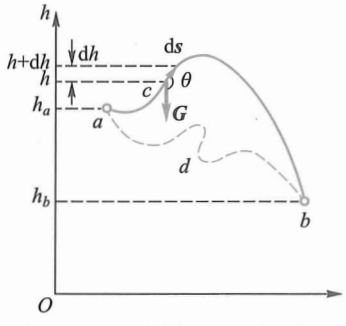


图 4-2 重力做功与路径无关

NOTE

在任意移动位移元 $d\boldsymbol{s}$ 的过程中，重力 $\boldsymbol{G}$ 所做的功为

$$\begin{aligned} dW &= \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{s} = G ds\cos\theta \\ &= mg ds\cos\theta = -mgdh \end{aligned}$$

式中 $dh = ds\cos(\pi-\theta) = -ds\cos\theta$ 是在位移元 $d\boldsymbol{s}$ 中物体上升的高度，故重力做的功为

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \int_{h_a}^{h_b} (-mgdh) \\ &= mgh_a - mgh_b \end{aligned} \tag{4-15}$$

可见，重力做的功只与物体的始末位置（h_a 和 h_b）有关，而与物体经过的路径无关。也就是说，如果物体沿另一路径 adb 从 a 点运动到 b 点，重力所做的功仍与(4-15)式一样，我们把具有这种性质的力称为保守力。

由保守力做功与路径无关可知，保守力沿任意闭合路径绕行一周时所做的功等于零，即

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0 \tag{4-16}$$

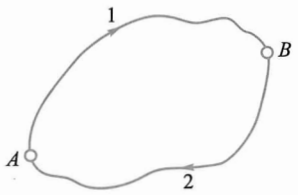


图 4-3 保守力沿闭合路径的功为零

上式中积分符号 $\oint$ 表示沿闭合曲线求积分。为证明(4-16)式，我们把任意一条闭合路径分为两部分：路径 1 表示物体沿它由 A 点到 B 点，路径 2 表示物体沿它由 B 点回到 A 点，如图 4-3 所示，故保守力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{A(1)}^{B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{B(2)}^{A} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{A(1)}^{B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} - \int_{A(2)}^{B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

(4-15)式和(4-16)式都是反映保守力做功特点的数学表达式，这样一来，保守力能用两种方式定义：

(1) 保守力是这样一种力，它所做的功与路径无关，仅与始末位置有关。

(2) 保守力是沿任意闭合路径做功为零的力。

可以证明，上述两种定义是完全等效的。

由上述可知，重力是保守力。此外，还可证明弹性力、万有引力、静电力等也是保守力。然而，并非所有的力都是保守力。例如，摩擦力就是非保守力。在摩擦力阻碍物体运动的情况下，作用于物体上的摩擦力 $\boldsymbol{F}_f$ 总朝着物体位移 $d\boldsymbol{s}$ 的反方向，在每段路径上摩擦力 $\boldsymbol{F}_f$ 的功为负值，即

$$dW = \boldsymbol{F}_f \cdot d\boldsymbol{s} = -F_f ds < 0$$

因此，沿任意闭合路径一周的功也是负的，即不等于零。

2. 势能

NOTE

保守力的特点使得保守力做的功可以表示成位置的函数，即

$$\int_{x_A}^{x_B} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -U(x_A, x_B)$$

其中 x_A、x_B 分别为初、末位置的坐标，可以是任意维度的。我们称 U 为势能，也可用 E_p 表示。这里的负号是特别选定的，使 U 具有能量的性质。显然当 $x_A = x_B$ 时，势能等于零。我们通常隐去 x_A，把 x_B 写成普适的 x，而得到

$$\int_{x_A}^{x} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -U(x_A, x) = -U(x) \tag{4-17}$$

因此

$$U(x_A) = 0$$

我们称 x_A 为势能零点，或者势能参考点。如果我们任意取两点 x_B、x_C，由于

$$\int_{x_A}^{x_B} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{x_B}^{x_C} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{x_C}^{x_A} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

$$= -U(x_B) + \int_{x_B}^{x_C} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + U(x_C)$$

所以

$$\int_{x_B}^{x_C} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = U(x_B) - U(x_C) = -\Delta U \tag{4-18}$$

即保守力做的功等于势能的减少量。对于很小的一段位移，上式可以写成

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\mathrm{d}U = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z$$

最后一个等式可以参见附录中关于矢量点乘的知识。设 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$，得到

$$F_x = -\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right)_{y,z}$$

下标 y、z 表示在对 x 求导时，保持 y、z 不变。在微积分中，这称为偏微分，表示为

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

对于 y、z 方向，可以得到类似的结果。综合以上结果，得到

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} = -\nabla U \tag{4-19}$$

倒三角称为梯度算符，是前面微分的简略写法。(4-19)式是(4-17)式的逆运算，即已知势能可以求出保守力。

势能的具体形式取决于相应保守力的性质，与重力的功相联

NOTE

系的势能称为重力势能。由(4-15)式知,重力势能等于物体的重力 mg 和高度 h 的乘积,即

$$U_{重}=mgh \tag{4-20}$$

其实重力势能是万有引力势能在地球周围的体现形式。万有引力是保守力,按照势能的定义,取无限远处为势能零点,则有

$$U_{引}=\int_{r}^{\infty}-G\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot \mathrm{d}r=-G\frac{m_1m_2}{r}$$

地球表面上方高度为 h 处物体的引力势能为

$$U_{引h}=-G\frac{m_Em}{r}=-G\frac{m_Em}{R+h}$$

取地球表面为势能零点,需减去地表的引力势能,即

$$U_{引表}=-G\frac{m_Em}{R}$$

$$U'_{引h}=U_{引h}-U_{引表}=G\frac{m_Emh}{R(R+h)}\approx G\frac{m_Emh}{R^2}$$

而

$$g=G\frac{m_E}{R^2}$$

$$U'_{引h}=mgh=U_{重}$$

由此可见,重力势能实际上就是势能零点取在地球表面处的引力势能。

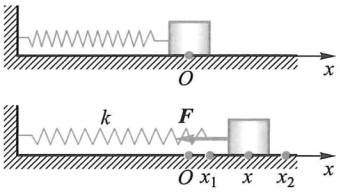


图 4-4 弹性力的功

弹性力是保守力,所以可以引进相应的弹性势能。图 4-4 表示一水平放置在光滑平面上的弹簧,它一端固定,另一端与一质量为 m 的物体相连接。取弹簧未拉长时物体的位置 O 为坐标原点。当物体沿 Ox 轴的正方向从 x_1 拉伸到 x_2 时,弹性力做的功为

$$\begin{aligned}W_{12}&=\int_{x_1}^{x_2}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{x_1}^{x_2}(-kx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2\end{aligned} \tag{4-21}$$

我们把 $\frac{1}{2}kx^2$(去掉下标)称为弹簧的弹性势能,记为

$$U_{弹}=\frac{1}{2}kx^2$$

如果让弹簧从拉伸状态恢复原状,则这时弹性势能就变成了动能。

$U_{弹}=\frac{1}{2}kx^2$ 是弹性势能的普遍的表达式,它不仅适用于弹簧

伸长的情况，也适用于弹簧压缩的情况。弹簧的弹性势能属于整个弹簧。

NOTE

3. 势能的性质

（1）势能属于以保守力相互作用着的整个物体系统。它实质上是一种相互作用能，因此我们不能说单独某物体的势能。例如，当一个物体落向地球时，我们平时常说该物体损失了势能，这是不严格的，实际上是地球和物体组成的系统失去了势能。

（2）势能在大小上只有相对意义。(4-17)式只给出了势能之差，实际上通常我们也只关心势能的差值，所以势能零点的选择是任意的。对于重力势能，我们可以根据需要选择某个方便的水平面上的点作为重力势能的零点；对于弹性势能，通常将势能零点选在弹簧原长处。

（3）势能是位置的函数。例如，当弹簧由于拉伸或压缩而变形时，系统就具有势能。只要弹簧保持上述形变，势能就一直被储存起来；一旦弹簧恢复原状，这个储存着的能量就被释放出来了。弹簧的形变实际上是组成它的原子间相对位置的改变。

（4）势能是与保守力做功有关的概念。对于非保守力做功，不能应用势能的概念。

对于(1)，我们进行如下说明。根据牛顿第三定律，力是成对出现的，是两个物体的相互作用，保守力也不例外。在上一小节，我们只讨论了保守力对一个质点的作用，那么另外一个质点的情况呢？我们考虑一对保守力，分别作用于两个质点 a 和 b. 由保守力的定义，这两个质点分别绕任意两个闭合路径回到出发点，这个过程中所做的功等于零，即

$$\oint \boldsymbol{F}_a \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_a + \oint \boldsymbol{F}_b \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_b = 0 = \oint \boldsymbol{F}_a \cdot \mathrm{d}(\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b) = \oint \boldsymbol{F}_a \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ab} = 0$$

式中，$\boldsymbol{r}_{ab}$ 是两个质点的相对位矢，第三个等式考虑到两个力是一对作用力与反作用力。我们扩展(4-17)式，得到

$$\int_{x_A - x'_A}^{x_B - x'_B} \boldsymbol{F}_a \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ab} = -U(x_A - x'_A, x_B - x'_B)$$

其中，不带撇的 x 是 a 的坐标，带撇的是 b 的坐标。同样隐去参考点，得到

$$\int_{x_A - x'_A}^{x - x'} \boldsymbol{F}_a \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ab} = -U(x_A - x'_A, x - x') = -U(x - x')$$

NOTE

势能只是两个质点相对坐标的函数。显然势能共同属于两个质点。我们将势能纳入系统时，两个质点必须同时属于这个系统。因此只有保守力是内力时，其做的功才能表示成势能的减少。

那么我们在考虑引力势能或重力势能时，为什么只考虑一个质点呢？引力是同时作用于一个质点和地球的。我们把一个质点和地球当成一个系统。考虑开始时，地球和质点相对静止，然后在引力的作用下互相靠近的情况。由动量守恒，得到

$$m_E v_E + mv = 0$$

式中，带下标 E 的是地球的相关物理量，无下标的是质点的相关物理量。因此

$$v_E = -\frac{m}{m_E}v$$

由于引力势能释放，系统获得的动能为

$$\frac{1}{2}m_E v_E^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m_E}v^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{m}{m_E}\right)$$

显然地球获得的动能远远小于质点。考虑到地球的巨大质量，可以忽略地球获得的动能。因而在地球与质点的系统中，往往忽略地球的存在，这对上面考虑的弹性势能依然成立。

4-3 能量守恒定律

1. 机械能守恒定律

在机械运动范围内，机械能是指宏观的动能和势能之和，而把由热运动产生的微观动能和势能排除在机械能概念之外。下面我们就来研究封闭保守系统内的机械能情况。所谓封闭系统是指没有外力作用的系统，所谓保守系统是指系统内所有相互作用力都是保守力的系统。把(4-11)式推广到封闭保守系统，得

$$\sum_i W_i = \sum_i E_{k2i} - \sum_i E_{k1i} \tag{4-22}$$

式中，$\sum_i W_i$ 是封闭保守系统内所有保守力做的功，记为 $W_{保}$；$\sum_i E_{k1i}$ 和 $\sum_i E_{k2i}$ 分别是封闭保守系统内所有物体在始末状态的总动能，记为 E_{k1} 和 E_{k2}。于是，(4-23)式可改写为

$$W_{保}=E_{k2}-E_{k1} \tag{4-23}$$

NOTE

我们知道，系统内保守力的功等于系统势能的减少，即

$$W_{保}=U_1-U_2 \tag{4-24}$$

式中 U_1 和 U_2 分别表示封闭保守系统在始末状态的总势能。把(4-24)式代入(4-23)式得

$$U_1-U_2=E_{k2}-E_{k1}$$

整理后得

$$E_{k1}+U_1=E_{k2}+U_2=E=常量 \tag{4-25}$$

式中 E 表示系统的总机械能。

从(4-25)式我们得出如下结论：

对于一个封闭保守的物体系统，其总机械能保持恒定。

这就是机械能守恒定律。

如果一个系统除保守内力外，还受到外力和非保守内力的作用，由(4-11)式推广可得

$$W_{外}+W_{保守内力}+W_{非保守内力}=E_{k2}-E_{k1}$$

把(4-24)式代入上式得

$$W_{外}+W_{非保守内力}=(E_{k2}+U_2)-(E_{k1}+U_1)=E_2-E_1 \tag{4-26}$$

式中 $W_{外}$ 是系统外力所做的功；$W_{非保守内力}$ 是系统内非保守内力所做的功；E_1 和 E_2 分别表示系统在始末状态的总机械能。

(4-26)式表明，系统机械能的增量等于系统外力和非保守内力对它所做的功，这就是系统的功能定理。

从(4-26)式还可以看到，任意系统机械能守恒的条件是

$$W_{外}+W_{非保守内力}=0 \tag{4-27}$$

尽管一对保守内力所做的功与参考系无关，但外力与非保守内力做的功均与参考系有关，因此机械能守恒定律的应用必须始终在同一参考系内。

2. 能量守恒定律

前面已经介绍了能量的两种形式——动能和势能，它们在一定的条件下守恒。摩擦力是非保守力，摩擦力所做的功既没有转化为势能，又没有转化为动能，但却使系统的总机械能减少，那么摩擦力所做的功到哪里去了呢？经验告诉我们，物体经摩擦后会变热，以后在热学学习中我们将知道，热是能量的一种形式，热能是原子或分子无规则热运动的动能。因此，摩擦力做功所消耗掉的机械能转化为能量的另外一种形式——热能。

NOTE

能量的形式除机械能和热能之外，还有电磁能、化学能、声能和原子能等，这些多种多样的能量可以归为四种相互作用能。这表明能量具有形式上的多样性。

机械能守恒定律是比较普遍的能量守恒定律的一个简单情况。如果系统内存在摩擦力做功时，系统的机械能就会减少，实际上这部分消耗掉的机械能转化为等量的热能，即能量并没有减少，而是从一种形式转化为另一种形式。能量概念的重大价值，就在于转化的守恒性。人们在能量转化问题上进行了大量的研究工作，得到了物理学中一个非常有用的结论：

能量既不能产生，也不能消灭，它只能从一种形式转化为另一种形式，但总能量是恒定不变的。

这就是能量守恒定律。这个结论是从大量实验事实中总结出来的，直到今天，还没有发现与之矛盾的现象，因此它是整个自然界都遵守的普遍规律。

例 2

在半径为 R 的光滑半球面顶点处，一质量为 m 的物体由静止开始下滑，如图 4-5 所示。若半球面固定不动，问：当 θ_c 角为多大时物体开始脱离球面？此时物体的速率 v_c 为多大？

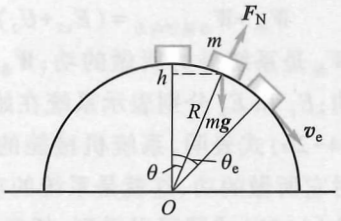


图 4-5 物体从光滑半球面上下滑

解 物体下滑过程中只受重力 mg 和正压力 F_N 的作用。若以物体 m 和地球作为系统，则正压力 F_N 是外力，但不做功，重力 mg 是保守内力，因此系统的机械能守恒。取地面重力势能为零，则在下降高度为 h 的任意位置处有

$$\frac{1}{2}mv^2+mg(R-h)=mgR$$

得

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

物体是否脱离球面与球面对物体的正压力 F_N 有关，而物体在下滑过程中 F_N 是个变力，由牛顿第二定律，有

$$mg\cos\theta-F_N=m\frac{v^2}{R}$$

$$F_N=mg\cos\theta-m\frac{v^2}{R}$$

将 v 值代入上式，有

$$F_N=mg\cos\theta-2mg(1-\cos\theta)=mg(3\cos\theta-2)$$

于是可看出，在物体下滑过程中，随着 θ 角的增大，F_N 值将变小，当 F_N 值减到零时，设此时 $\theta=\theta_c$，$v=v_c$，得

$$mg\cos\theta_c=m\frac{v_c^2}{R}$$

此时重力的法向分量 $mg\cos\theta_c$ 恰好等于物体 m 作半径为 R 的圆周运动时所需的向心力。当物体继续向下滑动时，$\theta>\theta_c$，此时重力的法向分量 $mg\cos\theta$ 不足以提供所需的向心力，物体就脱离球面了，所以 $F_N=0$ 是物体开始脱离球面的条件。于是有

$$F_N=mg(3\cos\theta_c-2)=0$$

解得

$$\cos\theta_c=\frac{2}{3},\quad \theta_c=48°12'$$

此时物体的速率为

$$v_c=\sqrt{2gR(1-\cos\theta_c)}=\sqrt{2gR\left(1-\frac{2}{3}\right)}=\sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

可见，物体开始脱离半球面时的角度 θ_c 与半球面的半径 R 无关；开始脱离半球面时的速率 v_c 与半球面的半径 R 有关，R 越大，则 v_c 越大。

4-4 一维势能曲线

在许多物理问题中，力的表达式是很复杂的，不能用简单的函数关系表示出来，这使力学问题的求解十分困难。在这种情况下，可根据势能曲线图，定性地描述各种类型的运动，因此在物理学中，势能曲线图十分重要。

前面讲过，势能是位置的函数，在一维的情况下，位置可用单一坐标 x 来表示，势能 $U=U(x)$ 只是 x 的函数。图 4-6 是某系统的势能曲线图，从该势能曲线图上我们可以得到下述的信息：

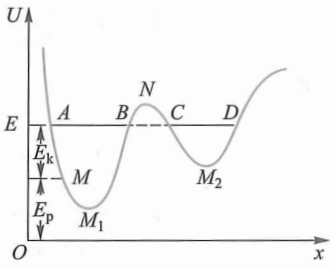


图 4-6 一维势能曲线

（1）如前所述，保守力的功等于势能的减少。将(4-17)式用于一维无限小过程，则该式可写为

$$F\mathrm{d}x=-\mathrm{d}U(x)$$

或者

$$F=-\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\qquad(4\text{-}28)$$

上式表明，保守力 F 的大小等于势能曲线的斜率，力 F 的方向指向势能减少的方向。

（2）在总能量为 E 的封闭保守系统中，用水平直线 E 表示总能量，则物体在某一位置上的动能 $E_k=E-U$ 可以用总能量和物体在曲线上位置的高度差来表示。例如，曲线上某点 M 与水平直线 E 的高度差就表示 M 点处的动能 E_k，而 M 点位置以下的高度则表示该处的势能。从图中可见，动能 E_k 越大，势能 U 越小，反之亦然。这反映了动能和势能相互转化而保持机械能守恒的规律。

NOTE

NOTE

由于动能 E_k 不可能取负值，水平直线 E 低于势能曲线的区间 BC 是具有该能量 E 的物体不可能达到的区间，故在图 4-6 中，这些区间的水平直线用虚线表示。

（3）在势能曲线局部范围内的每个最低点（如图 4-6 中的 M_1 和 M_2），曲线的斜率为零，所以此处力 F 为零，这些点称为稳定平衡点。在势能曲线极小值附近的物体总受到指向平衡点的保守力的作用，它使物体可以围绕稳定平衡点作小振动。

在势能曲线局部范围内的每个最高点（如图 4-6 中的 N 点）都是不稳定平衡点，如果物体稍偏离这一点，保守力就有把它推得更远的倾向。

例 3

双原子分子中两原子间相互作用的势能函数可近似地写成

$$U(x)=\frac{a}{x^{12}}-\frac{b}{x^{6}}$$

式中 a，b 均为正的常量；x 为原子间的距离。问：

（1）x 为何值时，$U(x)$ 等于零？x 为何值时，$U(x)$ 为极小值？

（2）两原子间的力 F 为多少？

解 （1）势能曲线见图 4-7(a)。令

$$U(x)=\frac{a}{x^{12}}-\frac{b}{x^{6}}=0$$

得

$$x^6=\frac{a}{b},\quad x=\sqrt[6]{\frac{a}{b}}$$

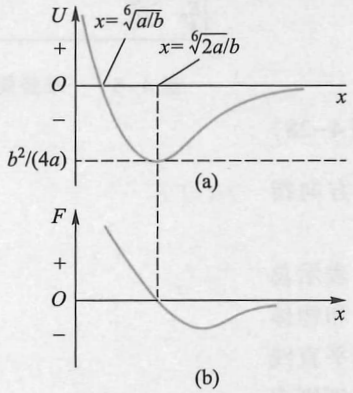


图 4-7 双原子分子中两原子间的（a）势能曲线；（b）力与原子间的距离 x 的关系曲线

此外，$x\to\infty$ 时，$U(x)=0$，故 $x=\infty$ 也是以上方程的解。

$U(x)$ 为极小值时的 x 值可由下式

$$\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}=0$$

求得，

$$-\frac{12a}{x^{13}}+\frac{6b}{x^{7}}=0$$

即

$$x^6=\frac{2a}{b},\quad x=\sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$$

（2）两原子间的力为

$$F=-\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a}{x^{12}}-\frac{b}{x^{6}}\right)=\frac{12a}{x^{13}}-\frac{6b}{x^{7}}$$

图 4-7(b)所示为力 F 与原子间的距离 x 的关系曲线。

本章摘要

NOTE

1. 能量是一个守恒量.能量的形式多样,可在不同能量之间转化,转化时保持数量守恒。

2. 动能是运动状态的函数

质点的动能:$E_k=\frac{1}{2}mv^2$

3. 势能是位置的函数

一维势能公式:$U_P(x)=\int_x^{x_0}F(x)\,\mathrm{d}x$

引力势能:$U_{引}=-G\frac{m_E m}{r}$

重力势能:$U_{重}=mgh$

弹性势能:$U_{弹}=\frac{1}{2}kx^2$

4. 功:$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=F\cos\theta\mathrm{d}s$

5. 保守力是做功与路径无关但与始末位置有关的力。

6. 机械能守恒定律

物体之间仅有保守力作用的封闭系统的机械能守恒,即

$$E=E_k+U=常量$$

对于任意系统机械能守恒的条件是:一切外力和非保守内力所做的总功等于零,即

$$W_{外}+W_{非保守外力}=0$$

7. 一维势能曲线

(1) 力 $\boldsymbol{F}$ 指向势能减少的方向,大小正比于曲线的斜率。

$$F=-\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$$

(2) 物体只能在势能低于机械能的范围内运动。

(3) 势能曲线的极小值对应稳定平衡点,极大值对应不稳定平衡点。

思考题

4-1 判断下列说法是否正确:

(1) 作用力的功恒等于反作用力的功;

(2) 若某种力对物体不做功,则这种力对物体的运动状态不产生影响;

(3) 甲对乙做正功,则乙对甲做负功。

4-2 将一只箱子从地面搬到桌子上,慢慢搬上去所做的功与很快搬上去所做的功是否相同?

4-3 一辆汽车在高速公路上行驶。当司机踩下刹车后，汽车会滑行一段距离才能停住，在这种情况下汽车的动能到哪里去了呢？

4-4 “能量守恒”概念是否与“能量危机”（如要及时熄灯等）一词相矛盾？

4-5 试比较下列规律之间的异同点：

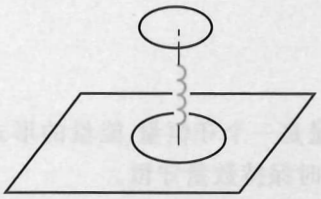
（1）动能定理与动量定理；

（2）功能定理与动能定理。

4-6 如果两个质量不等的物体具有相同的动能，则哪一个物体的动量较大？如果两个质量不等的物体具有相同的动量，则哪一个物体的动能较大？

4-7 保守力的特征是什么？根据这种特征引入的势能函数怎样来量度保守力所做的功？

4-8 用一弹簧将两块圆板连接起来放在桌面上，如图所示，现将上面的圆板尽量向下压（在弹性范围内），然后将它释放。试问：上面的圆板被弹回时，能否将下面的圆板拉离桌面？在这样的情况下，机械能是否守恒？



思考题 4-8 图

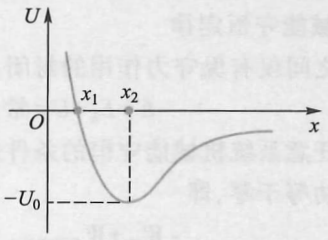
4-9 一汽车以均匀速率 v 沿平直路面前进，车中一人以相对于车厢的速率 u 向上和向前各抛出一质量为 m 的小球。若将参考系选在车上，刚抛出时两球的动能各为多少？若将参考系选在地面上，两球的动能又各是多少？

4-10 一粒子沿 x 轴运动，其势能曲线如图所示。设该粒子所具有的总能量 $E=0$，试问：

（1）该粒子的运动范围为多大？平衡位置在何处？

（2）当粒子处在 x_2 位置时，其动能为多大？

（3）该粒子在什么位置受力最大？



思考题 4-10 图

习题

4-1 一质点在几个力的同时作用下的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}=4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$（m），其中有一恒力 $\boldsymbol{F}=3\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$（N），问该力在此过程中做的功为多少？

4-2 一电梯空载时质量为 516 kg，它设计的最大载客量为 20 人，并能在 18 s 内从底层到达 26 层。假定乘客的平均质量为 71 kg，两楼层之间的距离为 3.5 m，那么该电梯马达的最小功率应为多少？（假设电梯上升时所有的功均来自马达且电梯没有平衡重物，并假设 g 取 10 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$。）

4-3 用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板的深度成正比。在铁锤第一次击打时，能将铁钉击入木板内 1 cm，问第二次击打时能击入多深？（假设打击时铁锤没有回跳，且两次打击时的速度相同。）

4-4 一质量 $m=10$ kg 的物体在合力 $F=3+4x$（SI 单位）的作用下，沿 x 轴运动。设物体开始时静止在坐标原点，求该物体经过 $x=3$ m 处时的速度。

4-5 一质量为 $m=0.3$ kg 的小球与一轻弹簧相连接；轻弹簧的另一端固定，放在光滑的水平面上。若小球运动过程中受到弹簧回复力为 $F=-6x-4x^3$（SI 单位），其中 x 为弹簧的伸长量。

（1）证明此回复力是保守力；

（2）以平衡位置为势能零点，写出势能函数；

（3）先将小球拉到 $x=0.2$ m 处，然后由静止放手，求小球运动到 $x=0.1$ m 处时的速度。

4-6 能较好描述核子（如组成原子核的质子和中子）间相互作用的势能函数（Yukawa 势能）如下：

$$U(r)=-\frac{r_0}{r}U_0\mathrm{e}^{-r/r_0}$$

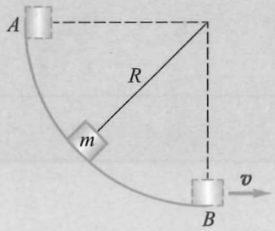
其中常量 $r_0=1.5\times10^{-15}$ m，U_0 约为 50 MeV。

（1）试求相应的相互作用力表达式；

（2）计算 $r=2r_0$，$4r_0$，$10r_0$ 处的力相对于 $r=r_0$ 处的力的比值。（可以发现这种力是一种短程力）

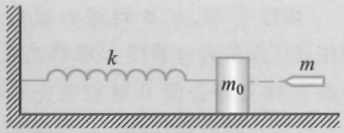
4-7 一竖直悬挂的弹簧（弹性系数为 k）下端挂一物体，平衡时弹簧已有一定伸长量。若以物体的平衡位置为竖直 y 轴的原点，并作为弹性势能和重力势能的零点。试证明：物体的位置坐标为 y 时，其弹性势能和重力势能之和为 $\frac{1}{2}ky^2$。

4-8 如图所示，质量为 $m=2$ kg 的物体从静止开始，沿着 1/4 圆周，从 A 点滑到 B 点。在 B 点处物体的速度为 $v=6$ m/s。已知圆的半径为 $R=4$ m，求物体从 A 滑到 B 过程中摩擦力所做的功。



习题 4-8 图

4-9 测子弹速度的方法如图所示。已知子弹质量为 0.02 kg，木块质量为 8.98 kg，弹簧的弹性系数为 100 N/m；子弹射入木块后，弹簧被压缩了 0.10 m，求子弹的速度。设木块与平面间摩擦因数为 0.2。



习题 4-9 图

4-10 在光滑水平面上放置一静止木块，木块质量为 m_0。一质量为 m 的子弹以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿水平方向射入木块，然后与木块一起运动，如图所示，试求：

（1）木块施于子弹的力所做的功；

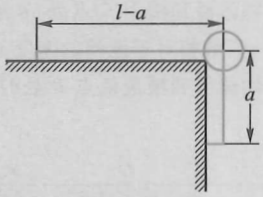
（2）子弹施于木块的力所做的功；

（3）碰撞过程中所损耗的机械能。



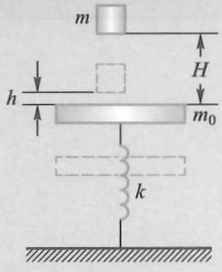
习题 4-10 图

4-11 如图所示，一质量为 m、长为 l 的均匀链条放在桌面上，桌面与链条间的摩擦因数为 μ。当链条通过桌面边缘处一个光滑铁环而下垂长度为 a 时，由静止开始下滑，求链条刚好全部从桌面上经铁环滑下时的速度。



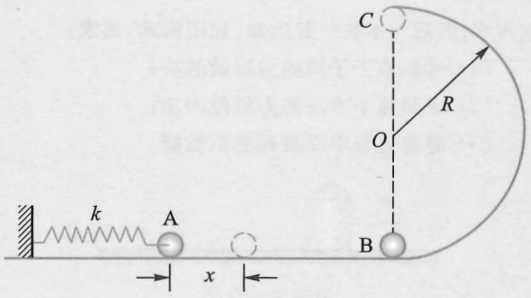
习题 4-11 图

4-12 质量为 m 的物体在离平板高度为 H 处自由下落，打在平板上，弹起高度为 h。平板质量为 m_0，置于弹性系数为 k 的弹簧上，如图所示，求弹簧的最大压缩量（设碰撞时间很短）。



习题 4-12 图

4-13 如图所示，A，B 两球的质量均为 $m=0.1$ kg。现用已压缩的轻弹簧将 A 球沿光滑水平面弹射出去，接着 A 球与静止的 B 球发生完全非弹性碰撞，然后沿光滑竖直圆轨道运动。设弹簧的弹性系数 $k=196$ N/m，圆轨道半径 $R=0.1$ m。试问弹簧压缩量至少要为多少后弹射 A 球，才能使两球碰撞后能沿着圆轨道通过顶点 C？

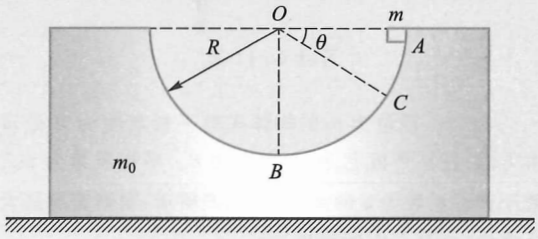


习题 4-13 图

4-14 质量为 m 的小物体沿半径为 R、质量为 m_0 的半圆形光滑槽从最高点滑下。槽被放置在光滑的水平桌面上。开始时槽和小物体都静止，如图所示。试求：

（1）当小物体滑到槽中 C 点处（θ 角）时，小物体相对槽的速度 $\boldsymbol{v}'$、槽相对于地面的速度 $\boldsymbol{v}$；

（2）当小物体滑到槽最低点 B 处时，槽相对地面移动的距离。



习题 4-14 图

4-15 一辆 2 500 kg 的卡车在水平面上以 30 m/s 的速度行驶，现突然推入空挡（即进行滑行），于是速度按下列规律变化：

$$v=\frac{30}{1+\frac{t}{30}}\ \text{m/s}$$

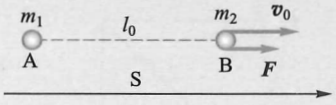
其中 t 以 s 作为单位。求在这条路上以 15 m/s 的速度驱动该卡车所需要的功率。

4-16 平直铁轨上停着一节质量为 $m_0=20m$ 的车厢，车厢与铁轨间的摩擦可忽略。有若干名学生列队前行，教师押后，假设每名学生的质量均为 m。当学生与教师看到前面的车厢时，都以相同速度 $\boldsymbol{v}_0$ 跑步，每名学生在接近车厢时又以 $2\boldsymbol{v}_0$ 速度跑步上车并坐下，教师却因跑步速度没有改变而恰好未能上车。据此可知，学生人数为多少？上述过程中，由教师、学生和车厢构成的系统，其总动能损失量为多大？

4-17 在某惯性系 S 中有两个质点 A 和 B，质量分别为 m_1 和 m_2，假设它们只受彼此间的万有引力作用。开始时两个质点相距 l_0，质点 A 静止，质点 B 沿连线方向的初速为 $\boldsymbol{v}_0$（$v_0<\sqrt{2Gm_2/l_0}$，G 为引力常量）。为使质点 B 保持速度 v_0 不变，可对质点 B 沿连线方向施加一变力 $\boldsymbol{F}$，如图所示。试求：

（1）两个质点的最大间距及间距为最大时的 F 值；

（2）从开始时刻到间距最大的过程中变力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功（相对惯性系 S）。



习题 4-17 图

习题答案

第五章　角动量　角动量守恒定律

角动量的概念是在研究物体的转动问题时引入的。一个封闭系统的角动量与动量和能量一样，是一个守恒量。因此，角动量守恒定律是一个与动量守恒定律和能量守恒定律并列的守恒定律。借助于角动量守恒定律，可以使许多物理问题的描述和分析大为简化，因此，角动量是一个基本的物理量，它在现代物理学中的意义远远超过了它在经典力学中的地位。

NOTE

5-1　角动量

在第三章和第四章里，我们分别介绍了两个守恒量——动量和能量，其中动量是与平动相联系的守恒量，现在我们来介绍与转动相联系的守恒量——角动量。角动量的概念和数学表达式要比动量难以理解和复杂，为此，我们采取循序渐进的办法，就单个质点这一特殊情况来定义角动量。



本章补充资源

设有一个质量为 m 的质点，该质点相对于参考点 O 的径矢为 $\boldsymbol{r}$，速度为 $\boldsymbol{v}$，即具有动量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$，并设该质点受外力 $\boldsymbol{F}$ 作用。如图 5-1 所示，质点 m 的运动方程为

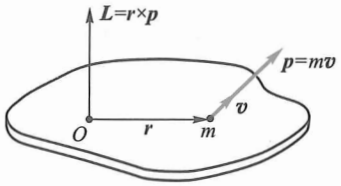


图 5-1　单个质点的角动量

$$\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{5-1}$$

首先，用质点 m 的径矢 $\boldsymbol{r}$ 与方程(5-1)式作矢积，可得

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=m\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{5-2}$$

根据矢量的矢积导数公式有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{5-3}$$

把(5-3)式中的关系式代入(5-2)式，我们得到方程

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) \tag{5-4}$$

在经典力学中，质量是不变的标量，所以它可放入对时间求

NOTE

导的括号内，于是(5-4)式变为

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) \tag{5-5}$$

若质点所受外力 $\boldsymbol{F}$ 为零，则(5-5)式的等式左边部分为零，于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=\boldsymbol{0}$$

则量

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{5-6}$$

保持恒定，是一个守恒量，我们把 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 称为相对于参考点 O 的角动量。若我们研究的是一个系统，则系统中所有质点的角动量的矢量和称为系统相对参考点 O 的角动量，可由下式给出

$$\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{L}_i=\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i) \tag{5-7}$$

质点角动量(5-6)式在通过参考点 O 的 z 轴上的分量称为质点对 z 轴的角动量

$$L_z=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_{z\text{分量}} \tag{5-8}$$

类似地有

$$L_z=\sum_i L_{iz}=\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i)_{z\text{分量}} \tag{5-9}$$

称为系统对 z 轴的角动量

必须指出，质点的角动量与参考点 O 的选择有关，因此，在讲述质点的角动量时，必须指出是相对于哪一点的角动量，以便确定质点的径矢 $\boldsymbol{r}$。

在 SI 中，角动量的单位为 kg·m²/s。下面，我们研究两个有代表性的例子。

(1) 一个质点沿图 5-2 中用虚线描绘的直线运动。在这种情况下，质点相对于 O 点的角动量只能有量值的改变，而方向不变，其大小为

$$L=mvr\sin\theta \tag{5-10}$$

方向始终垂直纸面向里。

(2) 质量为 m 的质点沿半径为 R 的圆周运动(图 5-3)，它相对于圆心 O 的角动量大小为

$$L=mvR \tag{5-11}$$

角动量 $\boldsymbol{L}$ 的方向垂直于圆平面向上，质点运动方向与角动量 $\boldsymbol{L}$ 的方向符合右手螺旋定则。由于 R 是常量，角动量的大小仅随速度大小的改变而改变。在质点作匀速圆周运动的情况下，角动量的大小和方向都不变。

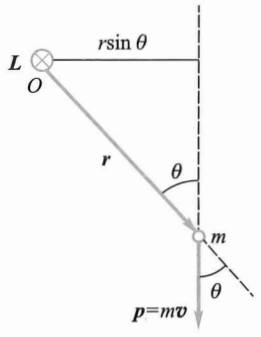


图 5-2 质点作直线运动时的角动量

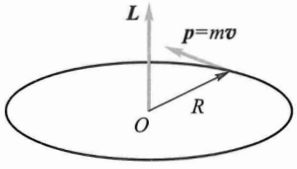


图 5-3 质点作圆周运动时的角动量

例 1

玻尔氢原子理论中，有一个假设是电子绕核运动时，只有电子的轨道角动量满足 $L=n\dfrac{h}{2\pi}(n=1,2,3,\cdots)$ 的那些轨道才是稳定的。已知氢原子处于 $n=1$ 的基态，电子作圆周运动的半径为 $r_1=5.29\times10^{-11}$ m，式中普朗克常量 $h=6.63\times10^{-34}$ kg·m²/s。求电子在此轨道上运动时的速度大小。

解 由轨道角动量定义 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}_1\times m\boldsymbol{v}$，得轨道角动量的大小为

$$L=mvr_1=\frac{h}{2\pi}$$

代入数值得

$$v=\frac{h}{2\pi mr_1}=\frac{6.63\times10^{-34}}{2\pi\times9.1\times10^{-31}\times5.29\times10^{-11}}\ \text{m/s}$$

$$=2.2\times10^{6}\ \text{m/s}$$

在经典物理学中，角动量的值是连续的；但在近代物理中，角动量只能取一些确定的不连续的数值，即角动量是量子化的。

5-2 角动量守恒定律

1. 力矩

在研究物体转动运动时，其转动改变的快慢不仅与作用力的大小有关，而且与力的作用点和力的方向有关。下面就在惯性参考系中观察单个质点这一特殊情况来定义力矩，以后再将力矩概念推广到质点系（包括刚体）中去。

设力 $\boldsymbol{F}$ 作用在一质点上，这质点相对于惯性参考系中某一固定参考点 O 的位置由径矢 $\boldsymbol{r}$ 给定，如图 5-4 所示。我们定义作用在质点上的力 $\boldsymbol{F}$ 对参考点 O 的力矩为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{5-12}$$

力矩是矢量，它的大小为

$$M=rF\sin\theta \tag{5-13}$$

力矩的方向垂直于径矢 $\boldsymbol{r}$ 和力 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面，其指向用右手螺旋定则确定。

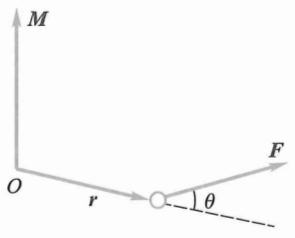


图 5-4 力矩的定义

当一个质点受到几个力矩的作用时，质点受到的合力矩应是各力矩的矢量和

NOTE

$$\boldsymbol{M}=\sum_i \boldsymbol{M}_i \tag{5-14}$$

此式称为力矩的叠加原理。

力矩 $\boldsymbol{M}$ 表征力 $\boldsymbol{F}$ 使物体绕参考点 O（相对于该点取矩）转动发生改变的能力。

在 SI 中，力矩的单位是 N · m。

2. 角动量守恒定律

根据力矩和质点角动量的定义式，(5-5)式可以写成

$$\boldsymbol{M}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \tag{5-15}$$

上式表明，作用于质点上的力对参考点 O 的合力矩等于质点对该参考点 O 的角动量随时间的变化率。这与牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$ 在形式上是相似的。

如果质点所受合力矩为零，即 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$，则有

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\text{常矢量} \tag{5-16}$$

上式表明，当作用在质点上的力相对于参考点 O 的力矩为零时，则质点相对于该参考点 O 的角动量保持恒定。这就是质点的角动量守恒定律。

现在考虑质点系的问题。质点系内每个质点所受到的力都可以分成内力和外力两种。系统内质点相互作用的内力对参考点 O 的力矩称为内力矩，外力对 O 点的力矩称为外力矩。由于质点间相互作用的内力大小相等，方向相反，且沿同一直线，它们相对于任一参考点 O 的力矩，数值上相等，但方向相反，因而，内力矩总是成对地彼此平衡。所以，对任何质点系，所有内力矩之和总是等于零，即

$$\sum_i \boldsymbol{M}_{i内}=\boldsymbol{0} \tag{5-17}$$

根据系统角动量的表达式(5-7)式和合力矩的表达式(5-14)式，我们可以把(5-15)式推广到任意质点系，则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \boldsymbol{M}_{i外} \tag{5-18}$$

式中 $\boldsymbol{L}$ 是质点系的角动量，$\sum_i \boldsymbol{M}_{i外}$ 是质点系的合外力矩。

NOTE

(5-18)式表明:质点系相对于惯性参考系中某一固定参考点 O 的总角动量随时间的变化率等于作用在质点系上的外力相对于该点的力矩的矢量和。这就是质点系的角动量定理。

如果系统所受的合外力矩 $\sum_i \boldsymbol{M}_{i外}=\boldsymbol{0}$,则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{0}$$

或

$$\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{L}_i=\text{常量} \tag{5-19}$$

(5-19)式指出:对于一个非封闭的质点系统,在合外力矩等于零的条件下,其总角动量也保持恒定。这就是质点系的角动量守恒定律。

例 2

一个质量为 m 的质点沿 $\overrightarrow{AB}$ 直线作匀速直线运动,如图 5-5 所示,试证 $\boldsymbol{L}_A=\boldsymbol{L}_B$。

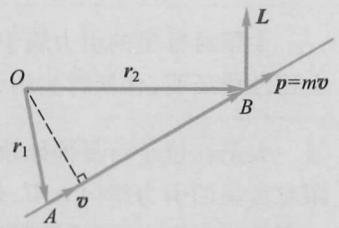


图 5-5 作匀速直线运动的质点相对 O 点具有恒定的角动量

解 由于质点 m 作匀速直线运动,不受外力作用,所以角动量守恒。质点在 A 点时的角动量 $\boldsymbol{L}_A=\boldsymbol{r}_1\times m\boldsymbol{v}$,在 B 点时角动量 $\boldsymbol{L}_B=\boldsymbol{r}_2\times m\boldsymbol{v}$,因 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$,且与 $\boldsymbol{v}$ 平行,$\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$,故

$$\boldsymbol{L}_B-\boldsymbol{L}_A=\boldsymbol{r}_2\times m\boldsymbol{v}-\boldsymbol{r}_1\times m\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times m\boldsymbol{v}$$
$$=\overrightarrow{AB}\times m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

实际上,质点作匀速直线运动时,动量 $m\boldsymbol{v}$ 是常量,径矢从 $\boldsymbol{r}_1$ 变到 $\boldsymbol{r}_2$,其方向和大小都改变,但是与 $\boldsymbol{v}$ 成直角的方向上的垂直分量 $\boldsymbol{r}_\perp$(称为力臂)保持不变,所以质点 m 的角动量 $\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$ 是常量。

3. 有心力与角动量守恒

自然界中有些力具有这样的性质:力的方向始终通过某一固定点,力的大小仅依赖于质点与这个点之间的距离。我们称这样的力为有心力,相应的固定点称为力心。例如,静电作用力是有心力,其力心是产生静电场的点电荷(力源)所在处;万有引力是

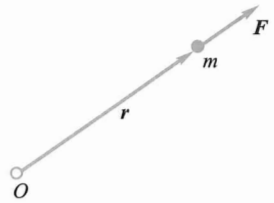


图 5-6 有心力为排斥力的情况

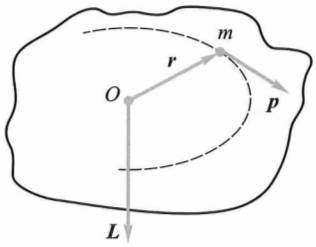


图 5-7 力场力心 O、径矢 $\boldsymbol{r}$ 及运动轨迹处在同一平面内

有心力，其力心是质点（力源）的所在处。能够产生有心力的力场称为有心力场。容易设想，若有心力为吸引力，其方向与径矢相反；若有心力为排斥力，其方向与径矢同向。图 5-6 给出有心力排斥质点的情况，其坐标原点 O（径矢 $\boldsymbol{r}$ 的起始点）置于有心力场的力心。显然，有心力对力心 O 点的力矩等于零，即 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，这是因为力臂等于零。于是可得出结论：在有心力作用下运动的质点，其对力心 O 的角动量守恒。角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 在任何时刻都垂直于由 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 构成的平面。若 $\boldsymbol{L}$ 等于常量，这个平面将是固定的，这样，当质点在有心力作用下运动时，其径矢 $\boldsymbol{r}$ 始终位于某一平面内，动量 $\boldsymbol{p}$ 也始终位于这个平面内，因此质点的运动轨迹是平面曲线。轨迹所在的平面通过有心力场的力心，如图 5-7 所示。因此，在有心力作用下运动的问题可认为是一个平面问题。

例 3

太阳对行星的引力属于有心力，太阳系中八大行星绕太阳运行时的角动量守恒。试用上述性质证明，任何行星到太阳的径矢在相等的时间内扫过相等的面积。

解 太阳在位于行星椭圆轨道的焦点上，太阳对行星的引力指向太阳，是有心力。因引力不产生力矩，行星沿椭圆轨道绕太阳运行保持角动量守恒。如图 5-8 所示，设在 t 时刻，行星位于 A 点；在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻，行星位于 B 点；在 $\mathrm{d}t$ 时间间隔内，太阳到行星的径矢 $\boldsymbol{r}$ 扫过的阴影面积为 $\mathrm{d}S$。由于 $\mathrm{d}t$ 很小，所以 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $v\mathrm{d}t$ 可认为重合，因此这个面积等于由 $\boldsymbol{r}$ 与矢量 $\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ 组成的平行四边形的面积的一半；而这个平行四边形的面积等于矢积 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ 的模（参见矢积的性质），因此阴影面积为

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}t|=\frac{1}{2m}|\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2m}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}|\,\mathrm{d}t=\frac{L}{2m}\mathrm{d}t$$

将上式两边除以 $\mathrm{d}t$，得

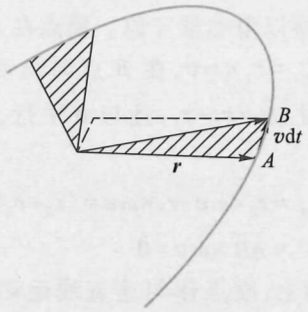


图 5-8 行星绕太阳运行时，在 $\mathrm{d}t$ 时间内径矢 $\boldsymbol{r}$ 扫过的面积相等

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{L}{2m}=\text{常量}$$

量 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 是行星径矢在单位时间内扫过的面积，角动量 L 是常量，所以行星的掠面速度 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 保持恒定。这就是开普勒行星运动第二定律。

5-3 对称性与守恒定律

NOTE

在封闭系统中，存在诸如动量、能量和角动量这样的函数，它们是构成系统的质点的坐标和速度的函数，都具有可加性，在运动过程中保持恒定数值。现在我们已经清楚，动量、能量和角动量这三个物理量是一个封闭系统的守恒量，相应地有三个守恒定律，即动量守恒定律、能量守恒定律和角动量守恒定律。现代物理学告诉我们，守恒定律和对称性有着密切的关系，守恒定律源于对称性。这是物理学的一个重要进展。当我们用现代物理观点重新审视牛顿力学时发现，牛顿理论中已经隐含着这些思想。我们阐述它们之间的关联，是为了与现代物理更好地接轨。

1. 什么是对称性？

对称性的概念起源于日常生活中的经验常识。如左右对称的物体都具有一个对称面，将物体分成左右两个部分，树叶、蝴蝶及古建筑等都属于左右对称的物体，除了左右对称，还有轴对称、球对称等。

德国著名的数学家和物理学家魏尔(H.Weyl)首先提出了关于对称性的普遍定义：

如果一个操作体系从一个状态变换到另一个等价的状态，我们就说这体系对于这一操作是对称的，而这个操作称为该体系的对称操作。

最常见的对称操作是时空对称操作，空间平移、转动、镜像反射等属于空间对称操作。例如，一个世界在平面镜里有一个相应的世界与其对应。这两个世界很相似，但也稍有不同：这两个世界左右互换了。镜面里的世界就是真实世界通过镜像操作(宇称)而获得的。如果真实世界里的所有规律在镜面世界中都是成立的，那么镜像操作(宇称)就是我们世界的一种对称性[①]。时间平移、时间反演等属于时间对称操作。例如，在电影里，我们把拍

① 从表观看，镜像世界是不真实的，因为那里有一个左右互换的你，而现实世界里你没有这样的伙伴。物理学家关心的是镜像世界发生的一切是否符合物理规律。例如，一颗旋转的子弹射向镜面，其旋转方向是顺时针的，因此子弹的旋转方向与前进方向的关系满足右手定则。在镜面中，子弹向外飞去，在境外的你看来子弹的旋转依然是沿顺时针方向的，因此旋转方向与前进方向的关系满足左手定则。如果镜像对称性是真实的，那么有一颗满足右手定则的子弹，必然就有一颗满足左手定则的子弹。如果把子弹换成一种“基本粒子”，结论也应该成立。而实验告诉我们，这不是真实的。因此镜像对称性不是真实的对称性。为此李政道和杨振宁获得 1957 年诺贝尔物理学奖。同样时间反演也不是真实的对称性。

NOTE

好的电影胶卷倒过来放映，使时间倒流，这就是时间反演，属于时间对称操作。

2. 不变性

上面我们已经将对称性与某种对称操作下的不变性联系起来了。在物理学中，物理定律的对称性是指经过一定的对称操作后，物理定律的形式保持不变，因此，物理定律的对称性又叫不变性。今后在讨论对称性时，要注意区分两类不同性质的对称性：一类是物体的对称性，如圆柱体具有轴对称性；另一类是物理定律的对称性，如牛顿运动定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 具有伽利略变换不变性。

我们在一个实验室中做一个物理实验，然后将实验装置平移到另一个实验室，在外部条件相同的情况下做同一个实验。两次实验结果是相同的，说明物理定律没有因平移而发生变化，这就是物理定律的空间平移不变性。它表明空间各处对物理定律是一样的，我们称之为空间的均匀性。

如果在一个实验室做实验，不管实验装置朝什么方向放置，在同样的外部条件下，所得到的实验结果相同，说明空间各个方向对物理定律是一样的，这就是物理定律的空间转动不变性，我们也称之为空间的各向同性。

如果我们在先后两个不同的时间里，在同样的外部条件下用同样的实验装置做同一个实验，所得的实验结果相同，说明物理定律不随时间变化而改变，这就是物理定律的时间平移不变性。

显然这三个不变性是人类从事科学研究时所默认的。没有时间不变性，人类的知识就无法继承；没有空间的平移不变性、旋转不变性，不同人的实验结果就可能不同，无法互相验证。然而这三个不变性依然是假说，它们或许只在较短的时间差、空间差内成立。放眼整个宇宙，也许会有新的发现。在实验证伪这三个不变性之前，我们依然认为它们是正确的。

3. 对称性和守恒定律

令人惊异的是，时空的上述性质各自与一个守恒定律密切相关，下面我们分别加以讨论。

(1) 空间平移不变性与动量守恒定律

空间平移不变性(即空间均匀性)导致动量守恒定律。我们

可用下例来说明[①]。为了简便,考虑一维的情况。

设两质点相互作用的封闭系统沿 x 方向运动,开始时两质点的位置分别为 x_1 和 x_2,两质点之间的距离为 $\Delta x=x_2-x_1$,系统的势能为 $U(x_1,x_2)$[②];当系统沿 x 方向平移 x_0 时[③],两质点的位置分别变为 $x_1'=x_1+x_0$,$x_2'=x_2+x_0$,但两质点间的相对位置保持不变,仍为 $\Delta x=x_2'-x_1'=x_2-x_1$。显然,这种空间对称操作体现了物理定律的空间平移不变性,由平移不变性的含义可知,平移前后的势能保持不变,这说明两质点的相互作用势能仅与两质点的相对位置 Δx 有关,即

$$U=U(x_1,x_2)=U(x_1',x_2')=U(\Delta x) \tag{5-20}$$

于是,得到质点 1 受到的力为

$$F_1=-\frac{\partial U}{\partial x_1}=-\frac{\mathrm{d}U(\Delta x)}{\mathrm{d}(\Delta x)}\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x_1}=\frac{\mathrm{d}U(\Delta x)}{\mathrm{d}(\Delta x)} \tag{5-21}$$

质点 2 受到的力为

$$F_2=-\frac{\partial U}{\partial x_2}=-\frac{\mathrm{d}U(\Delta x)}{\mathrm{d}(\Delta x)}\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x_2}=-\frac{\mathrm{d}U(\Delta x)}{\mathrm{d}(\Delta x)} \tag{5-22}$$

由(5-21)式和(5-22)式可得

$$F_1+F_2=0 \tag{5-23}$$

由牛顿第二定律可得

$$\boldsymbol{F}_1=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t},\quad \boldsymbol{F}_2=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t}$$

代入(5-23)式可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)}{\mathrm{d}t}=0$$

即

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\text{常量}$$

这就是两质点相互作用的封闭系统中的动量守恒定律。

(2) 时间平移不变性与能量守恒定律

时间平移不变性导致能量守恒。仍可用两质点相互作用的封闭系统作为例子来说明。为简便,还是考虑一维的情况。

物理定律的时间平移不变性的含义告诉我们,系统在空间位置不变的情况下,在两个不同的时间 t_1 和 t_2,系统的势能保持不变,即

$$U(x_1,x_2,t_1)=U(x_1,x_2,t_2)=U(x_1,x_2) \tag{5-24}$$

---

① 我们这里只考虑质点系。后面的章节会告诉我们,真实的世界不光有质点,还有场这样的物质。

② 我们这里假定,两个质点之间的力都是保守力。

③ 等价的操作是将坐标原点向后移动 x_0。

NOTE

式中 x_1 和 x_2 表示两质点在空间的位置。对于两质点的封闭系统，其总机械能为

$$E = E_k + U = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) + U$$

于是有

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}m_i v_i^2 + U\right) = \sum_{i=1}^{2} m_i v_i \frac{dv_i}{dt} + \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\frac{dx_i}{dt}\left(m_i\frac{dv_i}{dt} - F_i\right) = \sum_{i=1}^{2}\frac{dx_i}{dt}(F_i - F_i) = 0 \qquad (5-25)$$

式中 $F_i = m_i\dfrac{dv_i}{dt}$ 是系统内另一质点对 m_i 的作用力，为保守内力。因系统势能 $U = U(x_1, x_2)$ 仅是位置的函数，所以 $F_i = -\dfrac{\partial U}{\partial x_i}$ 也是系统内质点 m_i 受到的保守内力，因此(5-25)式中括号内为零。

(5-25)式表明，对于两质点相互作用的封闭系统，由于具有时间平移不变性，即 $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0$，所以系统的机械能守恒。这就建立了时间平移不变性和系统能量守恒定律之间的重要联系。

(3) 空间转动不变性与角动量守恒定律

物理定律的空间转动不变性(即空间的各向同性)是角动量守恒的基础，其含义是一个封闭系统的整体转动不影响其力学规律。我们可用与前面类似的方法证明空间各向同性与角动量守恒定律的联系，这里就不再加以论述了。

5-4 天体运动

1. 行星运动与开普勒三定律

实验观测表明，所有行星的运动都遵守开普勒三定律，即：

(1) 所有行星都沿着椭圆轨道绕太阳运行，太阳位于椭圆的一个焦点上(轨道定律)。

(2) 任何行星到太阳的径矢在相等的时间内扫过相等的面积(面积定律)。

(3) 所有行星绕太阳运动的椭圆轨道半长轴 a 的立方与周

期 T 的平方成正比，其比值是与行星性质无关的常量，即 $\frac{a^3}{T^2}=K$（周期定律）。

以太阳为参照物，利用这些定律可以很简单地描述出行星的运动，行星在太阳系中运动时遵守角动量守恒定律。牛顿还由开普勒三定律推出了万有引力定律。

NOTE

2. 人造天体与三个宇宙速度

人造天体的发射及运动均与三个宇宙速度有关。

（1）第一宇宙速度——人造地球卫星

$$m\frac{v^2}{R_E}=\frac{Gm_Em}{R_E^2},\quad g=\frac{Gm_E}{R_E^2}$$

环绕地球运动的速度：$v_1=\sqrt{gR_E}=7.9\ \text{km/s}$

（2）第二宇宙速度——人造行星

$$\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{m_Em}{R_E}=0$$

离开地球运动的速度：$v_2=\sqrt{2gR_E}=11.2\ \text{km/s}$

（3）第三宇宙速度——太空飞行器

$$v_{地日}=\sqrt{\frac{Gm_S}{R_{SE}}}=29.8\ \text{km/s},\quad v_2'=\sqrt{\frac{2Gm_S}{R_{SE}}}=42.1\ \text{km/s}$$

$$\frac{1}{2}mv_3^2-\frac{Gm_Em}{R_E}=\frac{1}{2}m\left(v_2'-v_{地日}\right)^2$$

离开太阳运动的速度：$v_3=16.7\ \text{km/s}$

本章摘要

1. 角动量

质点的角动量：$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$

质点系的角动量：$\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i$

2. 力矩

质点的力矩：$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$

NOTE

质点系的力矩：$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_{外}=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{i外}$

3. 角动量定理的数学表达式

$$\boldsymbol{M}_{外}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$$

4. 角动量守恒定律

$$若\sum_i \boldsymbol{M}_{i外}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{L}_i=常量$$

5. 对称性与守恒律

空间平移不变性(空间均匀性)——动量守恒定律。

时间平移不变性——能量守恒定律。

空间转动不变性(空间各向同性)——角动量守恒定律。

6. 天体运动

行星运动与开普勒三定律。

人造天体与三个宇宙速度。

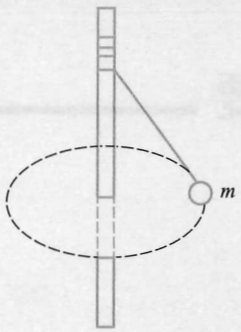
思考题

5-1 角动量主要是用于描述物体的什么运动特性？它的大小与所选的参考系有何关系？

5-2 试分析下列说法是否正确：

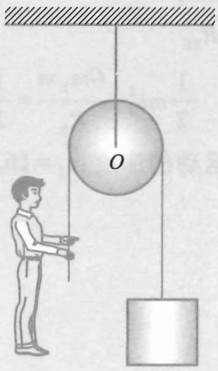
“质点的动量为零，则质点的角动量也一定为零；质点的角动量为零，则质点的动量也一定为零。”

5-3 如图所示，小球 m 在细线的约束下绕竖直细杆在水平面内旋转，因而使细线逐渐绕在细杆上，细线越来越短，但小球的角速度将逐渐增加，试解释此现象。



思考题 5-3 图

5-4 如图所示，一轻绳跨过定滑轮，绳的一端吊一重物，另一端有一人由静止开始沿绳往上爬。设人和重物质量相等，若滑轮质量可以忽略，人与重物组成系统的动量守恒吗？系统对定滑轮轴的角动量守恒吗？



思考题 5-4 图

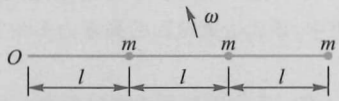
5-5 自然界中对称性和守恒定律之间有何联系？试举例说明。

习题

5-1 如图所示，用轻绳将三个质量均为 m 的质点连接起来并系在固定点 O 上，然后使这一系统以角速度 ω 绕固定点 O 转动，转动中三个质点均保持在一条直线上。问：

（1）中间质点相对于固定点 O 的角动量的大小为多少？

（2）三个质点相对于固定点 O 的总角动量的大小为多少？



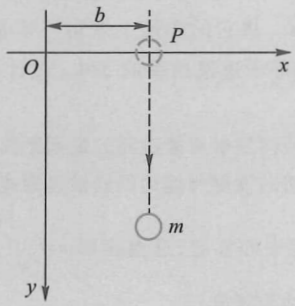
习题 5-1 图

5-2 一个质量为 m 的质点从 P 点由静止开始沿 y 轴自由下落，如图所示，以原点 O 为参考点。

（1）求任意时刻作用在 m 上的力矩 $\boldsymbol{M}$；

（2）求任意时刻 m 的角动量 $\boldsymbol{L}$；

（3）证明本题中 $\boldsymbol{M}=\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$。

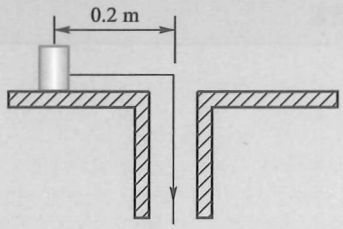


习题 5-2 图

5-3 如图所示，质量为 0.05 kg 的物体置于一无摩擦的水平桌面上。有一绳连接此物体并使绳穿过桌面中心的小孔；该物体原以 3 rad/s 的角速度在距孔 0.2 m 的圆周上转动。现将绳从小孔往下拉，使物体的转动半径减为 0.1 m（该物体可视为质点），求：

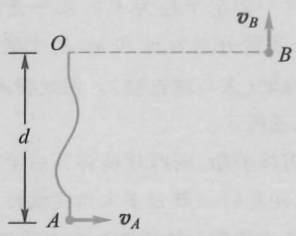
（1）拉下后物体的角速度（圆周运动中 $v=\omega r$，ω 为角速度）；

（2）拉力做的功。



习题 5-3 图

5-4 如图所示，在光滑的水平面上有一长 $L=2$ m 的绳子，一端固定于 O 点，另一端系一质量 $m=0.5$ kg 的物体。开始时，物体位于位置 A 处，O，A 间的距离 $d=0.5$ m，绳子处于松弛状态。现在使物体以与 OA 相垂直的初速度 $v_A=4$ m/s 向右运动，到达位置 B 时物体速度的方向与绳垂直，试求物体在 B 处的角动量和角速度。



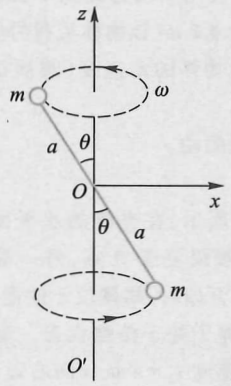
习题 5-4 图

5-5 已知地球质量为 $m_1=5.98\times10^{24}$ kg，它与太阳的平均距离约为 $r_1=1.50\times10^{11}$ m，绕太阳的公转周期约为 $T_1=3.16\times10^{7}$ s；电子的质量为 $m_2=9.11\times10^{-31}$ kg，它到氢原子核的平均距离为 $r_2=5.29\times10^{-11}$ m，其轨道运动的角速度 $\omega_2=4.13\times10^{16}$ rad/s。假设它们的运动轨道均为圆形，试计算地球绕太阳运动的角动量，以及经典图像中电子绕氢原子核运动的角动量。

5-6 地球在远日点时，它与太阳的距离为 $r_{max}=1.52\times10^{11}$ m，运动速率 $v_1=2.93\times10^{4}$ m/s，试问：半年之后，当地球处在距离太阳为 $r_{min}=1.47\times10^{11}$ m 的近日点时，运动速率 v_2 为多大？上述两种情况下地球绕太阳运动的角速度 ω_1 和 ω_2 分别多大？

5-7 两个质量均为 m 的质点用一根长为 $2a$、质量可以忽略不计的轻杆相连，构成一个简单的质点组。如图所示，两质点绕固定轴 $O'z$ 以匀角速度 ω 转

动，轴线通过杆的中点 O 与杆的夹角为 θ，求质点组对 O 点的角动量的大小及方向。

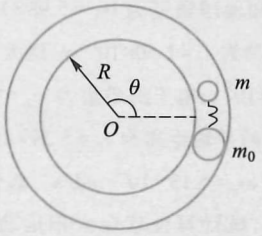


习题 5-7 图

5-8 在一固定半径为 R 的水平光滑圆形沟槽内，放有两个质量分别为 m 和 m_0 的水球。一轻弹簧被压缩在两球间（未与球连接）。用线将两球系紧，并使之静止，如图所示。

（1）现将线剪断，则两球被弹开后沿相反方向在沟槽内运动，问此后 m 转过多大角度就要与 m_0 相碰？

（2）设原来储存在被压缩弹簧中的势能为 U_0，问线断后两球经过多长时间才会相撞？



习题 5-8 图

5-9 我国第一颗人造地球卫星沿椭圆轨道运动时，地球中心在该椭圆的一个焦点上。已知地球的平均半径为 $R=6\ 378\ \text{km}$，人造地球卫星与地面的最近距离为 $l_1=439\ \text{km}$，最远距离为 $l_2=2\ 384\ \text{km}$。若人造地球卫星在近地点的速度 $v_1=8.10\ \text{km/s}$，试求人造地球卫星在远地点的速度 v_2。

5-10 一轻绳跨过轻定滑轮，一猴子抓住绳的一端，滑轮另一侧的绳子则挂一质量与猴子相等的重物。若猴子从静止开始以相对绳的速度 $\boldsymbol{v}$ 向上爬，求重物上升的速度。

5-11 为了将一颗同步通信卫星送到地球赤道上方的轨道中，该轨道离地面的高度为多少？

5-12 有一宇宙飞船欲考察质量为 m_0、半径为 R 的某星球，当它静止于空中离星球中心为 $5R$ 处时，以初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 发射一质量为 m 的仪器舱，且 $m \ll m_0$。过球心作一直线与 $\boldsymbol{v}_0$ 平行，问飞船与此直线间的垂直距离 b（称为瞄准距离）为多大时，恰好使仪器舱掠过此星球的表面而着陆？

5-13 一个没有大气层的静止球状行星质量为 m_0，半径为 R。从它的表面上发射一质量为 m 的粒子，发射速率等于逃逸速率的 3/4。试计算下列情况下，粒子：

（1）沿径向发射所能达到的最远距离；

（2）沿切向发射所能达到的最远距离。

（从行星中心算起，逃逸速率 $v=\sqrt{\dfrac{2Gm_0}{R}}$，提示：总能量和角动量守恒）

5-14 设想有一艘宇宙飞船，质量为 m_0，横截面积为 A。当它以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 飞行时碰到了一块静止的尘云，其密度为 ρ。假设灰尘碰到飞船时会吸附在飞船表面，且飞船横截面积 A 保持不变，计算分析飞船的后续运动情况。

习题答案

第六章　刚体力学

在前面的章节中，我们多把运动物体视为质点或质点系。对于质点，因为只考虑其质量，形状和大小是忽略不计的，所以谈不上自转和空间取向。但是，自然界中的许多物体都是有一定的形状和大小的，它们既有转动又有平动，如果问题涉及物体的转动及其形状和大小，就不能再把这些物体当作质点来处理，而要考虑其他模型。



本章补充资源

6-1　刚体的运动

NOTE

物体在外力作用下，严格说来，其形状和大小都会发生不同程度的改变。如果在研究物体运动时，物体形状和大小的改变小得可以忽略，我们就可得到实际物体的另外一个理想模型——刚体。所谓刚体，是指形状和大小完全不变的物体。因此，刚体可以被看成由许多质点组成，每一个质点称为刚体的一个质量元。在外力作用下，刚体各质量元之间的相对位置保持不变，而适用于质点系的基本定律也适用于刚体。

1. 刚体的平动和转动

刚体有两类基本的运动形式——平动和转动。

如果在运动过程中，刚体内的任意直线始终保持平行，这种运动就称为平动。图 6-1 所示为一块砖的运动，这里砖上任意直线 $AB /\!/ A'B' /\!/ A''B''$，故砖的运动是平动。在平动时，刚体上各点的运动轨迹 $AA'A''$和 $BB'B''$形状相同，而且各点在同一时刻的速度和加速度也相同。因此，我们可以选取刚体上任何一点的平动来描述刚体的平动。

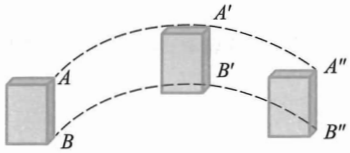


图 6-1　刚体的平动

如果刚体在运动过程中，其上所有各点都绕同一直线作圆周运动，这种运动便称为转动，该直线就称为转轴。例如，机器上齿轮的转动。如果转轴是固定不动的，就称这种运动为定轴转动。

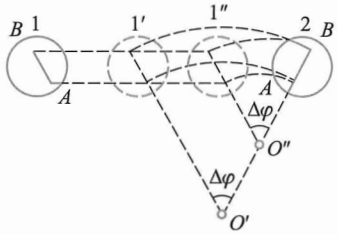


图 6-2 刚体的一般运动——平动+转动

刚体作定轴转动时，轴上所有各点都保持不动，轴外各点都在作半径不同的圆周运动，且在同一时间间隔 Δt 内都转过同样的角度 $\Delta\varphi$。因此，我们可以通过一个共同的角位移、角速度、角加速度来描述刚体的转动。

刚体的一般运动可看成为平动和转动的合成运动。图 6-2 所示的圆柱体从位置 1 到位置 2 的运动可以分解为圆柱体由 1 到 1′的平动和绕 O' 轴的转动，也可以分解为由 1 到 1″的平动和绕 O'' 轴的转动。在上面的两种分解中，尽管转轴的位置不同，然而转过的角度 $\Delta\varphi$ 却是一样的。可见，由于转轴位置的选择不同，可以有多种平动和转动的分解方式，但转动的角位移和角速度总是相同的，和转轴位置无关。

NOTE

2. 刚体的角速度和角加速度

刚体在时间间隔 Δt 内转过的角度 $\Delta\varphi$ 称为刚体的角位移。角位移不但有大小而且有方向，其方向由右手螺旋定则规定。然而，并非一切具有大小和方向的量都是矢量。根据矢量的定义，具有大小和方向，并且按照平行四边形定则相加的量称为矢量，而且满足矢量加法定则的条件更重要。一个刚体按顺序先后经过两次有限角位移的转动后的最终位置与将转动次序颠倒后刚体得到的最终位置不同。可见，有限角位移的合成与转动的先后次序有关，不服从矢量加法的交换律。因此，有限角位移 $\Delta\varphi$ 不是矢量。但是，如果经过时间间隔 $\mathrm{d}t$ 后，刚体转过一个无限小角位移 $\mathrm{d}\varphi$，相加的次序就不再影响最后的结果。无限小角位移是矢量。①

① 关于有限角位移 $\Delta\varphi$ 不是矢量、无限小角位移 $\mathrm{d}\varphi$ 是矢量的论述，可参阅 R.Rensenick 和 D.Haliday 所著的《物理学》(第三版)中译本第一卷第一册，11-4 节，313 页。

在线性代数里，转动表示为一个转动矩阵对位置矢量的乘积：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = U(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

连续两次转动，就是两个矩阵的乘积变换：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = U'(\alpha)\,U(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

一般来说矩阵是不可对易的，因此两次转动不可交换。但是如果是无穷小的转动：

$$U(\theta) = I + \delta U(\theta)$$

其中 I 是单位矩阵，表示没有转动。那么两次无穷小转动矩阵的乘积就是

$$U'(\alpha)\,U(\theta) = (I + \delta U'(\alpha))\,(I + \delta U(\theta)) = I + \delta U'(\alpha) + \delta U(\theta)$$

我们忽略了二阶无穷小项，显然这两个矩阵的乘积是可以对易的。

用无限小角位移 $d\varphi$ 定义的一些量也是矢量。例如，角速度的定义为

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{d\varphi}{dt} \tag{6-1}$$

式中 $d\varphi$ 是无限小角位移，是矢量，而 dt 是标量，所以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 是矢量，其方向同样沿转轴方向，如图 6-3 所示。可以证明，角速度的合成服从平行四边形定则。角速度的单位为 rad/s。



图 6-3

如果刚体作变速运动，为了表示角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的变化快慢，还要引入角加速度的概念。将角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ 定义为角速度的时间变化率：

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \tag{6-2}$$

因为 $d\boldsymbol{\omega}$ 是矢量，dt 是标量，所以角加速度也是矢量。如果我们规定了转轴的正方向，当刚体作加速转动时，$\boldsymbol{\alpha}$ 为正值；反之为负。角加速度的单位为 rad/s^{2}或 1/s^2，有关刚体作匀角加速定轴转动的转动运动方程，可直接从与质点作匀加速直线运动的平动运动方程的类比中得出：

$$\omega=\omega_0+\alpha t \tag{6-3}$$

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{6-4}$$

$$\omega^2=\omega_0^2+2\alpha(\varphi-\varphi_0) \tag{6-5}$$

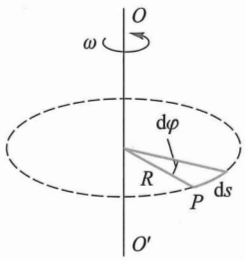
刚体绕定轴转动时，刚体上所有的质点都绕轴作圆周运动，在相同的时间内都转过相同的角位移 $\Delta\varphi$，而且在任意瞬间各质点的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ 都相同。但是，它们沿圆弧的线速度 $\boldsymbol{v}$ 和线加速度 $\boldsymbol{a}$ 随着它们与转轴的距离不同而不同。

角量相同，线量不同，这一刚体转动运动学的基本特征是我们以后研究刚体转动问题时必须采用由角量定义的物理量、采用含角量而不是含线量的定律和公式的根本原因。

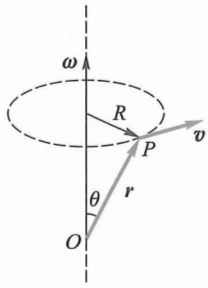
假如在时间间隔 dt 内，刚体转过角位移 $d\varphi$，如图 6-4(a)所示，那么，与转动轴的距离为 R 的 P 点所通过的路程为 $ds=Rd\varphi$，则 P 点线速度的值为

$$v=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\varphi}{dt}=R\omega \tag{6-6}$$

(6-6)式把线速度的大小和角速度的大小联系起来了。下面我们来求将矢量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 联系起来的表达式。刚体上被研究的 P 点的位置由径矢 $\boldsymbol{r}$ 确定，这个径矢 $\boldsymbol{r}$ 由位于转动轴上的坐标原点 O 发出，如图 6-4(b)所示。由图可见，矢积 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 的方向与矢量 $\boldsymbol{v}$ 的方向一致，其大小为 $\omega r\sin\theta=R\omega$，因而



(a) 线速度v和角速度ω的数值关系



(b) 线速度v和角速度ω的矢量关系

图 6-4 线速度和角速度的关系

NOTE

NOTE

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{6-7}$$

根据(6-6)式,又可求得 P 点的法向加速度 a_n、切向加速度 a_t、刚体的角速度 ω 和角加速度 α 的关系如下:

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(R\omega)^2}{R}=R\omega^2 \tag{6-8}$$

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\alpha \tag{6-9}$$

可见,知道了刚体的转动情况后,就可利用以上这些关系式求出刚体上任意点的线速度和线加速度了。

例 1

一圆盘可绕通过圆心并垂直盘面的光滑轴自由转动。从某一时刻起,有一外力矩作用在盘上,使其运动方程为 $\theta=8+2t-t^2$(SI 单位),求经过 0.5 s 后,盘上离轴 $r=0.01$ m 处质点的切向加速度和法向加速度,并求在刚开始时该点的切向加速度和法向加速度。

解 应该先求描述运动的角量,然后再求相应的线量,根据定义有

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=2-2t,\quad \alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-2$$

$$t=0.5\ \mathrm{s},\quad \omega=1\ \mathrm{rad/s}$$

$$\alpha=-2\ \mathrm{rad/s^2}$$

$$a_t=r\alpha=-0.02\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_n=\omega^2 r=0.01\ \mathrm{m/s^2}$$

$$t=0,\quad \omega_0=2\ \mathrm{rad/s}$$

$$\alpha_0=-2\ \mathrm{rad/s^2}$$

$$a_{t0}=r\alpha_0=-0.02\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_{n0}=\omega_0^2 r=0.04\ \mathrm{m/s^2}$$

6-2 刚体的质心运动

刚体只有平动时,刚体上任意点的运动都可以代表整个刚体的运动;刚体既有平动又有转动时,刚体中各点的运动状态将有很大的不同,因而给描述运动带来麻烦。为此有必要引出刚体质心的概念。

1. 质心

当我们只关心刚体的整体运动,而不考虑运动的细节时,对

任何刚体我们都能找到一个特殊点，它的运动方式和质量与刚体相等的单个质点在相同外力作用下的运动方式相同。这个特殊点我们称为质心。图 6-5 表示一个体操棍棒被人投往另一个人时，其质心作简单的抛物线运动，而棍棒上没有其他任何一点是以这样简单的方式运动的。可见，引入质心的概念，能够很简洁地描述刚体整体运动的特征。下面我们来确定质心及它的速度。



图 6-5 体操棍棒的质心作简单的抛物线运动

NOTE

将刚体分成许多质量元后，就可以将其视为一个质点系。按照动量守恒定律，一个封闭的质点系的动量是常量；而按照惯性定律，一个孤立质点的动量是常量。一个孤立的质点和一个封闭的质点系在这一点上很相似，即两者都有不变的动量。但动量守恒与系统内各质点的运动细节完全无关，这意味着，封闭的质点系与孤立质点的动量的等价性，即我们可以用一个等价的、其动量等于系统总动量的单个质点去代替整个系统。设想单个质点具有质量 m 和速度 $\boldsymbol{v}_c$，其动量 $m\boldsymbol{v}_c$ 等于系统的总动量，于是我们得到系统的总动量为

$$\boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{p}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = m\boldsymbol{v}_c \tag{6-10}$$

式中，$\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$ 表示质点 m_i 的动量，m 为系统的总质量，$\boldsymbol{v}_c$ 是系统质心的速度。

于是，由(6-10)式给出质心的速度 $\boldsymbol{v}_c$ 为

$$\boldsymbol{v}_c = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i}{m} = \frac{\sum_i m_i \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}}{m} \tag{6-11}$$

在质量 m_i 与速度无关的情况下，上式可以写成

$$\boldsymbol{v}_c = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{m}\right) \tag{6-12}$$

定义系统质心的径矢 $\boldsymbol{r}_c$ 为

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{m} \tag{6-13}$$

位置由径矢 $\boldsymbol{r}_c$ 确定的点 C 称为系统的质心，即质点系的“质量中心”。质心可视为整个质点系的代表点，系统的全部质量 m 和总动量 $\boldsymbol{p}$ 都集中在质心上面。

在直角坐标系中，质心的坐标有

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{m} \tag{6-14}$$

NOTE

我们可以将一个刚体当作一个质量连续分布的系统来处理，即可以认为它是由无限多个无限小的质量元组成。以 $\mathrm{d}m$ 表示任意质量元的质量，$\boldsymbol{r}$ 表示其径矢，则刚体的质心位置的径矢为

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{m} \tag{6-15}$$

它在直角坐标系中的分量式表示为

$$x_c = \frac{\int x\mathrm{d}m}{m}, \quad y_c = \frac{\int y\mathrm{d}m}{m}, \quad z_c = \frac{\int z\mathrm{d}m}{m} \tag{6-16}$$

注意，对于几何尺寸不十分大的物体，质心与重心是重合的。

2. 质心运动定理

现在我们来看质心概念在物理上的重要意义。我们把系统的总动量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}_c$ 代入牛顿第二定律得

$$\boldsymbol{F}_{外} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_c}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}_c \tag{6-17}$$

式中 $\boldsymbol{a}_c$ 是质心的加速度，(6-17)式称为质心运动定理。该式表明，将全部质量 m 集中于质心，系统的所有外力 $\boldsymbol{F}_{外}$ 平移作用于质心，质心的运动就等同于一个在外力 $\boldsymbol{F}_{外}$ 作用下质量为 m 的质点的运动。因此，对系统整体运动的描述可以用质心运动的描述来替代。

整个质点系可以是不发生形变的刚体，也可以是可形变的物体；可以旋转，也可以爆炸，但质心运动定理都成立(参见图 6-5 和图 6-6)。对于质心运动来说，系统的内力不起作用。因此，研究质心的运动对解决物体运动情况比较复杂的问题较为方便。

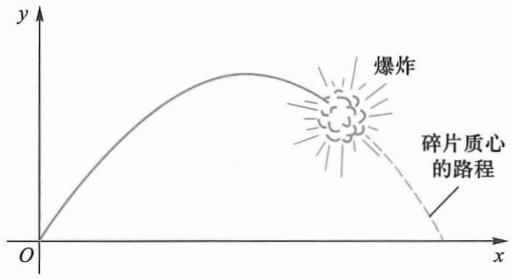


图 6-6 沿抛物线飞行的炮弹爆炸后，质心仍沿原抛物线路径向前运动

例 2

地球质量 $m_E = 5.98\times10^{24}$ kg，月球质量 $m = 7.35\times10^{22}$ kg，地月的中心距离 $l = 3.84\times10^5$ km，如图 6-7 所示。求地月系统的质心位置。

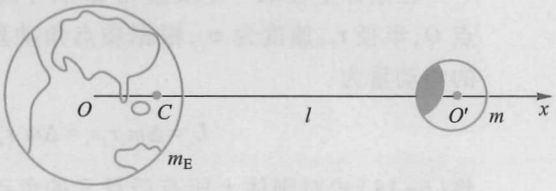


图 6-7 地月系统的质心位置

解 地球和月球的质心都在各自的球心 O 和 O' 处，取地心 O 为坐标原点，则地月系统的质心坐标为

$$x_c = \frac{m_E\cdot 0+ml}{m_E+m}\approx\frac{ml}{m_E}$$

$$=\frac{7.35\times10^{22}\times3.84\times10^5}{5.98\times10^{24}}\ (\text{km})$$

$$=4.72\times10^3(\text{km})$$

地月系统质心 C 在地月连线距地心 4.72×10^3 km 处，即质心在地球球体内与地心距离约为 $\frac{3}{4}R_E$ 处。

6-3 刚体的定轴转动

1. 刚体相对定轴的角动量

首先说明一下，角动量 $\boldsymbol{L}$ 与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小成正比，但一般说来，它们不在同一方向上，即使在刚体绕定轴转动的情况下也可能如此，这是因为角动量的定义是对某一参考点而言的，这一点要特别注意。

现在我们讨论刚体绕定轴转动的角动量，由于轴是固定不动的，这时，起作用的只是角动量在通过参考点 O 的 z 轴上的分量，即刚体相对于 z 轴的角动量 L_z，此后为了方便，我们省略下标。

如图 6-8 所示，有一刚体以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕 z 轴（定轴）转动。由于刚体可看成由许多质点组成，因此，当刚体绕定轴转动时，刚体上的所有质点都以相同角速度 ω 在垂直于 z 轴（定轴）的转动

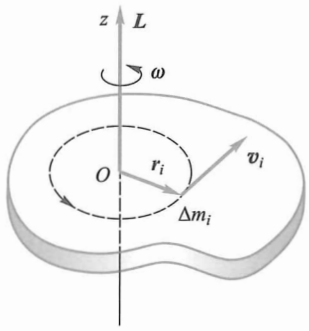


图 6-8 刚体相对于 z 轴的角动量

NOTE

平面内绕 z 轴(定轴)作圆周运动,显然所有的圆心全在 z 轴上,而且所有质点相对各自圆心的角动量的方向均沿着 z 轴的同一方向,因而整个刚体相对 z 轴的角动量即等于刚体上所有质点绕 z 轴作圆周运动的角动量之和。

在刚体上任取一个质量元 Δm_i,作圆周运动的圆心为轴上一点 O,半径 r_i,速度为 $\boldsymbol{v}_i$,根据质点角动量的定义,它相对圆心 O 的角动量为

$$L_i = \Delta m_i r_i v_i = \Delta m_i r_i^2 \omega \tag{6-18}$$

将(6-18)式对刚体上所有质量元的角动量 L_i 求和,就得到刚体相对于 z 轴的角动量为

$$L = \sum_i L_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega \tag{6-19}$$

(6-19)式中括号内的量定义为

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \tag{6-20}$$

我们把 I 称为刚体绕 z 轴的转动惯量,它等于刚体中各质量元的质量和质量元到轴的距离平方的乘积之和。利用(6-19)式和(6-20)式,刚体相对 z 轴的角动量可写成下面的矢量形式:

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} \tag{6-21}$$

可见,刚体对 z 轴的角动量 L(即 L_z)和角速度 ω 同方向,均沿轴向。

这里必须再次强调一下,刚体绕定轴转动时,根据角动量的定义,刚体的角动量也与参考点相关,这个参考点一般选在轴上某点 O,角动量的大小和方向也不是(6-21)式所表示的那样,其方向一般与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 不同。但是,我们可以证明,(6-21)式所表示的角动量就是刚体相对 z 轴上参考点 O 的角动量在 z 轴上的分量,即刚体角动量的 z 轴分量与 O 点具体选在轴上哪一点无关。在刚体作定轴转动时,由于轴是固定的,因此,实际起作用的就是刚体的角动量在 z 轴上的分量,这也是我们在研究刚体定轴转动问题时经常用到和感兴趣的角动量分量。

从(6-21)式中我们发现,刚体对定轴的角动量 $\boldsymbol{L}_z = I\boldsymbol{\omega}$ 和质点的动量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ 在形式上非常相似:角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 起到线速度 $\boldsymbol{v}$ 的作用,转动惯量 I 起到质量 m 的作用。质量是质点惯性的量度,转动惯量是刚体转动惯性的量度,转动惯量这一名词正是这样命名的。

2. 作用在刚体上的力相对定轴的力矩

NOTE

力矩 $M=r\times F$ 的定义是对某一固定参考点 O 而言的，称为力 F 相对于 O 点的力矩。式中 r 是从 O 点指向力 F 的作用点的径矢。

刚体绕定轴转动时，起作用的还是力矩 M 沿 z 轴（定轴）方向的分量 M_z，我们把 M_z 称为作用在刚体上的力相对于 z 轴的力矩，为了方便，我们在以后去掉了下标。

如图 6-9(a)所示，刚体绕 z 轴作定轴转动。作用在刚体内 P 点上的力 F 在垂直于 z 轴的转动平面内，我们取该转动平面与 z 轴的交点 O 为参考点，r 为由参考点 O 到力 F 的作用点 P 的径矢，θ 为径矢 r 和力 F 之间的夹角。

这时，力 F 相对于参考点 O 的力矩的方向是沿着 z 轴的，它就是力 F 相对于 z 轴的力矩，即

$$M=r\times F \tag{6-22}$$

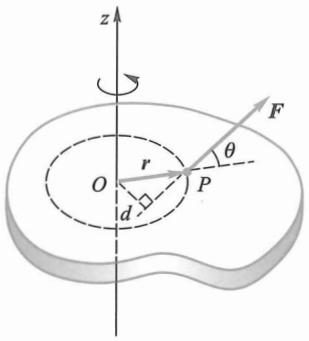
其大小为

$$M=M_z=Fr\sin\theta=Fd \tag{6-23}$$

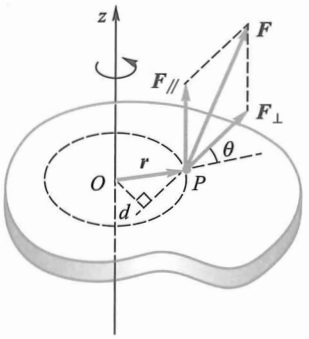
式中 d 为力臂，即 O 点到力 F 的作用线的垂直距离。

在刚体定轴转动中，力矩的方向是沿着 z 轴的，只有两种可能的方向可取，用正负即可表示。

如果力 F 不在垂直于 z 轴的平面内，如图 6-9(b)所示，我们可把力 F 分解为两个分力：一个是与 z 轴平行的分力 $F_{/\!/}$，另一个是与 z 轴垂直的分力 $F_{\perp}$。这两个分力中，$F_{/\!/}$ 产生的力矩与 z 轴垂直，因而在 z 轴上的分量为零，该力矩的作用是欲使 z 轴转动，但由于 z 轴是固定轴，所以这个力矩不影响刚体的定轴转动。因此只有在转动平面内的垂直分力 $F_{\perp}$ 产生的力矩（其方向沿着 z 轴）能使物体转动。实际上，它就是力 F 相对于 z 轴的力矩。



(a) 力F在垂直于z轴的平面内



(b) 力F在不垂直于z轴的平面内

图 6-9 作用在刚体上的力 F 相对 z 轴的力矩

根据上面的分析可知，在刚体绕 z 轴作定轴转动时，无论力 F 是否在转动平面内，只有力 F 相对于 z 轴的力矩才能表征刚体绕 z 轴转动的能力。所以在讨论刚体定轴转动问题时，我们只需考虑这一力矩分量（即 M_z）就行了。

一般来说，力矩的参考点应该与角动量的参考点一样。和角动量一样，相对转轴上任意一点 O，力矩的 z 轴分量都是一样的，等于(6-23)式。

在刚体的定轴转动中，如果有几个外力同时作用在刚体上，

NOTE

它们的作用将相当于一个力矩的作用，这个力矩称为这几个外力的合外力矩，它们的合外力矩轴向分量的量值等于这几个外力矩的代数和，即

$$M_z = \sum_i M_{zi} = \sum_i F_i r_i \sin\theta_i \tag{6-24}$$

式中，r_i 是 F_i 的作用点到 z 轴的垂直距离（即径矢 $\boldsymbol{r}_i$ 的大小），θ_i 是径矢 $\boldsymbol{r}_i$ 和外力 $\boldsymbol{F}_i$ 之间的夹角。

若 $M_z>0$，则合外力矩的方向沿 z 轴的正向；若 $M_z<0$，则合外力矩的方向与 z 轴的正向相反。

3. 刚体的定轴转动定律

把刚体看成质点系，则根据质点系的角动量定理(5-18)式有

$$\boldsymbol{M}_{外} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$$

考虑到刚体绕定轴转动时，起作用的仅是合外力矩和角动量的 z 轴分量，即刚体相对于 z 轴的合外力矩 $M_{外z}$ 和刚体相对于 z 轴的角动量 L_z。于是得到

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t} \tag{6-25}$$

在绕定轴转动情况下，刚体的转动惯量是不变的，故

$$M_{外z} = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\alpha \tag{6-26}$$

上式称为刚体的定轴转动定律。它表明：

刚体对于某一固定轴的合外力矩等于刚体对同一转轴的转动惯量与角加速度的乘积。

(6-26)式与牛顿第二定律 $F=ma$ 的形式非常类似，这里的合外力矩 $M_{外z}$ 外对应于力 F；转动惯量 I 对应于质量 m；角加速度 α 对应于加速度 a。

4. 转动惯量

在研究刚体绕定轴转动时，我们引入了转动惯量的概念。但是，必须注意，转动惯量这个量并非转动时才存在，每个物体相对于任意轴具有一定的转动惯量是一种客观存在，这与物体是否在转动无关，正像一个物体具有质量而与它是否运动无关一样。

NOTE

根据转动惯量的定义式

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

可以看出，转动惯量是可加量，它表明刚体的转动惯量等于其各部分的转动惯量之和。

对于质量连续分布的刚体来说，(6-20)式应改为积分形式，即

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int r^2 \rho \mathrm{d}V \qquad (6\text{-}27)$$

式中 $\mathrm{d}m$ 是质量元，ρ 代表密度，$\mathrm{d}V$ 是体积元，积分对整个体积 V 进行。

在国际单位制中，转动惯量的单位是 $\mathrm{kg \cdot m^2}$。

下面举几个简单而重要的例子说明转动惯量的计算方法。

(1) 长度为 l、质量为 m 的均匀细棒相对于垂直通过其质心的转轴的转动惯量。

如图 6-10 所示，取沿棒长方向为 x 轴，质心 C 为原点，在棒上任取线元 $\mathrm{d}x$，则质量元 $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}x$，其中 λ 为棒的质量线密度，且 $\lambda = \dfrac{m}{l}$。根据(6-27)式，有

$$I_c = \int x^2 \mathrm{d}m = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \lambda \mathrm{d}x = \frac{1}{12}\lambda l^3 = \frac{1}{12} m l^2$$

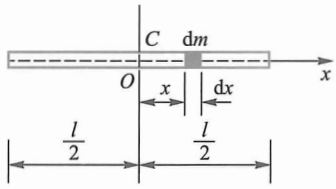


图 6-10 细棒的转动惯量

(2) 质量为 m、半径为 R 的均匀细圆环相对于垂直通过其环面的中心转轴的转动惯量。

如图 6-11 所示，细圆环上任意质量元 $\mathrm{d}m$ 到中心转轴的距离都为 R，故

$$I_c = \int R^2 \mathrm{d}m = R^2 \int \mathrm{d}m = mR^2$$

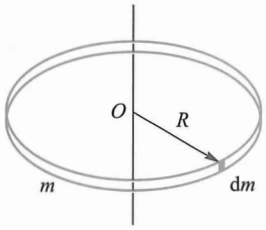


图 6-11 细圆环的转动惯量

(3) 质量为 m、半径为 R 的均匀薄圆盘相对于垂直通过其盘面的中心转轴的转动惯量。

如图 6-12 所示，圆盘的质量面密度为 $\sigma = \dfrac{m}{\pi R^2}$，任取半径为 r、宽为 $\mathrm{d}r$ 的圆环，其面积元为 $2\pi r \mathrm{d}r$，质量元为 $\mathrm{d}m = 2\pi\sigma r \mathrm{d}r$，则

$$I_c = \int r^2 \mathrm{d}m = \int_0^R r^2 2\pi\sigma r \mathrm{d}r = \frac{\pi\sigma R^4}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

此结果也适用于圆柱的情况。

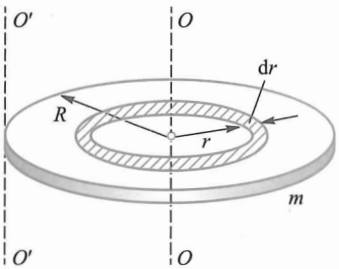


图 6-12 薄圆盘的转动惯量

在以上例子中，由于物体是均匀对称的，而且转轴都是通过质心的对称轴，所以求转动惯量相对简单。如果我们把垂直于圆盘中心的轴平移到圆盘的边缘，例如 $O'O'$ 轴，再求圆盘相对于该轴的转动惯量(见图 6-12)，显然，计算要复杂得多。不过，如果

利用平行轴定理求此类问题的转动惯量，将使运算大大简化。平行轴定理表述如下：

如果质量为 m 的刚体相对于通过其质心转轴的转动惯量为 I_c，则它相对于与此轴平行相距为 d 的任意轴的转动惯量为

$$I=I_c+md^2 \tag{6-28}$$

按照平行轴定理，圆盘相对于边缘 $O'O'$ 轴的转动惯量为

$$I_{O'}=I_c+mR^2=\frac{1}{2}mR^2+mR^2=\frac{3}{2}mR^2$$

可见，平行轴定理的实质是把刚体相对于任意轴的转动惯量问题归结为相对于通过质心轴的转动惯量求解。

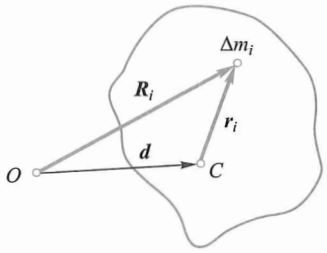


图 6-13 平行轴定理的证明

为了证明平行轴定理，我们研究通过刚体质心的 C 轴以及与 C 轴平行、相距为 d 的 O 轴的情况。如图 6-13 所示，两轴都与图面垂直，用 $\boldsymbol{r}_i$ 表示由 C 轴到任意质量元 Δm_i 且垂直于 C 轴的矢量，用 $\boldsymbol{R}_i$ 表示从 O 轴引向质量元 Δm_i 且垂直于 O 轴的矢量。另外，还引入垂直于这两个轴的矢量 $\boldsymbol{d}$，它把 O 轴和 C 轴上的相应点连接起来。于是得到

$$\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{d}$$

由于质量元 Δm_i 对通过 O 轴的转动惯量为 $\Delta m_i R_i^2$，应用矢量点乘，我们可以把它等效为

$$\begin{aligned}\Delta m_i R_i^2 &=\Delta m_i \boldsymbol{R}_i\cdot\boldsymbol{R}_i=\Delta m_i(\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{d})\\ &=\Delta m_i(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}+2\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{d})\\ &=\Delta m_i(r_i^2+d^2+2\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{d})\end{aligned}$$

现在，我们把刚体中所有质量元 Δm_i 对于 O 轴的转动惯量加起来，则有

$$\begin{aligned}I&=\sum_i \Delta m_i R_i^2=\sum_i \Delta m_i(r_i^2+d^2+2\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{d})\\ &=\sum_i \Delta m_i r_i^2+\sum_i \Delta m_i d^2+2\Big(\sum_i \Delta m_i\boldsymbol{r}_i\Big)\cdot\boldsymbol{d}\end{aligned} \tag{6-29}$$

上式中右边的三项解释如下：第一项为刚体相对于通过质心的 C 轴的转动惯量，用 I_c 表示，则

$$I_c=\sum_i \Delta m_i r_i^2$$

第二项为刚体的总质量 $m=\sum_i \Delta m_i$ 与两轴间距离 d 的平方的乘积，即

$$\sum_i \Delta m_i d^2=md^2$$

第三项中包含矢量 $\sum_i \Delta m_i\boldsymbol{r}_i$。如果我们将过质心的 C 轴作为坐

标轴 z，$\boldsymbol{r}_i$ 显然都垂直于 z 轴，根据质心的定义式(6-13)，第三项其实是质心在 x、y 方向的坐标(图 6-14)。

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{r}_i}{m}$$

故

$$\sum_i \Delta m_i \boldsymbol{r}_i = m\boldsymbol{r}_c$$

由于 C 轴是坐标轴 z，质心在 z 轴上，质心的 x、y 轴坐标为零，即第三项为零。所以

$$I = I_c + md^2$$

这个结论与 C 轴是否为坐标轴 z 无关。也可以选 O 轴为坐标轴 z，读者可自行证明。

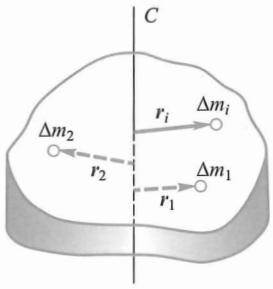


图 6-14 $\boldsymbol{r}_c$ 的几何意义

NOTE

至此定理证明完毕。

这里必须指出，在上述对平行轴定理的证明中，符号 C 和 O 表示的是两平行轴，C 并不是质心的位置(参见图 6-13)，质量元 Δm_i 和质心不全在同一个转动平面内。

最后，我们引入刚体的回转半径的概念。

圆环绕中心轴的转动惯量与单个质点的一样，为 $I = mR^2$，其所有的质量都分布在同一距离 $R = \sqrt{\frac{I}{m}}$ 上。受此启发，我们可以定义任意形状刚体的回转半径 $R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}$。它表示相对于转轴的垂直距离，刚体相对于转轴的转动惯量相当于把其全部质量都集中分布在半径为回转半径的圆周上的转动惯量。例如，绕圆盘中心轴的回转半径可用以下公式求得：

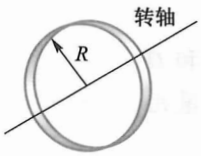
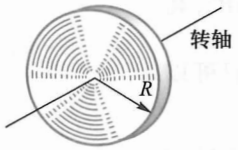
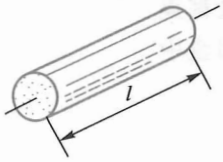
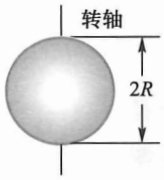
$$I = mR_g^2 = \frac{1}{2}mR^2$$

$$R_g = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

回转半径是刚体相对于轴的质量分布的一种量度，回转半径越大，质量分布离轴越远。对不规则形状的刚体，R_g 值可用实验测定。

表 6-1 列出了几种常见刚体的转动惯量。

表 6-1 常见刚体的转动惯量

刚体		转轴位置	转动惯量
细棒		通过中心与棒垂直	$I_c=\frac{1}{12}ml^2$
细棒		通过端点与棒垂直	$I_c=\frac{1}{3}ml^2$
细圆环		通过中心与环面垂直	$I_c=mR^2$
薄圆盘		通过中心与盘面垂直	$I_c=\frac{1}{2}mR^2$
圆柱体		对称轴	$I_c=\frac{1}{2}mR^2$
球体		直径	$I_c=\frac{2}{5}mR^2$

例 3

如图 6-15 所示，一均匀圆盘半径为 R、质量为 m_0，其中心轴装在一个光滑且固定的轴承上；在圆盘的边缘上绕一轻绳，绳的另一端挂一个质量为 m 的物体，试求圆盘的角加速度与圆盘边缘上一点的切向加速度。设绳的质量忽略不计。

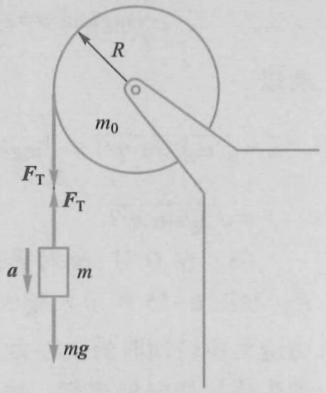


图 6-15 圆盘边缘用绳悬挂一个下落重物

解 对物体 m 有

$$mg-F_T=ma$$

对圆盘，合外力矩为 F_TR，转动惯量为 $I=\frac{1}{2}m_0R^2$，因而有

$$F_TR=I\alpha=\frac{1}{2}m_0R^2\alpha$$

利用关系式 $a=R\alpha$，联立上述方程求解，可得

$$\alpha=\frac{2m}{(m_0+2m)R}g$$

$$a=\frac{2m}{m_0+2m}g$$

例 4

如图 6-16 所示，一长为 l、质量为 m 的细棒，可以绕其一端的 O 轴在竖直平面内自由转动。开始时棒静止在水平位置，然后释放。当它下摆至与水平线成 θ 角时，求：(1)角加速度；(2)角速度；(3)轴对棒的约束力。

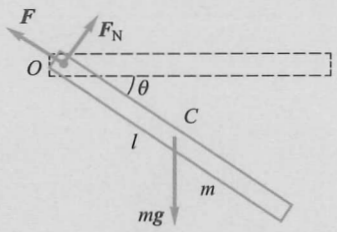


图 6-16 细棒绕一端的定轴转动

解 (1) 细棒向下摆动时受到重力对转轴的力矩，棒的质心 C 在 $|OC|=\frac{1}{2}l$ 处，故

$$M=|M|=|OC|\cdot mg$$

$$=\frac{l}{2}mg\sin(90°-\theta)=\frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

由转动定律得棒的角加速度为

$$\alpha=\frac{M}{I}=\frac{\frac{1}{2}mgl\cos\theta}{\frac{1}{3}ml^2}=\frac{3g\cos\theta}{2l}$$

(2) 我们仍通过转动定律求棒的角速度

$$M=I\alpha=I\frac{d\omega}{dt}$$

$$Mdt=Id\omega$$

等式两边乘以 ω，并将力矩值 M 代入，则得

$$\frac{1}{2}mgl\cos\theta\omega dt=I\omega d\omega$$

因为 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$，$d\theta=\omega dt$，所以有

$$\frac{1}{2}mgl\cos\theta d\theta=I\omega d\omega$$

两边积分，有

$$\int_0^\theta\frac{1}{2}mgl\cos\theta d\theta=\int_0^\omega I\omega d\omega$$

得

$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta=\frac{1}{2}I\omega^2$$

所以

$$\omega=\sqrt{mgl\sin\theta/I}=\sqrt{mgl\sin\theta/\left(\frac{1}{3}ml^2\right)}$$

$$=\sqrt{3g\sin\theta/l}$$

(3) 在 O 处,轴对棒的作用力为 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}_N$(如图 6-15 所示),则细棒沿棒方向的合力应为棒转动时的向心力,垂直于棒的合力产生棒的切向加速度。我们用自然坐标系写出质心运动定理

$$mg\cos\theta-F_N=ma_{ct}$$

$$F-mg\sin\theta=ma_{cn}$$

因为 $a_{ct}=\frac{l}{2}\alpha$, $a_{cn}=\frac{l}{2}\omega^2$,所以代入方程后得

$$F_N=mg\cos\theta-ma_{ct}=mg\cos\theta-m\frac{l}{2}\frac{3g\cos\theta}{2l}$$

$$=\frac{1}{4}mg\cos\theta$$

$$F=m\frac{l}{2}\frac{3g\sin\theta}{l}+mg\sin\theta=\frac{5}{2}mg\sin\theta$$

5. 角冲量

NOTE

将刚体在绕定轴转动情况下得到的(6-25)式两边乘以 dt 并积分,就得到

$$\int_0^t M_{外z}dt=\int_{L_0}^{L}dL_z=L_z-L_{0z}=I\omega-I\omega_0 \qquad (6-30)$$

上式左端表示刚体相对于固定轴的合外力矩在一段时间内的累积效应,称为角冲量。它等于刚体相对于固定轴的角动量的增量,这就是刚体绕定轴转动的角动量定理。

在 SI 中,角冲量的单位为 N·m·s。

(6-30)式表明,当刚体相对于固定轴的合外力矩 $M_{外z}=0$ 时,刚体对该轴的角动量保持恒定,即刚体角动量的轴向分量守恒,这就是刚体绕定轴转动的角动量守恒定律。

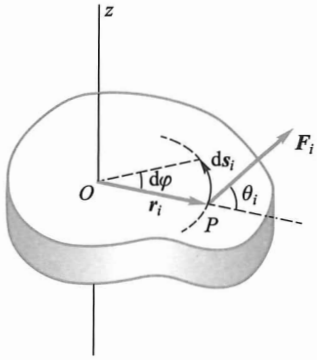


图 6-17 力矩的功

6. 刚体转动中的功和能

(1) 力矩的功

如图 6-17 所示,刚体在垂直于 z 轴的平面内的外力 $\boldsymbol{F}_i$ 作用下绕 z 轴转过一角位移 $d\varphi$,力 $\boldsymbol{F}_i$ 的作用点的位移为 $d\boldsymbol{s}_i$,且 $d\boldsymbol{s}_i$ 在垂直于轴的转动平面内。这时外力 $\boldsymbol{F}_i$ 对刚体所做元功为

NOTE

$$dW_i = \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{s}_i = F_i ds_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)$$

$$= F_i r_i \sin\theta_i d\varphi = M_i d\varphi$$

式中 M_i 是力 $\boldsymbol{F}_i$ 相对于 z 轴的力矩。

如果物体同时受到几个外力的作用，则外力对刚体做的功为

$$dW = \sum_i dW_i = \sum_i M_i d\varphi = M d\varphi$$

式中 M 为几个外力相对于 z 轴的合外力矩。

对于有限的角位移，外力做的功可用积分求得：

$$W = \int dW = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi \tag{6-31}$$

(6-31)式的功称为力矩的功，它是力做的功在刚体定轴转动中的特殊形式。

(2) 刚体的转动动能

刚体的定轴转动动能应为组成刚体的所有质量元 Δm_i 的动能之和。设质量元 Δm_i 的线速度为 $v_i = r_i\omega$，r_i 为质量元 Δm_i 到转轴的垂直距离，于是

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{6-32}$$

(3) 刚体的重力势能

刚体的重力势能就是所有质量元 Δm_i 的重力势能之和。如果刚体处于一个均匀的重力场中，且刚体不太大时，刚体处处有相同的重力加速度 g，此时刚体的重力势能为

$$E_{p重} = \sum_i \Delta m_i g h_i = g\sum_i \Delta m_i h_i$$

根据质心的定义，刚体质心 C 的高度为

$$h_c = \frac{\sum_i \Delta m_i h_i}{m}$$

于是得到

$$E_{p重} = mgh_c \tag{6-33}$$

即刚体重力势能等于它的总质量集中在质心 C 时所具有的势能。

7. 刚体绕定轴转动的动能定理

设刚体在合外力矩 M 作用下，在 dt 时间内，刚体绕定轴转过角位移 $d\varphi = \omega dt$，再根据刚体的定轴转动定律，合外力矩对刚体所

NOTE

做的元功可写成

$$dW = Md\varphi = I\frac{d\omega}{dt}\omega dt = I\omega d\omega$$

若上式中刚体转动惯量 I 为常量，那么当刚体的角速度在一段时间内由 ω_1 变为 ω_2 时，在这个过程中合外力矩对刚体所做的功为

$$W = \int dW = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega$$

即

$$W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \tag{6-34}$$

(6-34)式表明，合外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量，这就是刚体绕定轴转动的动能定理。

例 5

如图 6-18 所示，一质量均匀分布的圆盘，质量为 m_0、半径为 R，放在一粗糙水平面上，圆盘可绕通过其中心 O 的竖直固定光滑轴转动，开始时，圆盘静止，一质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 垂直于圆盘半径打入圆盘边缘并嵌在盘边上，求：(1) 子弹击中圆盘后，盘获得的角速度；(2) 经过多长时间后，圆盘停止转动。(忽略子弹重力造成的摩擦阻力矩)

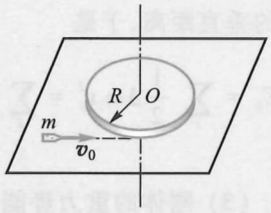


图 6-18

解 子弹射入圆盘过程中，系统对中心 O 的角动量守恒，故有

$$mv_0R = J\omega_0, \quad J = \frac{1}{2}m_0R^2 + mR^2$$

$$\omega_0 = \frac{2mv_0}{(2m+m_0)R}$$

本题的关键是求出圆盘转动过程中的摩擦力矩，取一半径为 r、宽度为 dr 的小圆环，则小圆环受的摩擦力矩为

$$dM_f = \mu dmg \cdot r = \mu 2\pi r dr\sigma \cdot r$$

$$M_f = \int_0^R \mu 2\pi\sigma r^2 \cdot dr = \frac{2}{3}\mu m_0 gR$$

$$-M_f\Delta t = 0 - J\omega_0$$

$$\Delta t = \frac{3mv_0}{2\mu m_0 g}$$

例 6

如图 6-19 所示，一根长为 l、质量为 $3m$ 的均匀细棒，顶端悬挂在 O 点的水平轴上。今有质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 射入棒的下端里面。然后，棒上摆至下端高度 h 处的位置。求：(1) 子弹和棒刚开始转动时的角速度；(2) 棒下端达到的高度 h。

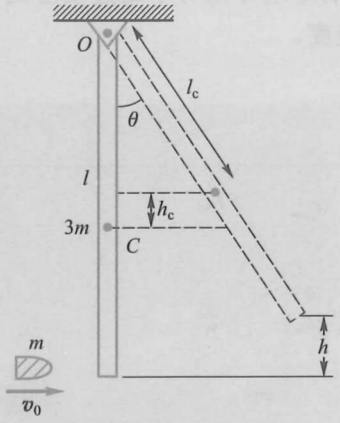


图 6-19 子弹射入棒内

解 (1) 以子弹和棒作为系统。在子弹射入棒的过程中,由于所经历的时间极短,系统所受外力(重力和轴的支持力)对于 O 轴不产生力矩,故系统对 O 轴的角动量守恒。

$$mlv_0 = I\omega$$

$$I = ml^2 + \frac{1}{3}3ml^2 = 2ml^2$$

于是得

$$\omega = \frac{mlv_0}{I} = \frac{v_0}{2l}$$

(2) 棒上摆过程中,系统的机械能守恒

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = (3m+m)gh_c \qquad (1)$$

式中 h_c 为质心 C 升高的高度。

子弹在棒内时,质心的位置为

$$l_c = \frac{ml+3m\dfrac{l}{2}}{m+3m} = \frac{5}{8}l \qquad (2)$$

由(1)式得

$$h_c = \frac{v_0^2}{16g}$$

因为 $h_c = l_c(1-\cos\theta)$,故

$$h = l(1-\cos\theta) = l\frac{h_c}{l_c} = l\frac{\dfrac{v_0^2}{16g}}{\dfrac{5}{8}l} = \frac{v_0^2}{10g}$$

请注意,在子弹射入棒的过程中,由于棒的顶端受到轴水平方向的约束力,所以系统水平方向的总动量不守恒。

6-4 刚体平面平行运动

刚体中所有点都在一些平行平面中的运动称为刚体的平面平行运动。如圆柱体沿平面的滚动就是一种平面平行运动。为了研究这种运动,可以取平行于该平面的任意剖面加以研究。

在刚体的平面平行运动中,转动轴是垂直于运动平面的,因此它与定轴转动的区别仅仅在于转轴本身可以横向移动。根据运动叠加原理,刚体的平面平行运动可分解为质心的平动和绕质心的转动,二者的刚体动力学方程分别为:

质心的平动 $\boldsymbol{F}_{外} = m\boldsymbol{a}_c$ (6-35)

绕质心的转动 $\boldsymbol{M}_{c外} = \boldsymbol{I}_c\boldsymbol{\alpha}$ (6-36)

NOTE

(6-36)式中 $M_{c外}$、I_c、$\boldsymbol{\alpha}$ 分别是刚体相对于通过质心的转轴的合外力矩、转动惯量和角加速度。

例 7

一半径为 R、质量为 m 的均匀圆柱体沿倾角为 θ、高为 $h(h\gg R)$ 的斜面无滑动地滚下，如图 6-20 所示。圆柱体的初速度等于零。求圆柱体到达水平段瞬间的质心速度和质心角速度。

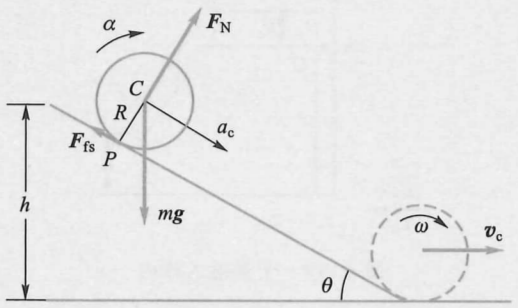


图 6-20 圆柱体沿斜面作纯滚动

解 圆柱体受到三个力的作用：重力 mg、摩擦力 F_{fs}、正压力 $\boldsymbol{F}_N$。

圆柱体与斜面的摩擦力发生在它们相接触的 P 点上。在无滑动的情况下，圆柱体上的这些接触点是静止的，因此我们涉及的摩擦力是静摩擦力。静摩擦力的取值范围从零到最大值 $F_{fs,max}$，当摩擦力取上述范围内的值时，将不出现滑动，这时圆柱体沿斜面运动的接触点的线速度为零。由此得

$$v_c=R\omega,\quad a_c=R\alpha \tag{1}$$

v_c 和 a_c 是质心平动的速度和加速度，ω 和 α 是刚体绕过质心的轴的角速度和角加速度。

在满足上述关系式而静摩擦力又没有超出最大值的情况下，圆柱体作无滑动滚动(即纯滚的)，否则无滑动的滚动是不可能的。

圆柱体的接触点 P 参与两种运动：一方面随质心 C 以 v_c 作平动，同时又以角速度 ω 绕过质心的轴转动。故得到下列动力学方程：

$$mg\sin\theta-F_{fs}=ma_c \tag{2}$$

$$RF_{fs}=I_c\alpha=\frac{1}{2}mR^2\alpha \tag{3}$$

由(1)式、(2)式和(3)式解得

$$F_{fs}=\frac{1}{3}mg\sin\theta$$

$$a_c=\frac{2}{3}g\sin\theta$$

$$\alpha=\frac{2g}{3R}\sin\theta$$

由 a_c 为常量可知，圆柱体的质心作匀加速运动。当圆柱体滚到底部时，它通过的距离为 $\dfrac{h}{\sin\theta}$。设所需的时间间隔为 t，于是得

$$\frac{h}{\sin\theta}=\frac{1}{2}a_ct^2$$

代入 a_c 值后得

$$t=\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{3h}{g}}$$

t 的数值与 a_c 一样，与圆柱体的质量和半径无关，仅取决于斜面的倾角 θ 和高度 h。

当圆柱体到达水平底部时，其质心速度为

$$v_c=a_ct=\sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

这时圆柱体的角速度为

$$\omega=\alpha t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

现在我们再来看圆柱体作无滑动滚动的条件。由上面的分析，所需的静摩擦力 F_{fs} 必须不超过最大静摩擦力 $F_{fs,max}$，即

$$F_{fs}\leqslant\mu_sN$$

于是有

$$\frac{1}{3}mg\sin\theta \leqslant \mu_s mg\cos\theta$$

得到

$$\mu_s \geqslant \frac{1}{3}\tan\theta$$

或

$$\tan\theta \leqslant 3\mu_s$$

可见，若斜面的倾角的正切 $\tan\theta$ 大于圆柱体与斜面间的静摩擦因数 μ_s 的三倍，则不可能实现无滑动滚动。

必须指出，静摩擦力 F_{fs} 对圆柱体不做功，因为静摩擦力在圆柱体上的作用点 P 在任何时间都是静止的。

下面我们再从机械能守恒定律的角度来思考这个问题。由于静摩擦力不做功，圆柱体沿斜面作纯滚动时，机械能守恒：

$$mgh = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}mv_c^2$$

将 $v_c = R\omega$，$I_c = \frac{1}{2}mR^2$ 代入后得

$$v_c = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

$$\omega = \frac{v_c}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

显然，第二种解法比第一种解法简单得多。

6-5 回转效应

NOTE

形状对称的物体绕其自身对称轴高速转动，且轴上一点固定不动，则这个物体就称为回转仪，或称为陀螺仪。由于回转仪或陀螺仪的轴本身又可绕该固定点转动，故回转仪的运动是刚体绕定点的运动。对回转仪运动的详尽分析极其复杂，下面我们仅对它的主要特性作一个近似的简单的介绍。

回转仪的一个重要特性是它受到外力矩作用时所产生的回转效应，又称进动效应。图 6-21 所示的是一杠杆回转仪。杆 AB 可绕光滑支点 O 在水平面或倾斜面内自由转动。回转仪 G 和平衡重物 P 分别置于杆的两端，调节平衡，使杆 AB 保持水平。使回

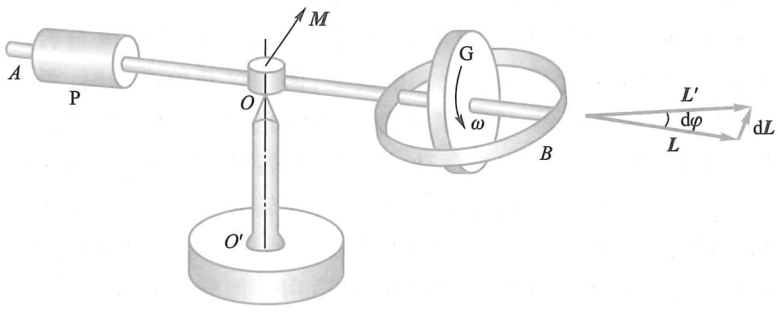


图 6-21 回转仪的回转效应

NOTE

转仪绕自转轴 AB 快速转动，由于没有外力矩作用，自转轴 AB 的方向始终不变。若将重物 P 移近 O 点，则杆的重心偏向右方，因而杆受到重力矩作用，杆就会向右下方倾斜；但如果让回转仪绕自转轴 AB 快速转动，则杆 AB 并不倾斜，而是绕 OO' 轴在水平面内转动，且由上向下看为逆时针方向转动。回转仪自转轴的这种转动，称为进动。回转仪受外力矩作用产生进动的效应，称为回转效应。

下面我们根据力矩和角动量的概念对回转效应予以简单的解释。

回转仪是一个相对自转轴转动惯量很大的轴对称刚体，故可近似认为其角动量与角速度的方向都沿自转轴方向，可表示为 $\boldsymbol{L}=I\boldsymbol{\omega}$。以 $\boldsymbol{L}$ 表示原来的角动量，方向沿 AB。当重物 P 移近 O 点以后，杆 AB 失去平衡，回转仪受到重力矩 $\boldsymbol{M}$ 的作用，其方向垂直纸面向里。由(5-18)式容易得到，在时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内，重力矩 $\boldsymbol{M}$ 引起的角动量的增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ 等于角冲量 $\boldsymbol{M}\mathrm{d}t$，其方向与 $\boldsymbol{M}$ 相同；经过 $\mathrm{d}t$ 时间后，角动量变为 $L'=L+\mathrm{d}L$。根据矢量的平行四边形合成定则，L' 仍在水平面内，其方向绕 OO' 轴转过角度 $\mathrm{d}\varphi$(自上向下看为逆时针转动)，回转仪自转轴从 $\boldsymbol{L}$ 的方向转到 $\boldsymbol{L}'$ 方向，也就是说，回转仪自转轴绕 OO' 轴在水平面内沿此方向产生进动。由于回转仪的快速转动，角动量 $\boldsymbol{L}$ 的数值很大，但当时间间隔 $\mathrm{d}t$ 足够小，而外力矩 $\boldsymbol{M}$ 不太大时，$\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 比值很小，因此新的角动量 $\boldsymbol{L}'$ 和原来的角动量 $\boldsymbol{L}$ 的大小可看成近似相等，仅方向有所不同。这样，我们就定性地说明了回转仪的进动，即回转效应。进动角速度可由下式求得：

$$M\mathrm{d}t=\mathrm{d}L=L\mathrm{d}\varphi=I\omega\mathrm{d}\varphi$$

$$\Omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{M}{I\omega} \tag{6-37}$$

上式表明，进动角速度 Ω 与回转仪自转角速度 ω 成反比，自转越快，进动越慢。

容易发现，上述分析只是近似正确的。因为我们只考虑了回转仪的自转角动量，而实际上回转仪绕 OO' 轴进动时，其角动量不仅有绕自转轴的角动量，还应该包括整个回转仪绕 OO' 轴进动的角动量；其次，回转仪绕 OO' 轴进动时，肯定会产生与进动相关的动能，而由能量守恒定律可知，这意味着系统的势能或自转产生的转动动能必定发生变化。事实上，回转仪开始进动时，最初杆 AB 总要稍微倾斜一下，紧接着杆 AB 向上作进动。回转仪自转轴的这种上下振动称为章动。因此，自转轴 AB 绕 OO' 轴作进动的同时还在竖直平面内作章动，回转仪转得越快，章动振幅越小。此外，章动还会由于支点的摩擦力而减弱，所以实际问题中，章动通常不显著。可见，近似理论只适用于回转仪作快速转动，

且外力矩很小，即作纯进动的情况；否则运动情况要复杂得多。

根据同样的道理，我们很容易解释陀螺的进动现象，在这里不另加叙述了。

回转仪的回转效应在工程上得到广泛的应用。例如，炮弹或子弹在高速飞行中要受到空气阻力 F_f 的作用，空气阻力 F_f 一般不通过质心，这样空气阻力 F_f 相对于质心 C 产生的力矩很容易使弹头翻转而偏离飞行方向，从而不能很好地击中目标。因此，人们在炮膛和枪膛内壁刻制了螺旋形的来复线，以使炮弹或子弹出膛后绕自身的对称轴高速旋转。由于回转效应，空气阻力的力矩使炮弹转轴绕着前进方向进动（见图 6-22），使炮弹的自身轴线始终与其前进方向保持不太大的偏转。

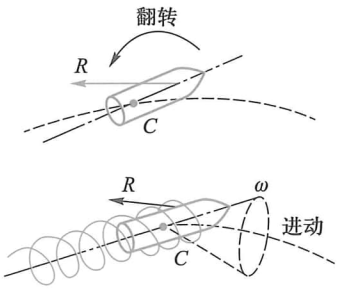


图 6-22　炮弹沿飞行方向进动

在航空和航海中广泛应用的回转罗盘也是根据回转效应原理制成的。回转罗盘实质上就是一个回转仪。回转仪在没有外力矩时，旋转方向不变。然而由于地球的自转，地球上的观测者会认为其转动方向发生改变，就如同傅科摆的摆动平面会旋转一样。如果恰好利用地球重力施加在回转罗盘的力矩，使回转仪的进动抵消地球的自转效应，就能使回转罗盘的自转轴稳定在地球子午线方向上。这样，罗盘就始终能够准确地指向北方了。

回转效应相当广泛地存在，有时也会产生有害的影响。例如，当轮船转向时，由于回转效应，进动产生的回转力矩将使涡轮机的轴承受到附加的压力，若轮船转弯时的进动角速度过大时，涡轮机轴承受到压力过大，就容易毁坏，因此，轮船一般不能急转弯。其他具有转动部件的行驶工具也有同样的问题。

NOTE

本章摘要

1. 刚体运动学：刚体的任何运动都可分解为两类基本的运动形式——平动和转动。

平动：运动过程中刚体上的任意直线始终保持平行。

转动：刚体上所有各点都绕转动轴作圆周运动，转动轴可以在刚体之外。

2. 刚体的质心运动

$$\boldsymbol{F}_{外}=m\boldsymbol{a}_c$$

3. 刚体的定轴转动

刚体相对定轴的角动量　$L_z=I\omega$

定轴转动定律　$M_{外z}=I\alpha$

NOTE

其中 $M_{外z}$ 是外力相对转轴的力矩的矢量和，I 为刚体对转轴的转动惯量。

转动惯量 $I=\sum_i \Delta m_i r_i^2$

平行轴定理 $I=I_c+md^2$

角冲量 $\int_0^t M_{外z}\mathrm{d}t = I\omega - I\omega_0$

力矩的功 $W=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\mathrm{d}\varphi$

刚体定轴转动的动能定理 $W=\frac{1}{2}I\omega_2^2-\frac{1}{2}I\omega_1^2$

4. 刚体的平面平行运动

（1）动力学方程

质心的平动 $\boldsymbol{F}_{外}=m\boldsymbol{a}_c$

绕质心的转动 $\boldsymbol{M}_{c外}=I_c\boldsymbol{\alpha}$

（2）机械能

动能 $E_k=\frac{1}{2}I_c\omega^2+\frac{1}{2}mv_c^2$

势能 $E_p=mgh_c$

5. 回转效应

回转仪：具有大转动惯量、以高速绕自身的对称轴转动的对称性刚体。

回转效应：回转仪受到外力矩作用时所产生的一种进动现象。

思考题

6-1 什么样的运动物体可视为刚体？刚体的主要运动特征是什么？为什么常采用角量来描述刚体的运动？

6-2 你自己身体的质心是固定在身体内的某一点吗？你能把你身体的质心移到身体的外面吗？

6-3 一轮盘绕通过其中心且与盘面垂直的固定轴转动。考虑盘边缘上的一点，试问：

（1）当轮盘以恒定角速度转动时，这一点是否具有法向加速度或切向加速度？

（2）当轮盘以恒定角加速度转动时，这点是否具有法向加速度或切向加速度？

（3）上述两种情况下这些加速度大小是否改变？

6-4 试问：（1）计算物体的转动惯量时，我们可否将物体的质量视为集中在质心处，当作质点来处理？（2）如果已知回转半径为 R_g，可否将质量集中在一点，将其转动惯量写为 $I=mR_g^2$？

6-5 用旋转鸡蛋的方法可区分熟蛋和生蛋，试说明之。

6-6 要使一根长铁棒保持水平，为什么握住中点比握住它的端点容易？

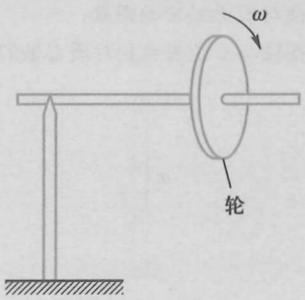
6-7 将一根直尺竖立在光滑的平面上，如果它倒下，其质心将经过一条怎样的轨迹？

6-8 汽车轮子在泥泞中打滑时，汽车速率 v 和车轮角速度 ω 是否满足 $v=\omega r$？为什么？

6-9 已知银河系中有一天体是均匀球体，其半径为 R，绕对称轴自转的周期为 T。由于引力凝聚，它的体积不断收缩，假定一万年后它的半径缩小为 r。试问一万年后，此天体绕对称轴自转的周期比现在大还是小？它的动能是增加还是减少？

6-10 一花样滑冰运动员做旋转动作，最初转动惯量为 I_0，角速度为 ω_0；然后他将两手收回至胸前，转动惯量和角速度分别为 I' 和 ω'。问转动过程中角动量是否守恒？转动动能是否守恒？如不守恒，如何解释？

6-11 如图所示，轮子以角速度 ω 转动，求此装置中轮子自转轴的进动方向。



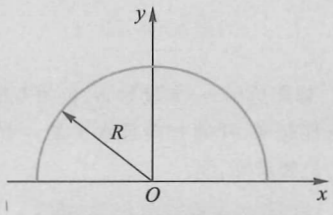
思考题 6-11 图

6-12 你骑自行车前进时，车轮的角动量指向什么方向？你身体向左倾斜时，对轮子施加了什么方向的力矩？试根据进动原理说明这时你的自行车为什么会向左转弯。

习题

6-1 一小船质量为 100 kg，船头到船尾的长度为 3.6 m，现有一质量为 50 kg 的人从船尾走到船头，不计水的阻力，问船在水中移动了多少距离？（提示：用系统质心方法求解）

6-2 如图所示，一质量均匀分布的细杆弯成半圆形，其半径为 R，求其质心的位置。

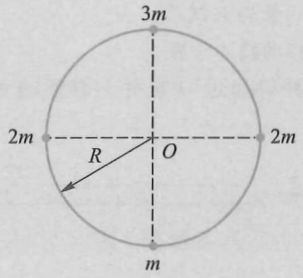


习题 6-2 图

6-3 如图所示，四个质点牢固地安装在很轻的圆形框架上，求：

（1）此系统对通过圆心并垂直纸面轴的转动惯量；

（2）绕通过此系统质心并垂直纸面轴的转动惯量。



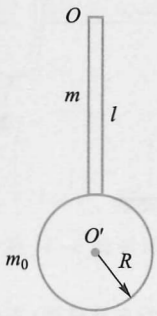
习题 6-3 图

6-4 一电机在达到 20 r · s^{-1} 的转速时电源关闭。若令电机仅在摩擦力矩的作用下减速，需 240 s 才停下来；若加上阻尼力矩 500 N · m，则在 40 s 内即可停止。试计算电机的转动惯量。

6-5 如图所示，钟摆可绕 O 轴转动。设细杆长 l，质量为 m；圆盘半径为 R，质量为 m_0。求：

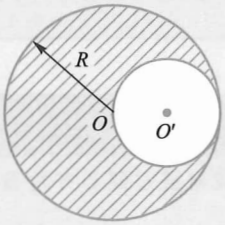
（1）钟摆对 O 轴的转动惯量；

（2）钟摆质心 C 位置和相对质心轴的转动惯量。



习题 6-5 图

6-6 如图所示，一大圆板内挖去一个直径为大圆板半径的圆孔，如果剩余部分质量为 m，求它对经过 O 点且与板平面垂直的轴的转动惯量。

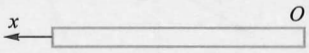


习题 6-6 图

6-7 如图所示，一直杆质量线密度为 $\lambda = kx$（其中 k 为常量），长为 l，试求：

（1）此杆的质心位置；

（2）此杆对通过 O 点并与杆垂直的轴的转动惯量。



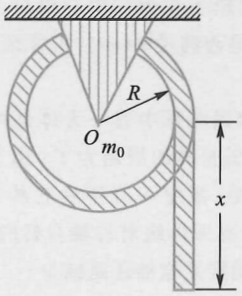
习题 6-7 图

6-8 一蒸汽机飞轮的质量为 200 kg，回转半径为 2 m，当此飞轮以 120 r · min^{-1} 的转速转动时，把蒸汽关闭：

（1）假定飞轮经 5 min 停止，试求由于轴上的摩擦而施于飞轮上的阻力矩；

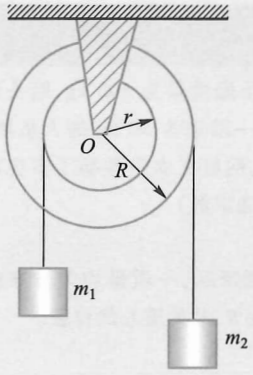
（2）在这段时间内，阻力矩所做的功等于多少？

6-9 一长为 l、质量为 m 的橡皮绳单层绕在一个滑轮上；滑轮的质量为 m_0，半径为 R，可绕固定轴自由转动。设绳悬挂在滑轮外，长度为 x，如图所示。试求滑轮转动时角加速度与 x 之间的关系式。（设绕在滑轮上那部分橡皮绳的质心恰好通过转轴，且绳与滑轮间无相对滑动）



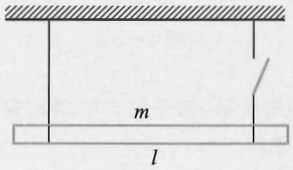
习题 6-9 图

6-10 如图所示，质量为 m_1 和 m_2 的两物体分别悬挂在两个不同半径的组合轮上，求物体的加速度和绳的张力。设两轮相对于轴的转动惯量分别为 I_1 和 I_2，半径为 r 和 R，轮和轴间摩擦不计。



习题 6-10 图

6-11 如图所示，一质量为 m、长为 l 的匀质杆两端用细线悬挂起来，杆的方向是水平的。若我们突然将杆右端的悬线剪断，问：



习题 6-11 图

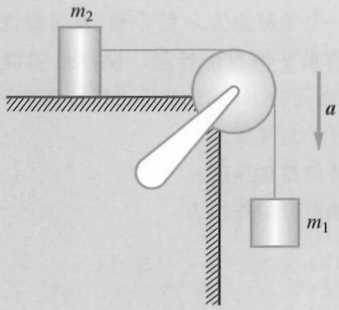
（1）在这瞬间杆将如何运动？

（2）另一根悬线上的张力如何？

6-12 如图所示，两物体的质量分别为 m_1 和 m_2；滑轮的转动惯量为 I，半径为 r。设绳的质量不计，且与滑轮无相对滑动。

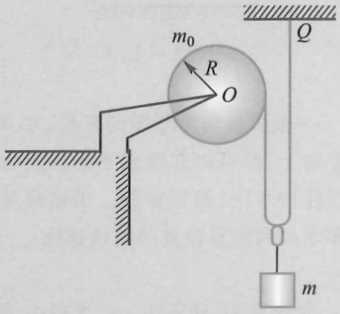
（1）如质量为 m_2 的物体与桌面间的滑动摩擦因数为 μ，求两物体加速度的大小 a 及它们所受绳的拉力 F_{T1} 和 F_{T2}；

（2）如果桌面光滑，求两物体的加速度 a 及拉力 F_{T1} 和 F_{T2}。



习题 6-12 图

6-13 如图所示，有一根轻绳绕在一圆盘上，圆盘质量 $m_0=0.60$ kg，半径 $R=0.08$ m；此绳另一端无摩擦地通过一小环，再悬挂在 Q 点。小环下悬挂一个质量为 $m=2.4$ kg 的物体，求物体 m 的加速度。



习题 6-13 图

6-14 假设地球为一质量不变的匀质实心球，现在其半径为 6 370 km。从对地球上三亿六千多万年前的珊瑚虫生长规律的分析，可推知当时地球一年有 480 天，试估算那时的地球半径。

6-15 机械冲床利用飞轮的转动动能通过曲柄联杆结构的传动，带动冲头在铁板上穿孔。已知飞轮的半径为 $r=0.4$ m，质量为 $m=600$ kg，可视为均匀圆盘。飞轮的正常转速为 $n_1=240\ \mathrm{r\cdot min^{-1}}$，冲一次孔转速减低 20%。求冲一次孔的过程中，冲头所做的功。

6-16 半径为 R、质量为 m 的匀质圆盘，放在粗糙桌面上，盘可绕竖直中心轴在桌面上转动，盘与桌面间的摩擦因数为 μ。设圆盘的初始角速度为 ω_0，问经过多长时间后，盘将停止转动？摩擦阻力共做了多少功？

6-17 有一个脉冲星（中子密聚而成）质量为 $m=1.5\times10^{30}$ kg，半径 $R=20$ km，自旋转速为 $2.1\ \mathrm{r\cdot s^{-1}}$，且以 $1.0\times10^{-15}\ \mathrm{r\cdot s^{-2}}$ 的变化率减慢。试问此时刻它的动能以多大的变化率减少？如果这一动能变化率保持不变，这个脉冲星约经过多长时间停止自转？（设脉冲星可视为匀质实心球）

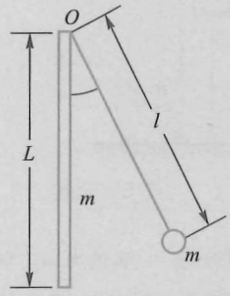
6-18 由于潮汐对海岸的摩擦作用，地球每经过一年，其自转周期将增加 3.5×10^{-5} s。假设地球对自转轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}m_eR^2$，m_e 为地球质量，$m_e=5.98\times10^{24}$ kg；R 是地球半径，$R=6.37\times10^6$ m，试问：

（1）地球每年自转动能减少多少？

（2）潮汐对地球的平均阻力矩多大？

$$\left(\text{提示：}\frac{\mathrm{d}E_k}{E_k}=2\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}=-2\frac{\mathrm{d}T}{T}\right)$$

6-19 一长为 L、质量为 m 的均匀细棒一端悬挂在 O 点上，可绕水平轴无摩擦地转动；在同一悬挂点，有长为 l 的轻绳悬挂一小球，质量也为 m。当小球悬线偏离竖直方向某一角度时，由静止释放（如图所示），



习题 6-19 图

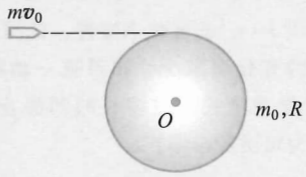
则小球在悬点正下方与静止的细棒发生完全弹性碰撞。问当绳的长度为多少时，小球与棒碰撞后，小球刚好静止？（略去空气阻力）

6-20 设一圆盘质量为 m_0，半径为 R，可绕通过中心并垂直于盘面的固定水平轴转动。开始时，圆盘处于静止状态。现有一质量为 m 的子弹以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 水平地射向圆盘边缘，如图所示。问：

（1）当子弹嵌入圆盘边缘时，圆盘的角速度为多少？

（2）当子弹与圆盘边缘相擦而过，子弹速度变为 $\boldsymbol{v}_1$ 时，圆盘的角速度为多少？

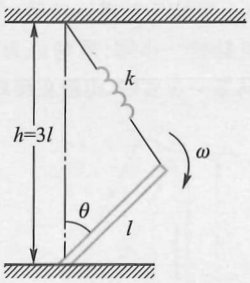
（3）两种情况下能量是否守恒？



习题 6-20 图

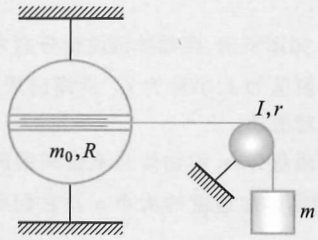
6-21 一质量为 m 的人站在质量为 m_0、长为 l 的竹筏（可视作均匀细杆）的一端，竹筏静止在河水中，水的阻力可忽略。若人以速度 v（相对于河岸）沿垂直于竹筏的方向跳出，试求竹筏获得的角速度。

6-22 一弹性系数为 k 的轻弹簧与一均匀细棒相连。如图所示，细棒的质量为 m，长度为 l。当 $\theta=0°$ 时，弹簧无伸长，试问细棒的角速度 ω 至少应为多大才能使棒从 $\theta=0°$ 的位置转到水平位置？



习题 6-22 图

6-23 如图所示，一质量为 m_0、半径为 R 的均匀球体赤道上绕有轻绳，绳的另一端跨过转动惯量为 I、半径为 r 的定滑轮，悬挂一个质量为 m 的物体。设均匀球可绕通过球心的光滑竖直轴转动。物体 m 也由静止开始向下运动，试求物体向下运动距离为 h 时的速度。



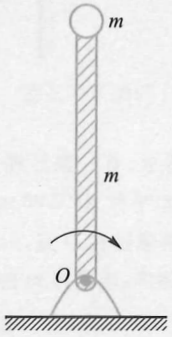
习题 6-23 图

6-24 如图所示，一质量为 m、长为 l 的均匀细杆上端连接一个质量也为 m 的小球，杆可绕通过下端并与杆垂直的水平轴自由转动。设杆最初静止于竖直位置，受扰动而往下转动，试求当杆转到水平位置时：

（1）杆的角速度；

（2）杆的角加速度；

（3）轴对杆的作用力。



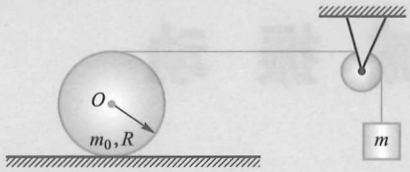
习题 6-24 图

6-25 一根质量均匀分布的米尺，在 60 cm 刻度处钻孔钉在墙上，并可以在竖直平面内自由转动。先用手使米尺保持水平，然后释放。求刚释放时米尺的角加速度和米尺到竖直位置时的角速度。

6-26 如图所示，质量为 m_0、半径为 R 的匀质圆柱体放在粗糙的水平面上，圆柱体的外侧绕有细绳，绳子跨过一个质量忽略不计的小滑轮，并挂上一质量为 m 的物体。设圆柱体在地面只滚不滑，并且圆柱体与滑轮之间的绳子是水平的。

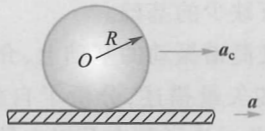
（1）求圆柱体的质心加速度 a_c、物体的加速度 a 和绳子的张力 F_T；

（2）当物体从静止开始释放，下落距离为 h 时，圆柱体转动的角速度为多大？



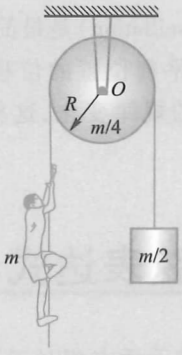
习题 6-26 图

6-27 在一个表面很粗糙的平板上放有一个匀质的实心球，球的半径为 R，只能在平板上作做纯滚动。设用力拉此平板，并使其有一加速度 a，则该球相对于地面的质心加速度 a_c 应为多大？



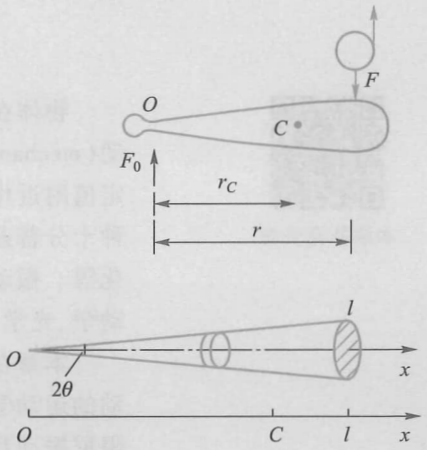
习题 6-27 图

6-28 一轻绳绕过一半径为 R、质量为 $m/4$ 的滑轮（绳子与滑轮之间无相对滑动）。质量为 m 的人抓住了该绳子的一端，而绳的另一端系了一个质量为 $m/2$ 的重物，如图所示。当人相对绳子匀速上爬时，则此重物上升的加速度是多大？



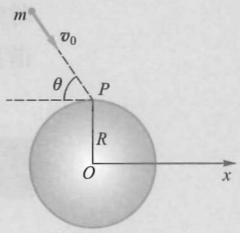
习题 6-28 图

6-29 棒球运动员在击球瞬间，手掌也常常会受到一个很大的冲击力，冲击力最小的击球位置常称为打击中心。试确定棒球杆的打击中心位置。为计算方便，可将棒球杆视为圆锥棒处理。（假设圆锥棒的长度为 l，顶角为 2θ）



习题 6-29 图

6-30 质量为 m_0、半径为 R 的匀质圆盘可绕通过其中心 O 且与盘面垂直的光滑固定轴在竖直平面内旋转，如图所示。有一黏土块（质量为 m）以初速度 v_0 斜射在静止的圆盘顶端 P 点，并与圆盘黏在一起。v_0 与水平面的夹角为 $\theta=60°$，$m_0=2m$。求：当圆盘上 P 点转到与水平 x 轴重合的位置时，圆盘的角速度和轴 O 对圆盘的作用力。



习题 6-30 图

习题答案

第七章　机械振动



本章补充资源

物体在平衡位置附近所作的周期性的往复运动称为机械振动(mechanical vibration)。从广义上讲,任何一个物理量在某一定值附近作周期性变化,都可称为振动。振动又称为振荡,是一种十分普遍的运动形式,例如钟表的摆动,交流电路中电流的变化等。振动理论是机械原理、建筑力学、电工学、无线电技术、波动学、光学、原子物理学等不可缺少的基础。

本章在以余弦表达式定义简谐振动的基础上,介绍了简谐振动的运动学和动力学以及旋转矢量描述,分析了自由简谐振动、阻尼振动和受迫振动的特点,并讨论了两个及以上的简谐振动的合成。

7-1　简谐振动

NOTE

简谐振动(simple harmonic oscillation)是最简单、最基本的振动形式。物体运动时,如果离开平衡位置的位移(或角位移)随时间按余弦函数(或正弦函数)的规律变化,这种运动就称为简谐振动或谐振动。

1. 简谐振动的余弦表达式

质点作简谐振动时,若以 x 表示质点相对于平衡位置的位移(取平衡位置为坐标原点,x 就是质点的位置坐标),则简谐振动的余弦表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \tag{7-1}$$

式中,A 称为振幅(amplitude),是物体离开平衡位置的最大位移;ω 称为角频率(angular frequency),φ 称为初相(initial phase)。

质点作简谐振动时,其速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=-v_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)=v_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{7-2}$$

式中 $v_{\mathrm{m}}=\omega A$，称为速度振幅，是物体速度的最大值。质点的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)=-a_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)=a_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi+\pi) \tag{7-3}$$

式中 $a_{\mathrm{m}}=\omega^2 A$，称为加速度振幅，是物体加速度的最大值。由(7-1)式和(7-3)式可以看出，质点作简谐振动时，其位移和加速度大小成正比，方向相反，即

$$a=-\omega^2 x$$

质点作简谐振动时，其位移、速度和加速度都是时间的周期函数。图 7-1 中作出了 $\varphi=0$ 时的 $x-t$、$v-t$ 和 $a-t$ 图线，其中 $x-t$ 图线称为简谐振动曲线。

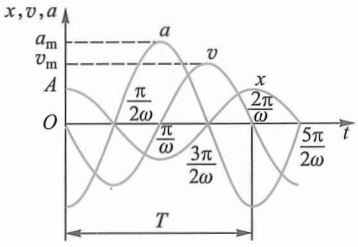


图 7-1 简谐振动曲线($\varphi=0$)

2. 描述简谐振动的物理量

NOTE

简谐振动的时间周期性，用周期(period)和频率(frequency)描述。振动物体完成一次完全振动所需的时间称为简谐振动的周期，用 T 表示。由图 7-1 可以看出 $T=\frac{2\pi}{\omega}$。单位时间内物体所作的完全振动的次数称为简谐振动的频率，用 ν 表示。因为频率等于周期的倒数，即 $\nu=\frac{1}{T}$，所以

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu \tag{7-4}$$

上式表明，ω 是 2π 秒时间内物体所作的完全振动的次数，称为简谐振动的角频率。

根据(7-4)式，简谐振动的余弦表达式又可写作

$$x=A\cos(2\pi\nu t+\varphi)=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) \tag{7-5}$$

国际单位制中，A 的单位是米(m)，T 的单位是秒(s)，ν 的单位是赫[兹](Hz)，ω 的单位是弧度每秒(rad/s 或 s^{-1})。

质点的机械运动状态由其位置和速度(动量)确定。在一个周期内，作简谐振动的物体其运动状态在任何时刻都不相同；相隔一个周期的两时刻，物体的运动状态相同。为了描述作简谐振

动物体的运动状态，同时又能反映其运动状态变化的周期性，引入物理量 $\omega t+\varphi$，称为时刻 t 简谐振动的相位(phase)，简称相。其中 φ 是 $t=0$ 时刻的相，称为初相。由(7-1)式和(7-2)式可以看出，在振幅 A 和角频率 ω 确定的情况下，简谐振动的运动状态由相位确定。国际单位制中，相位的单位是弧度(rad)。

3. 简谐振动的旋转矢量表示法

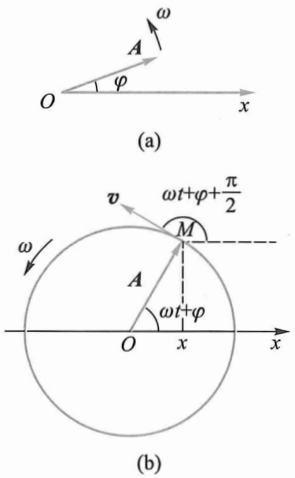


图 7-2 旋转矢量表示法

旋转矢量表示法可以形象地描述简谐振动的三个特征量：A、ω 和 φ，是简谐振动的一种重要的描述方法。如图 7-2(a)所示，自原点 O 作一矢量 $\boldsymbol{A}$，使其长度等于简谐振动的振幅的量值，$t=0$ 时 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角等于简谐振动的初相 φ 的量值。令矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿逆时针方向绕通过 O 点的竖直轴作匀角速度旋转，其角速度大小等于简谐振动角频率 ω 的量值，则在任意时刻 t，$\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角等于简谐振动的相位 $\omega t+\varphi$ 的量值，$\boldsymbol{A}$ 沿 x 轴的分量 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 表示简谐振动。$\boldsymbol{A}$ 旋转一周的时间等于简谐振动的周期 T。$\boldsymbol{A}$ 称为旋转矢量，简谐振动的这种表示方法称为旋转矢量表示法，又称振幅矢量法。

当 $\boldsymbol{A}$ 匀速旋转时，其矢端 M 作匀速圆周运动，其轨道圆称为参考圆，M 点称为参考点。如图 7-2(b)所示，在时刻 t，M 点的 x 坐标为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

NOTE

M 点的速度 $\boldsymbol{v}$ 的 x 分量为

$$v=-v_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)=\omega A\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

这正是简谐振动的速度。可见，旋转矢量表示法是借助匀速圆周运动来研究简谐振动的。旋转矢量法的优点是实现了用图像表示相位。

4. 简谐振动曲线与旋转矢量图的对应关系

现以 $x=A\cos(\omega t+\pi/4)$ 为例来说明这种对应关系。图 7-3 左侧是旋转矢量图，右侧是简谐振动曲线，左、右两图的 x 轴平行，且左图中原点 O 在右图 x 轴的延长线上。初始时刻，旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角 $\varphi=\pi/4$。因为 $\boldsymbol{A}$ 以匀角速度 ω 按逆时针方向

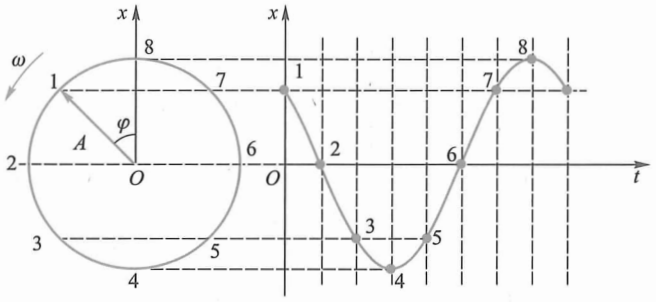


图 7-3 旋转矢量图与简谐振动曲线的对应关系

旋转，旋转一周的时间为周期 T，所以每经过 $T/8$ 时间，A 旋转的角度为 $\pi/4$，即简谐振动的相位增加 $\pi/4$。从位置 1 开始，参考点依次经过 2,3,4,…各点。与此相对应，在 $x-t$ 图的 t 轴上将周期 T 分成八等分，每经过一个分点作平行于 x 轴的竖直线，这些竖直线与简谐振动曲线的交点依次为 1,2,3,…各点，它们分别与参考点的相应位置对应，连接对应点的虚线平行于 t 轴。

在旋转矢量图中，简谐振动速度 v 的正负由参考点速度 $\boldsymbol{v}$ 在 x 轴上投影的正负决定。由图 7-2(b)可以看出：当 $\varphi \in (0,\pi)$ 时，$v_0<0$；$\varphi \in (\pi,2\pi)$ 时，$v_0>0$；$\varphi=0$ 或 π 时，$v_0=0$。在 $x-t$ 图中，v 的正负由简谐振动曲线斜率的正负决定。

NOTE

5. 相位差

相位是相对的。对于单个简谐振动来说，我们总可以选择适当的计时零点，使初相 φ 为零；对于多个简谐振动来说，它们之间的相位差 $\Delta\varphi$ 起重要作用。两个同频率的简谐振动在同一时刻的相位差恒等于它们的初相差，即

$$\Delta\varphi=(\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)=\varphi_2-\varphi_1 \tag{7-6}$$

当 $\Delta\varphi$ 为零或 2π 的整数倍时，两振动的步调一致，称这两个振动同相；当 $\Delta\varphi$ 为 π 或 π 的奇数倍时，两振动的步调相反，称这两个振动反相；当 $\Delta\varphi$ 为其他值时，称两个振动不同相或不同步。当 $\varphi_2>\varphi_1$ 时，称振动 2 比振动 1 超前，或称振动 1 比振动 2 落后，如图 7-4 所示；当 $\varphi_2<\varphi_1$ 时，称振动 2 比振动 1 落后，或称振动 1 比振动 2 超前。超前与落后是时间先后的概念，两个不同步的振动到达同一运动状态是有先后的。从图 7-4(a)可以看出：当 $\varphi_2>\varphi_1$ 时，旋转矢量 $\boldsymbol{A}_2$ 先到达 M 点，而旋转矢量 $\boldsymbol{A}_1$ 后到达该点。从图 7-4(b)可以看出：振动 2 到达该状态的时刻 t_2 小于振动 1 到达该状态的时刻 t_1，即 $t_2<t_1$，由两振动到达同一状态的等式

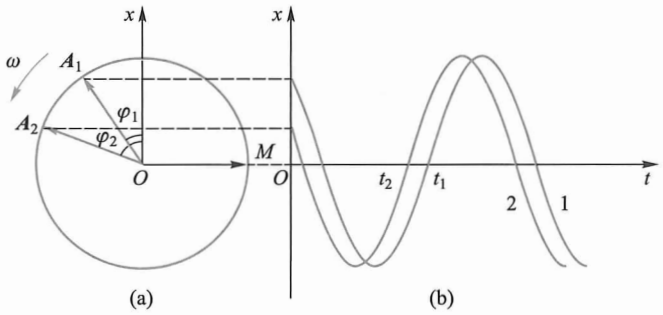


图 7-4 振动 2 比振动 1 超前

$$\omega t_2+\varphi_2=\omega t_1+\varphi_1$$

NOTE

可得出

$$t_2-t_1=\frac{1}{\omega}(\varphi_1-\varphi_2)$$

上式表明，当 $t_2<t_1$ 时，$\varphi_2>\varphi_1$，这是振动 2 比振动 1 超前的情况。

由(7-1)式、(7-2)式和(7-3)式可以看出：物体作简谐振动时，其位移比速度相位落后 $\pi/2$，加速度比速度相位超前 $\pi/2$，位移与加速度反相。

7-2 自由简谐振动

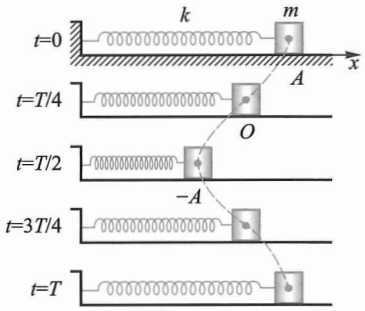


图 7-5 水平放置的弹簧振子

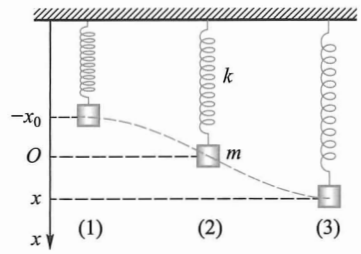


图 7-6 竖直悬挂的弹簧振子

(1)弹簧无形变；(2)平衡位置；(3)任意位置

系统在不受外界影响且阻尼可以忽略的情况下的振动称为自由振动，自由振动又称固有振动或无阻尼振动。本节以弹簧振子和复摆为例研究自由简谐振动。

1. 弹簧振子

弹簧振子是由一根质量可以忽略不计的轻弹簧和一个物体所构成的振动系统。弹簧的一端固定，另一端与物体相连接，如图 7-5 所示。当弹簧振子水平放置时，忽略物体所受的摩擦力和空气阻力等，将物体稍作移动后放手，则物体将在平衡位置附近作自由简谐振动。物体处在平衡位置时，其所受的合外力为零。取平衡位置为坐标原点 O，则物体相对于平衡位置的位移为 x 时，物体所受的合外力为

$$F=-kx$$

式中，F 是弹簧的弹性力，x 是弹簧的形变量，k 是弹簧的弹性系数。

当弹簧振子竖直悬挂放置时，物体将受到弹簧的弹性力和重

NOTE

力的共同作用。如图 7-6 所示,取物体平衡位置为坐标原点,竖直向下为 x 轴正向,弹簧无形变时,其活动端的位置为 $-x_0(x_0>0)$。当物体处于平衡位置时,弹簧的伸长量为 x_0,弹簧的弹性力 $-kx_0$ 和重力 mg 等值反向,因而有

$$mg-kx_0=0$$

当物体处于任意位置 x 时,其所受合外力为

$$F=mg-k(x+x_0)=mg-kx-kx_0=-kx \tag{7-7}$$

F 是重力和弹簧弹性力的合力,x 是物体相对于平衡位置的位移,$x+x_0$ 为弹簧的形变量。

由此可见,弹簧振子所受的合外力和弹簧的弹性力虽形式相同,都是 $F=-kx$,但含义不同。为了区别起见,我们称弹簧振子所受的合外力为线性回复力。所谓“线性”是指合外力与物体相对于平衡位置的位移 x 的一次方成正比;所谓“回复”是指合外力的方向始终指向平衡位置。线性回复力和弹簧的弹性力的区别是:前者是物体所受的合外力,后者是单个力;前者的参考点是平衡位置,x 是物体相对于平衡位置的位移,后者的参考点是弹簧自然伸展状态的活动端,x 是弹簧的形变量。虽然对水平放置的弹簧振子来说两者一致,但对竖直放置的弹簧振子而言两者不同。

将(7-7)式代入牛顿第二定律,得物体的运动方程为

$$-kx=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

对于给定的弹簧振子,k 和 m 都是常量,而且都取正值,故令 $\omega_0^2=\frac{k}{m}$,由上式得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega_0^2x \tag{7-8}$$

该微分方程解的形式之一为

$$x=A\cos(\omega_0t+\varphi) \tag{7-9}$$

上式表明,弹簧振子作简谐振动,其角频率

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7-10}$$

由振动系统本身性质决定,称为固有角频率。(7-8)式称为自由简谐振动的运动方程或称自由简谐振动方程,若能建立起(7-8)式,即可求出固有角频率。

固有简谐振动的振幅和初相可由初始条件确定。设 $t=0$ 时,$x=x_0$,$v=v_0$,则由(7-1)式和(7-2)式得

$$\begin{cases}x_0=A\cos\varphi\\ v_0=-\omega_0A\sin\varphi\end{cases} \tag{7-11}$$

可解出

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \tag{7-12}$$

$$\tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \tag{7-13}$$

2. 复摆

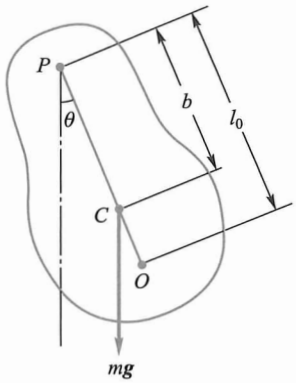


图 7-7 复摆

一个在重力作用下能绕固定水平轴自由摆动的刚体称为复摆，又称物理摆(physical pendulum)。如图 7-7 所示，刚体绕水平轴 P 摆动，其质量为 m，对 P 轴的转动惯量为 I，质心 C 到 P 轴的垂直距离为 b，某时刻其摆角为 θ，相对于转轴 P 的重力矩为 $M=-mgb\sin\theta$，负号表示力矩 M 与摆角 θ(相对于平衡位置的角位移)方向相反。M 的作用是使复摆回复到平衡位置，但这是非线性力矩，M 与 θ 并不成线性关系，故一般情况下，刚体不作简谐振动。只有当摆角较小，可认为 $\sin\theta\approx\theta$ 时，合外力矩为

$$M\approx-mgb\theta \tag{7-14}$$

这是线性回复力矩，对刚体应用定轴转动定律，有

$$-mgb\theta=I\alpha=I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

NOTE

由此得复摆的运动微分方程为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{mgb}{I}\theta \tag{7-15}$$

这是固有简谐振动方程。对照(7-8)式，得复摆的固有角频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{mgb}{I}} \tag{7-16}$$

(7-15)式解的形式之一为

$$\theta=\theta_m\cos(\omega_0 t+\varphi) \tag{7-17}$$

上式表明：复摆作简谐振动，式中 θ_m 是最大角位移，即 θ 的振幅。复摆的角速度为

$$\Omega=\frac{d\theta}{dt}=-\omega_0\theta_m\sin(\omega_0 t+\varphi)=\Omega_m\cos\left(\omega_0 t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{7-18}$$

式中 $\Omega_m=\omega_0\theta_m$ 是角速度振幅。复摆的角加速度为

$$\alpha=\frac{d\Omega}{dt}=-\omega_0^2\theta_m\cos(\omega_0 t+\varphi)=\alpha_m\cos(\omega_0 t+\varphi+\pi) \tag{7-19}$$

式中 $\alpha_m=\omega_0^2\theta_m$ 是角加速度振幅。应该注意区别摆角 θ 与初相 φ、

角速度 Ω 与角频率 ω_0。

NOTE

在固有简谐振动中，振幅和初相也可由初始条件确定。设 $t=0$ 时，$\theta=\theta_0$，$\Omega=\Omega_0$，则由(7-17)式和(7-18)式得

$$\theta_0=\theta_m\cos\varphi,\quad \Omega_0=-\omega_0\theta_m\sin\varphi \tag{7-20}$$

由此可解出

$$\theta_m=\sqrt{\theta_0^2+\frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2}},\quad \tan\varphi=-\frac{\Omega_0}{\omega_0\theta_0} \tag{7-21}$$

单摆(simple pendulum)可以视为复摆的特例，单摆的摆长 l 就是摆锤的质心到转轴的垂直距离 b，摆锤对转轴的转动惯量 $I=ml^2$，故由(7-16)式得单摆的固有角频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{mgl}{ml^2}}=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

复摆的角频率相当于摆长 $l_0=\dfrac{I}{mb}$ 的单摆的角频率，通常把 l_0 称为复摆的等值摆长。在刚体上延长 PC 到 O 点，如图 7-7 所示，使 $|PO|=l_0$，称 O 点为振动中心。对于任何复摆，其悬置中心 P 和振动中心 O 是可以互换的，称 P 点和 O 点为一对共轭点。复摆可用来准确地测定重力加速度。

从弹簧振子和复摆的讨论可以看出，固有简谐振动方程可统一表示为

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=-\omega_0^2\xi \tag{7-22}$$

其解的形式之一为

$$\xi=A\cos(\omega_0 t+\varphi) \tag{7-23}$$

式中 ξ 代表某一物理量，它可以是位移 x 或角位移 θ，也可以是电荷 q 或电流 I 等。

例 1

已知简谐振动的固有角频率 $\omega_0=2\ s^{-1}$，初始条件 $x_0=1\ m$，$v_0=2\ m/s$，试确定简谐振动的初相。

解 用三角函数求解，式中各量采用 SI 单位。将初始条件和 ω_0 值代入(7-11)式，得

$$1=A\cos\varphi,\quad 2=-2A\sin\varphi$$

因此有

$$\sin\varphi=-\frac{1}{A}<0,\quad \tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=-1$$

由上两式可确定

$$\varphi=-\frac{\pi}{4}$$

例 2

已知某简谐振动曲线如图 7-8(a)所示,试写出该简谐振动的余弦表达式。

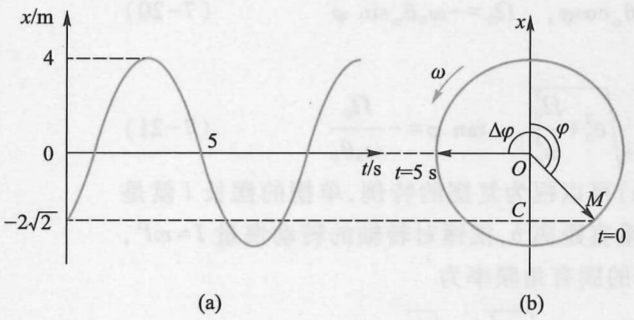


图 7-8 用旋转矢量表示法确定周期

解 用旋转矢量表示法求解。根据简谐振动曲线与旋转矢量图的对应关系,画出 $t=0$ 和 $t=5$ s 时的旋转矢量位置,如图 7-8(b)所示。由直角三角形 MCO 知,$\angle COM=\dfrac{\pi}{4}$,所以初相

$$\varphi=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{4}\pi$$

因此,在前 5 s 时间内,旋转矢量转过的角度为

$$\Delta\varphi=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$$

因为旋转矢量旋转一周的时间为周期 T,相位改变为 2π,故周期为

$$T=\frac{2\pi}{\Delta\varphi}\Delta t=\frac{2\pi}{5\pi/4}\times 5\ \text{s}=8\ \text{s}$$

由(7-5)式得简谐振动的余弦表达式为

$$x=4\cos\left(\frac{2\pi}{8}t-\frac{3}{4}\pi\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{3}{4}\pi\right)\ (\text{SI 单位})$$

例 3

如图 7-9 所示的物体系中,定滑轮的转动惯量为 I,半径为 R。弹簧的弹性系数为 k。斜面上物体的质量为 m,斜面的倾角为 θ。转轴 O 和斜面光滑无摩擦。绳不可伸长,其质量可忽略,绳与滑轮间无相对滑动。将物体 m 从平衡位置稍作移动后释放,整个系统进入振动状态。求振动系统的固有角频率。

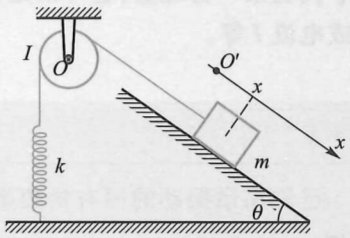


图 7-9 定轴转动刚体和质点联动作简谐振动

解 用牛顿第二定律和刚体定轴转动定律求解。当物体、滑轮和弹簧组成的系统处于平衡状态时,选物体 m 的平衡位置为坐标原点 O',取沿斜面向下为 x 轴的正方向,如图 7-9 所示。因为物体 m 平衡时弹簧已伸长,并设平衡时弹簧伸长量为 x_0,则有

$$mg\sin\theta=kx_0 \qquad (1)$$

当物体 m 从平衡位置沿斜面向下运动 x 时,

由牛顿第二定律，物体 m 的运动方程为

$$mg\sin\theta - F_T = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2}$$

考虑到物体 m 运动时，绳子不伸长，故当物体 m 沿斜面向下运动 x 时，弹簧的总伸长量为 x_0+x，于是根据刚体定轴转动定律，有

$$F_T R - k(x_0+x)R = I\alpha \tag{3}$$

因绳与滑轮间无相对滑动，有

$$\frac{d^2x}{dt^2} = R\alpha \tag{4}$$

由(1)式—(4)式联立得

$$-kx = \left(m+\frac{I}{R^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2}$$

这是固有简谐振动方程，因此固有角频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m+(I/R^2)}} = \sqrt{\frac{kR^2}{mR^2+I}}$$

7-3 自由简谐振动的能量

本节以弹簧振子为例，讨论自由简谐振动的机械能。

NOTE

1. 势能

自由简谐振动中线性回复力是保守力，令系统处于平衡状态时势能为零，则势能

$$U = \int_x^0 -kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 \tag{7-24}$$

与弹性势能形式相同，但应明确这是两个不同的概念。上式中 x 表示相对于平衡位置的位移，而弹性势能中 x 表示弹簧的形变量；自由简谐振动势能是线性回复力对应的势能，是合外力对应的势能，对于竖直悬挂的弹簧振子，线性回复力是弹簧的弹性力和重力之和，这时，(7-24)式包括了弹性势能和重力势能。

将(7-9)式代入(7-24)式，得自由简谐振动中势能为

$$U = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi) \tag{7-25}$$

上式表明，势能随时间作周期性变化，变化周期是简谐振动周期的一半。

NOTE

2. 动能

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0t+\varphi)$$

由(7-10)式得 $m\omega_0^2=k$,因此动能为

$$E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0t+\varphi) \tag{7-26}$$

上式表明,自由简谐振动中动能随时间作周期性变化,变化周期是简谐振动周期的一半。

3. 自由简谐振动的机械能

$$E=U+E_k=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0t+\varphi)+\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0t+\varphi)=\frac{1}{2}kA^2 \tag{7-27}$$

上式表明,自由简谐振动系统的机械能守恒,且能量与振幅的平方成正比。由此可见,简谐振动的振幅是表征其能量的物理量。

4. 用能量法建立固有简谐振动方程及求固有角频率

固有简谐振动系统机械能守恒。对于平动,有

$$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2=常量 \tag{7-28}$$

上式对 t 求一阶导数,得

$$kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$$

因为 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$,所以上式消去 v 后化为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k}{m}x=-\omega_0^2x$$

由此可见,只要能写出机械能守恒方程(7-28)式,通过对 t 求导数就能得到固有简谐振动方程,且由(7-28)式中位移平方项系数 k 和速度平方项系数 m 可确定固有角频率 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$。

7-4 阻尼振动 受迫振动 共振

1. 阻尼振动

NOTE

自由简谐振动系统的能量守恒表明：系统一旦作自由简谐振动，就将永远振动下去。这是一种理想的情况。实际上，由于阻尼作用，振动系统的能量将不断减少，振动将逐渐衰减。振动系统的阻尼通常分为两种：一种是摩擦阻尼，由于存在摩擦阻力，振动系统的能量将逐渐转化为热能；另一种是辐射阻尼，由于引起周围介质的振动，振动系统的能量向四周辐射出去，转变为波的能量。例如，音叉振动时，一方面受空气阻力，另一方面辐射声波，因此能量逐渐减少，振动逐渐衰减。

一般情况下，摩擦阻力中以黏性阻力为主，而由辐射引起的阻力的作用也常与黏性阻力相似，因此我们只讨论黏性阻力的作用。实验指出，当运动物体的速度不太大时，物体受到的黏性阻力与速度成正比，其方向与速度相反，即 $F_f=-\gamma v=-\gamma\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，式中 γ 为正的比例常量，其大小取决于物体的形状、大小、表面状况和介质的性质。物体在线性回复力和上述黏性阻力作用下的运动方程为[①]

$$-kx-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{7-29}$$

当阻尼较小时，物体作如图 7-10 中图线 a 所示的阻尼振动（damped vibration），这种情况称为弱阻尼；若阻尼过大，能量迅速减少，系统连一次振动也未完成就趋于平衡位置，如图 7-10 中图线 b 所示，这种情况称为过阻尼；如果阻尼大小正好使系统回到平衡位置而不作振动，如图 7-10 中图线 c 所示，这种情况称为临界阻尼。与弱阻尼和过阻尼情况相比，在临界阻尼情况下，物体

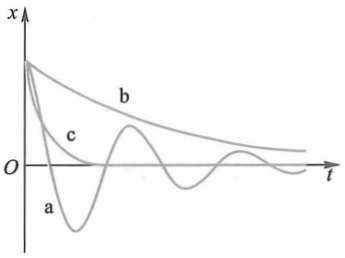


图 7-10 三种阻尼的比较（a 为弱阻尼，b 为过阻尼，c 为临界阻尼）

① 这个方程可以采用试探解 $x=Ae^{-zt}$，代入(7-29)式得到 $mz^2-\gamma z+k=0$，解得 $z=\dfrac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4mk}}{2m}$。

当 $\gamma^2\geqslant 4mk$ 时，z 是一个正实数，因此 x 随时间单调趋于零，就是图 7-10 中 b、c 的情况。当 $\gamma^2<4mk$ 时，z 是一个复数，由于(7-29)式关于 x 是线性的，所以 x 的实部也是方程的解，这时

$$x=Ae^{-\gamma t/2m}\cos\omega t,\quad \omega=\sqrt{4mk-\gamma^2}/2m$$

因此是一个振幅随时间衰减的振荡，对应于图 7-10 中的图线 a。

NOTE

从运动趋于平衡所需的时间最短。物理实验中，将灵敏电流计两端短接，可使其指针很快回到零位，就是利用电磁阻尼作用的结果。

2. 受迫振动

只受线性回复力和黏性阻力作用的振动系统，其振幅总是随时间衰减的。为了使振动持久而不衰减，可以利用外界驱动力。它们主要有周期力和单方向的力两种，其中用周期力驱动的振动，称为受迫振动(forced vibration)。

设周期性驱动力为 $F=H\cos(\omega t)$，则受迫振动的运动方程为①

$$-kx-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+H\cos(\omega t)=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{7-30}$$

受迫振动开始时的情况比较复杂，驱动力有时对物体做正功(当其方向与物体速度方向一致时)，有时做负功(当其方向与速度方向相反时)，而阻尼力始终做负功，但是开始时总的趋势是振动系统的能量逐渐增大，振动加强。随着振动加强，阻尼也加强，系统因阻尼而损耗的能量也增多。经过一定时间后，在一个周期时间内，当驱动力所做的功正好等于阻尼所损耗的能量时，受迫振动达到稳定状态，振动系统作简谐振动，称为受迫振动定态。它与固有简谐振动不同：其角频率不是由系统本身性质决定的，而是等于驱动力的角频率；其 A 和 φ 与受迫振动的初始条件无关，而与系统本身性质和驱动力有关。

---

① 这个方程我们可以先把它写成复数方程：

$$-kx-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+H\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

和式(7-29)类似，寻找一个特解：

$$x=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

代入方程得到 $-kA-\mathrm{i}\gamma\omega A+H=-m\omega^2A$。解得

$$A=\frac{H/m}{\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{i}\gamma\omega/m},\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

同样，解的实部

$$x=\mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})=A_0\cos(\omega t+\varphi_0),A_0=\frac{H/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega/m)^2}}$$

是原方程的解，其中 φ_0 是由振幅引起的相位。当外力频率为

$$\omega^2=\omega_0^2-\gamma^2/(2m^2)$$

时，振幅最大。顺便提一下，(7-30)式还有一个以固有频率作阻尼振动的通解，这个解在足够长时间后等于零。

3. 共振

NOTE

当驱动力的角频率等于振动系统的固有角频率时，受迫振动定态的速度振幅达最大值，这种现象称为速度共振（resonance）。速度共振时，驱动力与物体振动的速度同相，这表明驱动力始终对振动系统做正功，驱动力的输入功率达最大。速度共振时，驱动力的输入功率始终等于阻尼力的输出功率，即受迫振动系统的机械能守恒。

当驱动力的角频率为 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$ 时（式中 $\delta=\gamma/2m$ 称为阻尼系数），受迫振动定态的振幅 A 达最大值，这种现象称为位移共振。

共振现象在声学、无线电电子学、光学和原子物理学等领域都有广泛的应用。例如，收音机利用电磁共振选台，一些乐器利用共振提高音响效果，核内的核磁共振被用来进行物质结构的研究和进行医疗诊断等。但共振也会产生不利的影响，例如，共振时因振幅过大会造成机器设备的损坏。可通过改变振动系统的固有频率、驱动力的频率或阻尼大小来控制共振现象。

7-5 简谐振动的合成

1. 两个同方向、同频率简谐振动的合成

一个质点的振动通常情况下是受外力驱动的。如(7-30)式所示，受到一个外力驱动的质点振动方程为

$$-kx_1-\gamma\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+H_1\cos(\omega_1 t)=m\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}$$

x_1是这个方程的解。如果同样的质点受到另外一个外力驱动，则满足方程

$$-kx_2-\gamma\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}+H_2\cos(\omega_2 t)=m\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}$$

x_2是方程的解。注意这两个方程除了外力，其他都是一样的。现在问：如果这个质点同时受到这两个外力驱使，其振动形式是什

NOTE

么呢？我们把上面两个方程相加，得到

$$-k(x_1+x_2)-\gamma\frac{\mathrm{d}(x_1+x_2)}{\mathrm{d}t}+H_1\cos(\omega_1 t)+H_2\cos(\omega_2 t)=m\frac{\mathrm{d}^2(x_1+x_2)}{\mathrm{d}t^2}$$

因此，x_1+x_2是同时施加两个外力的结果。这是线性振动的叠加原理，源于运动方程是线性的。振动的叠加原理是后面波的叠加原理的基础。上述情况是一维的，但是适合所有维度的情况。下面我们分几种特殊的情况，讨论叠加的结果。

设一质点同时参与两个同方向、同频率的简谐振动，它们的余弦表达式分别为

$$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1),\quad x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \tag{7-31}$$

其合运动为

$$x=x_1+x_2=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

现利用简谐振动的旋转矢量法求质点的合运动。如图 7-11 所示，旋转矢量 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 分别表示两个简谐振动 x_1 和 x_2，$\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 的合矢量 $\boldsymbol{A}$ 表示合运动 x_1+x_2。因为 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 的长度一定，而且以相同的角速度 ω 旋转，所以合矢量 $\boldsymbol{A}$ 的长度不变，并且以同一角速度 ω 匀速旋转，这表明合运动仍然是简谐振动，其余弦表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \tag{7-32}$$

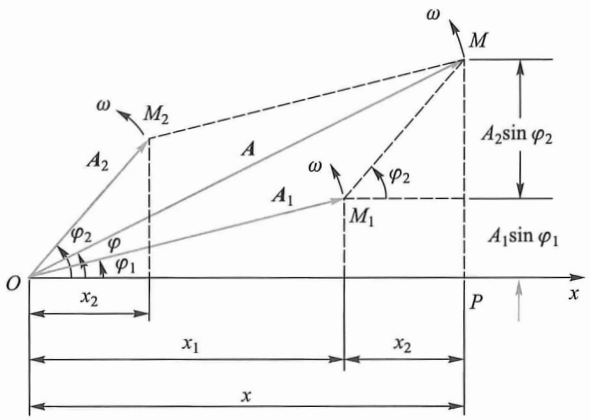


图 7-11 两个同方向同频率简谐振动合成

且合振动的角频率与分振动的角频率 ω 相同，由三角形 OMM_1 得合振动的振幅为

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \tag{7-33}$$

由直角三角形 OPM 得合振动的初相满足

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2} \tag{7-34}$$

由(7-33)式可以看出，合振动的振幅不仅与两分振动的振幅有

NOTE

关，而且与两分振动的相位差

$$\Delta\varphi=(\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)=\varphi_2-\varphi_1$$

有关。

（1）两分振动同相，即

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{7-35}$$

时，$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=1$，有

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2}=A_1+A_2 \tag{7-36}$$

合振动的振幅最大，合成结果使振动加强。当 $A_1=A_2$ 时，$A=2A_1$。

（2）两分振动反相，即

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{7-37}$$

时，$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=-1$，有

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2-2A_1A_2}=|A_1-A_2| \tag{7-38}$$

合振幅最小，合成结果使振动减弱。当 $A_1=A_2$ 时，$A=0$，质点静止不动。

（3）两分振动不同相，即 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ 为其他值时，合振动振幅介于 A_1+A_2 和 $|A_1-A_2|$ 之间，由(7-33)式决定。

2. 两个同方向、不同频率简谐振动的合成　拍

设一质点同时参与两个同方向、不同频率的简谐振动，它们的角频率分别为 ω_1 和 ω_2，振幅都是 A。由于二者频率不同，两分振动总有机会同相，选此时刻开始计时，则二者的初相相同。这样，两分振动可表示为

$$x_1=A\cos(\omega_1 t+\varphi),\quad x_2=A\cos(\omega_2 t+\varphi) \tag{7-39}$$

利用三角函数和差化积公式可得合运动为

$$\begin{aligned}x&=x_1+x_2=A\cos(\omega_1 t+\varphi)+A\cos(\omega_2 t+\varphi)\\&=2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)\end{aligned} \tag{7-40}$$

一般情况下，合成结果比较复杂。但当两个分振动的频率都较大，而二者相差却很小，即 $|\omega_2-\omega_1|\ll\omega_1+\omega_2$ 时，上式中 $2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$ 随时间的变化比 $\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$ 要缓慢得多。这时，合运动可近似地视为振幅为 $\left|2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right|$、角频率为 $\frac{\omega_2+\omega_1}{2}$ 的简谐振动。因为简谐振动的振幅是不随时间变化的，所以这种

NOTE

振幅随时间缓慢变化的振动只能视为近似的简谐振动。如图 7-12 所示，这种合振幅时而加强时而减弱的现象称为拍(beat)，单位时间内振动加强或减弱的次数称为拍频。拍频的值可由振幅公式 $\left|2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right|$ 求出。由于余弦函数的绝对值在一个周期内两次达到最大值，所以拍的周期 $T_{拍}$ 为 $2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$ 的周期的一半，即

$$T_{拍}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{|(\omega_2-\omega_1)/2|}=\frac{2\pi}{|\omega_2-\omega_1|}=\frac{1}{|\nu_2-\nu_1|}$$

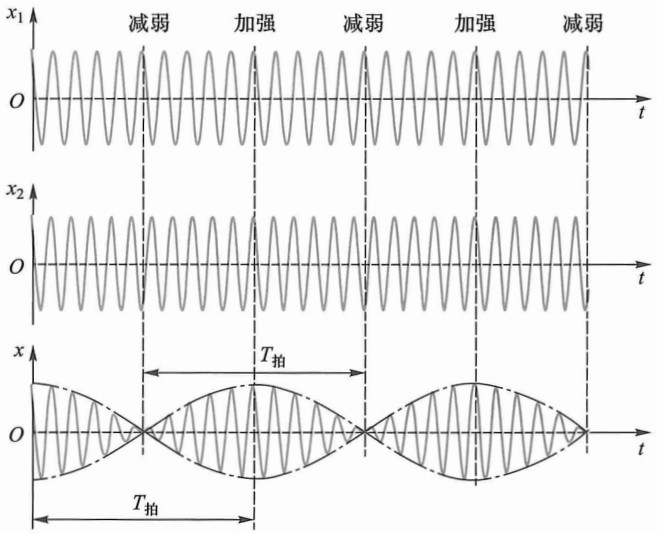


图 7-12 拍的形成

拍频为

$$\nu_{拍}=\frac{1}{T_{拍}}=|\nu_2-\nu_1| \tag{7-41}$$

拍是一种重要的现象，有许多应用。例如，可以利用标准音叉来校准钢琴的频率，当二者频率有微小差别时就会出现拍音，调整到拍音消失，钢琴的一个键就被校准了。

3. 两个互相垂直的同频率简谐振动的合成

设一质点同时参与两个互相垂直的同频率简谐振动，振动表达式为

$$x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1),\quad y=A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \tag{7-42}$$

NOTE

消去 t，质点运动的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1) \qquad (7-43)$$

这是一个椭圆方程，椭圆位于以 $2A_1$ 和 $2A_2$ 为边的矩形内，其形状、方位和绕行方向都与相位差 $\varphi_2-\varphi_1$ 有关，如图 7-13 所示。

(1) $\varphi_2-\varphi_1=0$，即两分振动同相，有 $\cos(\omega t+\varphi_1)=\cos(\omega t+\varphi_2)$，由(7-42)式得

$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$

这时质点的运动轨迹是通过原点、斜率为$\frac{A_2}{A_1}$的直线。时刻 t，质点相对于原点的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=(A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j})\cos(\omega t+\varphi_1)$$

上式表明：质点作简谐振动，振幅为 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}$，频率与分振动频率相同。

(2) $\varphi_2-\varphi_1=\pi$，即两分振动反向，有 $\cos(\omega t+\varphi_1)=-\cos(\omega t+\varphi_2)$，由(7-42)式得

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x$$

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=(A_1\boldsymbol{i}-A_2\boldsymbol{j})\cos(\omega t+\varphi_1)$$

以上两式表明：质点的运动轨迹是通过原点、斜率为$-\frac{A_2}{A_1}$的直线，合运动是简谐振动，振幅为 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}-A_2\boldsymbol{j}$，频率与分振动频率相同。与 $\varphi_2-\varphi_1=0$ 时比较，振动方位转动了 2θ 角，如图 7-13 所示，θ 是振动方位与 y 轴的夹角。

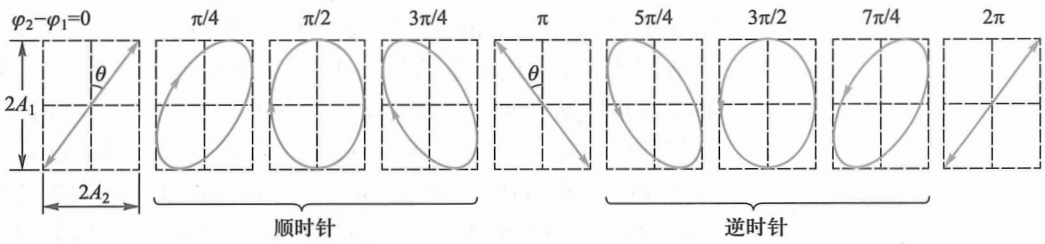


图 7-13 两个垂直的同频率简谐振动的合成

(3) $\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$，有 $\cos(\omega t+\varphi_1)=\sin(\omega t+\varphi_2)$，由(7-42)式得

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

上式表明：质点的运动轨迹是一个以坐标轴为轴线的椭圆。因为 y 的相位超前于 x 的相位 $\pi/2$，所以质点的位置坐标总是先经过 y 的最大值，经过 1/4 周期后才经过 x 的最大值。这就是说，质点沿椭圆运动是按顺时针方向旋转的。

(4) $\varphi_2-\varphi_1=-\dfrac{\pi}{2}$，有 $\cos(\omega t+\varphi_1)=-\sin(\omega t+\varphi_2)$，由(7-42)式得

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

质点的运动轨迹也是一个以坐标轴为轴线的椭圆，但因为 y 的相位落后于 x 的相位 $\pi/2$，所以质点的位置坐标总是先经过 x 的最大值，经过 $T/4$ 后才经过 y 的最大值。这就是说，质点沿椭圆轨道按逆时针方向旋转。

对于上述两种情况，即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm\pi/2$ 时，若两分振动的振幅相等，即 $A_1=A_2$，则质点作圆周运动，如图 7-14 所示。与(1)和(2)两种情况比较，当质点的合运动轨道是圆时，若两分振动的相位差改变 $\pi/2$，则轨迹由圆变为直线。

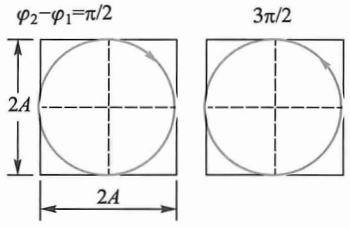


图 7-14 两个等幅的相位差为 $\pm\pi/2$ 的垂直、同频率简谐振动的合成

NOTE

以上讨论说明，两个互相垂直的同频率简谐振动的合运动轨迹为椭圆、直线或圆。反之，直线简谐振动、匀速圆周运动或椭圆运动都可分解为两个互相垂直的简谐振动。

4. 两个互相垂直的不同频率简谐振动的合成　李萨如图形

一般来说，两个振动方向垂直的不同频率简谐振动的合运动比较复杂，而且质点的运动轨迹往往是不稳定的。但是如果两个简谐振动的频率成简单的整数比时，合成运动具有稳定的轨迹，通常也是周期性的。比如在 x 轴方向的周期是 T_x，y 方向是 T_y，它们的比例是 $n:m$。设 K 是 n、m 的最小公倍数，则经过时间 $t=(K/n)T_x=(K/\mathrm{m})T_y$，质点回到原来位置。这种轨迹图形称为李萨如图形。李萨如(J.A.Lissajous)图形与两个分振动的振幅比、频率比，以及初相 φ_1、φ_2 有关。

李萨如图形可以用旋转矢量表示法画出，下面举例说明。

设有两个互相垂直的、频率成简单整数比的简谐振动，振动表达式分别为

$$x=A_1\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{4}\right),\quad y=A_2\cos\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\qquad(7-44)$$

它们的频率之比为 3∶2。如图 7-15 所示，在右上方作 x 方向简谐振动的旋转矢量图，在左下方作 y 方向简谐振动的旋转矢量图。根据频率比，将 x 方向简谐振动的参考圆分成 8 等份，将 y 方向简谐振动的参考圆分成 12 等份。当 $\boldsymbol{A}_1$ 旋转 45°时，$\boldsymbol{A}_2$ 旋转 30°，因此两参考圆上对应分点的位置是同一时刻旋转矢量 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 矢端的相应位置。过右上方参考圆上各分点作竖直线，过左下方参考圆上各分点作水平线，过对应点的竖直线和水平线在图的右下方相交，连接这些交点，就得到合振动的李萨如图形。

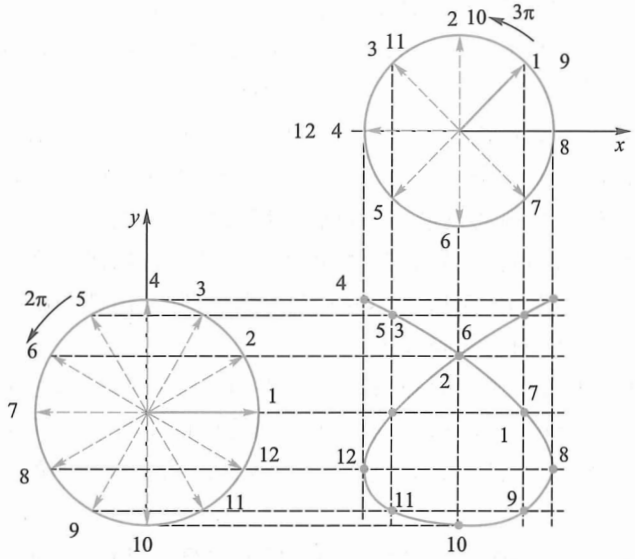


图 7-15 李萨如图形图示法

NOTE

若李萨如图形与水平线的最多交点数为 n_1，与竖直线的最多交点数为 n_2，则 n_1 与 n_2 之比等于水平方向分振动周期 T_1 与竖直方向分振动周期 T_2 之比，即

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{T_1}{T_2}=\frac{\nu_2}{\nu_1} \tag{7-45}$$

这是因为水平交点的数目表示经过一个大周期（李萨如图的周期），质点经过同一个 y 坐标 n_1 次，表明大周期是 y 方向振动周期的 $n_1/2$ 倍，同样竖直线的交点数目，表示经过一个大周期，质点经过同一个 x 坐标 n_2 次，表明大周期是 x 方向振动周期的 $n_2/2$ 倍。

如果已知 ν_1，就可根据李萨如图形求出 ν_2。示波器实验中，就是利用(7-45)式测定未知频率的。

7-6 微孔共振消声

2016年9月，二十国集团领导人峰会（G20峰会）在杭州隆重召开，其会议厅的装饰设计既展示出中国建筑的节能环保理念，又体现了浙江的丝竹文化特色。展厅的部分墙面采用了微孔竹板，实现了对声波的共振吸收。

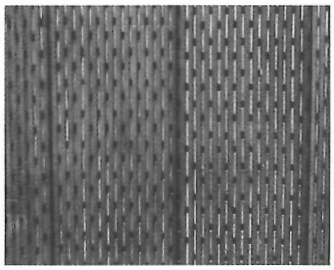


图7-16 微孔共振消声系统（见彩色插页）

图7-16所示为局部放大的竹板实景照片，竹板上有一系列面积不同且周期性排列的长方形微孔。微孔中的空气可视为具有一定质量的，不可压缩的流体。当声波进入微孔后，将导致微孔中的空气作简谐振动。在振动过程中，由于微孔壁对空气的阻尼作用，使声能转化成热能，被耗散。若入射波的频率与共振腔的固有频率相等，就会产生共振现象。此时空气振动的振幅最大，相应的声能损耗也最多，从而达到消除噪声的目的。

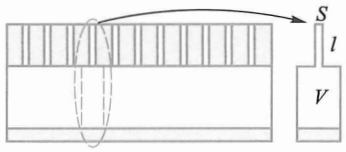


图7-17 微孔共振消声系统的简化模型及亥姆霍兹共振器

单个微孔和竹板与墙壁之间的空气层可简化成一个亥姆霍兹共振器，如图7-17所示。假设竹板厚度为 l，微孔横截面积为 S，单个微孔后的空气腔体体积为 V。

细管中的空气运动是由外界压力与容器内的压力之差所引起。设这部分空气运动的位移为 x，细管内的空气质量为 $m=\rho Sl$（其中 ρ 为空气密度），则容器内的空气被压缩后其容积的改变近似为 $\Delta V=Sx$。

因为声波的波速比热传递的速度要快得多，所以气体状态的变化可视为绝热过程。若将气体视为理想气体，则由绝热过程方程 $pV^{\gamma}=\mathrm{C}$，有

$$\Delta p=-\gamma p\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$$

它对细管内运动着的空气的作用力为

$$F=\Delta pS=-\frac{\gamma pS^2x}{V}$$

根据牛顿第二定律，细管内空气的运动方程可写为

$$\rho Sl\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\gamma pS^2x}{V}$$

令 $\omega^2=\dfrac{\gamma pS}{\rho lV}$，运动方程变成了标准的振动方程形式：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$$

其中，振动角频率 ω 满足

$$\omega=\sqrt{\frac{\gamma pS}{\rho lV}}$$

由波动理论可知，空气柱体内气体的声速 v_s 为

$$v_s=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

于是得到共振器的简谐振动频率为

$$f_0=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{v_s}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{lV}}$$

显然，共振器的简谐振动频率取决于微孔的结构，选择不同的微孔尺寸就可吸收不同频率的噪声。

NOTE

本章摘要

1. 简谐振动

余弦表达式　$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

速度　$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=v_m\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$

加速度　$a=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi)=a_m\cos(\omega t+\varphi+\pi)$

周期与频率：描述简谐振动的时间周期性，$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T}$。

振幅：表征简谐振动的能量。

相位$(\omega t+\varphi)$：描述简谐振动的运动状态。

相位差：比较两简谐振动的步调（同相、反相、超前与落后）。

旋转矢量：一种用图像表示相位的简谐振动表示方法。

2. 自由简谐振动

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

受力特点：

平动——合外力 $F=-kx$，$x=0$ 是平衡位置。

转动——合外力矩 $M=-k\theta$，$\theta=0$ 是平衡位置。

运动方程：$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2x$。

NOTE

固有角频率：弹簧振子，$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$；单摆，$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$；复摆，$\omega_0=\sqrt{\frac{mgb}{I}}$。

由初始条件确定振幅和初相：

平动 $x_0=A\cos\varphi$，$v_0=-\omega_0 A\sin\varphi$。

转动 $\theta_0=\theta_m\cos\varphi$，$\Omega_0=-\omega_0\theta_m\sin\varphi$。

能量 $E=E_k+U=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$。

3. 阻尼振动：弱阻尼、过阻尼、临界阻尼

4. 受迫振动定态

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

速度共振，$\omega=\omega_0$；位移共振，$\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$。

5. 简谐振动合成

同方向、同频率：$x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\varphi)$。

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)},\quad \tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

$$A_{max}=A_1+A_2,\quad \varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi,\quad k=0,1,2,\cdots$$

$$A_{min}=|A_1-A_2|,\quad \varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi,\quad k=0,1,2,\cdots$$

拍——同方向、不同频率，而且满足$|\omega_2-\omega_1|\ll\omega_1+\omega_2$。

$$x=x_1+x_2=2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$$

$$T_{拍}=\frac{1}{|\nu_2-\nu_1|},\quad \nu_{拍}=|\nu_2-\nu_1|$$

相互垂直、同频率：轨迹一般是椭圆。$\Delta\varphi=0$ 或 π 时，轨迹是直线；$A_1=A_2$，$\Delta\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$时，轨迹是圆。

李萨如图形——相互垂直、频率成简单整数比，是测量频率的一种方法。

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{T_1}{T_2}=\frac{\nu_2}{\nu_1}$$

思考题

7-1 简谐振动的运动特征是什么？什么条件下物体可以作简谐振动？

7-2 什么叫两个简谐振动同相或者反相？

7-3 判断下列运动是否为简谐振动？说明理由。

(1) 小球在光滑的球面碗底附近作小幅度往复运动；

(2) 自由下落的小球与地面作完全弹性碰撞形成的上下运动；

(3) 质点在合外力 $F=-kx^2$ 作用下沿 x 轴运动；

(4) 质点作匀变速圆周运动时，它在直径上投影点的运动。

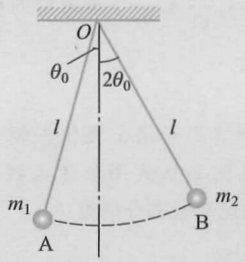
7-4 有一弹簧振子，为了测定其系统的振动周期，只要把它竖直挂起后，测出弹簧的伸长量 x（即平衡时的长度和自然长度之差）即可。试说明道理。

7-5 什么是相位？把单摆从平衡位置拉开，使摆线与竖直方向成 θ_0 角，然后放手任其摆动，那么单摆振动的初相是否就是 θ_0？单摆从最左端摆向右方，最左端的相位是多少？从左向右运动到达中点时相位是多少？从右向左运动到中点时相位又是多少？

7-6 伽利略提出并解决了这样一个问题：将一根很长的细线挂在又高又暗的城堡中，既看不到它的上端，又无法爬到高处去测量它的长度，只能看见它的下端，如何用简便方法测量此线的长度？试给出你的方法。

7-7 通过空心球上的一个小孔使球内充满水，再用一根长线把这球悬挂起来，然后让水从球的底部慢慢流出来，这时会发现振动周期先增大而后减小，试说明之。

7-8 如图所示，有两个摆锤质量不同、摆长相同的单摆 A 和 B。开始时，把单摆 A 向左拉开一个很小的角度 θ_0，把单摆 B 向右拉开一个很小的角度 $2\theta_0$，然后同时由静止释放，问它们在什么位置相碰？为什么？从释放到首次相碰经历的时间为多少？



思考题 7-8 图

7-9 为避免振动系统和外力发生共振而带来有害的影响，可采取一些措施。试说明以下各种情况中采取的措施所根据的原则：

(1) 改变电机的转速；

(2) 调整机器的转动部分，使其质量中心尽量通过中心轴；

(3) 将房屋的木梁之间用大钉相连，在发生振动时相互牵制，以减弱振动；

(4) 队列过桥时变成便步走；

(5) 挑担时颤抖得太厉害时，倒换脚步。

7-10 切断电源后，在电动机的转速逐渐减小直到最后停止转动的过程中，往往出现底座在短暂的一段时间内振动得很厉害的现象，这是什么原因？

7-11 若一个质点同时参与两个相互垂直的简谐振动，则这两个简谐振动必须满足什么条件才能使其运动轨迹为圆？

习题

7-1 已知简谐振动表达式 $x=0.1\cos\left(8\pi t+\frac{2}{3}\pi\right)$ (SI单位),求:

(1) 振动频率、周期、振幅、初相,以及速度、加速度的最大值;

(2) $t=\frac{1}{24}$ s, $\frac{1}{12}$ s, $\frac{1}{6}$ s 等时刻的相位,并用旋转矢量图表示。

7-2 一弹簧振子沿 x 轴作振幅为 A 的简谐振动,该简谐振动的表达式用余弦函数表示。若 $t=0$ 时,振动物体的运动状态分别为:

(1) $x_0=-A$;

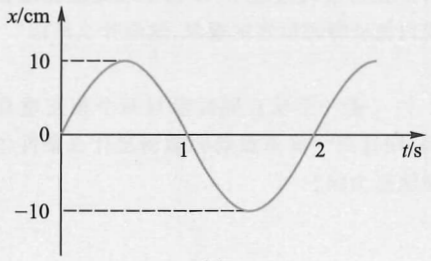
(2) 过平衡位置向 x 轴正方向运动;

(3) 过 $x=\frac{A}{2}$ 处,且向 x 轴负方向运动。

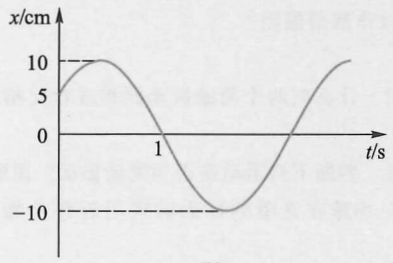
试用旋转矢量图分别确定相应的初相。

7-3 两个小球都在竖直方向上作周期相同的简谐振动,第二个小球的振幅是第一个小球的两倍。当小球1自振动正方向回到平衡位置时,小球2恰在振动的正方向端点。已知小球1的简谐振动表达式为 $y=A\cos(\omega t+\varphi)$,试写出小球2的简谐振动表达式。

7-4 如图所示为两谐振动的 $x-t$ 曲线,试分别写出其简谐振动表达式。



(a)



(b)

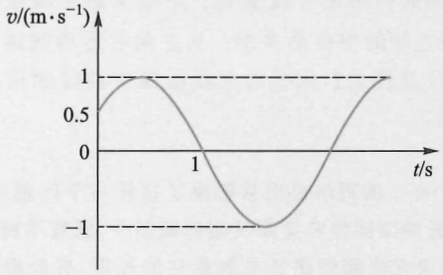
习题 7-4 图

7-5 一质量为 0.01 kg 的物体作简谐振动,其振幅为 0.24 m,周期为 4 s。当 $t=0$ 时,位移为 0.12 m,且向 x 轴正方向运动。试求:

(1) $t=1$ s 时物体所在的位置和所受的力;

(2) 由起始位置第一次运动到 $x=-0.12$ m 处所需的时间。

7-6 已知某物体作简谐振动的 $v-t$ 曲线如图所示,试求此简谐振动的振动表达式。

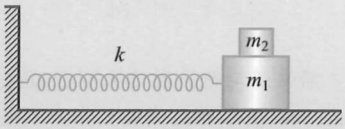


习题 7-6 图

7-7 工地上某卷扬机正在吊起一质量为 3 t 的重物,当重物在以 3 m/s 的速度下降时,卷扬机上吊有重物的钢丝绳(其弹性系数为 2.7×10^6 N/m)的上端突然因故被卡住,问该重物上下振动时产生的最大振幅为多少?钢丝绳受到的最大拉力为多大?

7-8 播音员是通过扬声器的膜片振动发出动听悦耳的声音的。若扬声器膜片的振幅最大为 1.0×10^{-6} m，问播音员必须以多高的频率说话才能使膜片的加速度超过 g？

7-9 如图所示的系统在光滑的水平面上作简谐振动。弹簧的弹性系数 $k=2.5\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$，物体 m_1 质量为 0.06 kg，m_2 质量为 0.04 kg，m_1 和 m_2 之间的静摩擦因数 $\mu_s=0.5$。问要使 m_2 和 m_1 之间无相对滑动，简谐振动的最大振幅和最大动能是多少？



习题 7-9 图

7-10 有一弹簧振子，已知其弹簧的弹性系数 $k=4.5\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$，物体质量 $m=0.02$ kg。今把弹簧压缩 0.02 m 后放手，任其自由振动。以放手时刻为计时起点，求：

（1）简谐振动的表达式；

（2）从起始时刻运动到弹簧伸长 0.01 m 处所需的最短时间和在这段时间内相位的改变量；

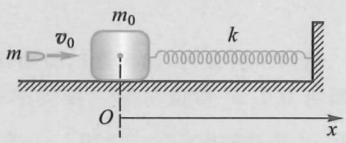
（3）弹簧伸长 0.01 m 时振动系统的总能量、势能和动能。

7-11 有一单摆摆线长 $l=1.0$ m，摆锤质量 $m=0.01$ kg。$t=0$ 时，摆角 $\theta_0=-0.06$ rad，角速度 $\Omega_0=0.2\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$。若摆向平衡位置摆动，求：

（1）简谐振动表达式；

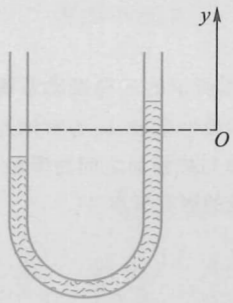
（2）初始时刻单摆的势能和动能。

7-12 如图所示，质量 $m_0=0.99$ kg 的滑块和弹性系数 $k=10^4\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$ 的弹簧组成一弹簧振子，静止在光滑水平面上。一质量为 $m=0.01$ kg 的子弹以速率 $v_0=400\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 沿水平方向射入滑块内，从而和滑块一起振动。以滑块开始运动作为计时起点，写出滑块的振动方程。



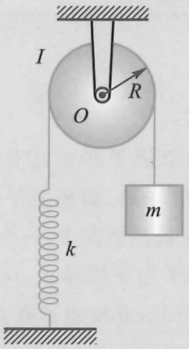
习题 7-12 图

7-13 一竖直放置的 U 形管横截面积为 S，管内盛有水银，其密度为 ρ，质量为 m。现使水银在管内作微振动，忽略摩擦阻力，求其振动周期。



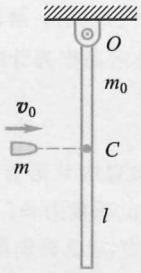
习题 7-13 图

7-14 一定滑轮半径为 R，转动惯量为 I，其上挂一轻绳，绳的一端系一质量为 m 的物体，另一端与一固定的轻弹簧相连，如图所示。弹簧弹性系数为 k，绳与滑轮间无相对滑动，滑轮转轴处的摩擦力可以忽略。将物体从平衡位置拉下一微小距离后放手，试证明物体作简谐振动，并求出振动周期。



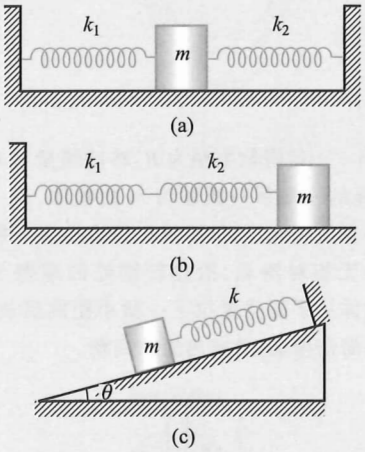
习题 7-14 图

7-15 如图所示，质量为 m_0、长为 l 的匀质细棒可绕轴自由转动。若有一质量为 m 的子弹，以水平速度 v_0 射入棒的中心 C 处后，棒作简谐振动（即摆角 θ 较小），试计算它的振动周期及振动表达式（以子弹射入棒的瞬间为计时起点）。



习题 7-15 图

7-16 如图所示的三种振动系统中，k_1、k_2、k 分别为三段弹簧的弹性系数，m 为物体的质量。若弹簧的质量以及物体与接触面之间的摩擦可以忽略，试分别计算三种系统的固有频率。



习题 7-16 图

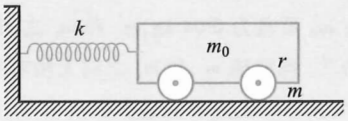
7-17 固体中原子在常温下的振动频率约为 10 THz(1 THz = 10^{12} Hz)，假想原子间以类似“弹簧”的作用相连。若在这种情况下，一个银原子以上述频率振动，而其他原子均保持静止，试计算该简谐振动的“弹性系数”k。(1 mol 银原子有 6.02×10^{23} 个原子，其摩尔质量为 0.108 kg)

7-18 就竖直振动而言，可以认为一辆汽车是被安装在一弹簧上的。若汽车质量为 3×10^3 kg，其固有振动频率为 3 Hz。

(1) 试求弹簧的弹性系数；

(2) 若汽车所载重物的质量为 10^3 kg，其载重后的振动频率为多少？

7-19 如图所示，一辆小车由车体和装在光滑轴上的四个车轮组成。设车体的质量为 m_0，每个轮子可看作半径为 r、质量为 m 的均匀圆盘。若小车在所系轻弹簧作用下在水平路面上作来回无滑动的运动，弹簧的弹性系数为 k，求小车的振动频率。(提示：用能量法求解)



习题 7-19 图

7-20 沿轨道匀速行驶的火车经过接轨处时都要受到震动，从而使车厢在弹簧上作上下振动。设每段铁轨长为 12.5 m，弹簧每受 10^4 N 的重力作用即压缩 1.6×10^{-3} m。若空气阻力不计，每根弹簧所支持的车厢及其载重共为 0.5×10^3 kg，火车的危险速度为多少？

7-21 有两个同方向、同频率的简谐振动：

$$x_1 = 0.05\cos\left(10t+\frac{3}{4}\pi\right)\text{(SI 单位)}$$

$$x_2 = 0.06\cos\left(10t+\frac{1}{4}\pi\right)\text{(SI 单位)}$$

(1) 试求合振动的振幅和初相；

(2) 若另有一方向和频率均相同的简谐振动 $x_3 = 0.07\cos(10t+\varphi_3)$(SI 单位)，问当 φ_3 为何值时，x_1+x_3 的振幅最大？

(3) φ_3 为何值时，x_2+x_3 的振幅最小？

7-22 有两个同方向、同频率的简谐振动：

$$x_1 = 0.4\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{6}\right)\text{(SI 单位)}$$

$$x_2 = 0.2\cos\left(4\pi t+\frac{5\pi}{6}\right)\text{(SI 单位)}$$

试写出这两个简谐振动合成的振动表达式。

7-23 有两个同方向、同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 0.2 m，相位与第一振动的相位差为 $\pi/6$。若第一个振动的振幅为 $\sqrt{3}\times10^{-1}$ m，求第二个振动的振幅及第一、第二两个振动之间的相位差。

7-24 质量为 m 的质点同时参与互相垂直的两个振动，其振动表达式为

$$x=0.06\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{3}\right)(\text{SI 单位})$$

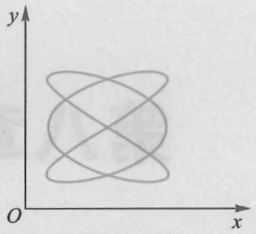
$$y=0.03\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)(\text{SI 单位})$$

（1）用旋转矢量表示法求出质点的运动轨迹，并指明它是顺时针旋转还是逆时针旋转？

（2）求质点在任意位置所受的作用力。

7-25 为了测待测音叉的频率，可使待测音叉和标准音叉（频率为 256 Hz）同时发音，听到时强时弱的嗡嗡声响。若测得在 30 s 内，音响的强弱变化为 75 次，问待测音叉的频率是多少？

7-26 在示波器的水平和垂直输入端分别加上余弦式的交流电压，荧光屏上出现如图所示的闭合曲线。已知水平方向振动的交流电频率为 2.70×10^4 Hz，求沿垂直方向振动的交流电频率。



习题 7-26 图

7-27 设有一质点同时参与两个振动方向相互垂直的简谐振动：

$$x=A_1\cos(2\pi\nu_1 t),\quad y=A_2\cos(2\pi\nu_2 t+\Delta\varphi)$$

请设计一个计算机程序来演示质点的合成运动轨迹。要求程序可以输入两振动的振幅 A_1 和 A_2、振动频率 ν_1 和 ν_2 及它们的相位差 $\Delta\varphi$，并分下列两种情况进行分析（为简单计，可假设 $A_1=A_2$）：

（1）$\nu_1=\nu_2$，$\Delta\varphi$ 取 0，$\pi/4$，$\pi/2$，$3\pi/4$，π，$3\pi/2$ 等值；

（2）$\nu_1=50$ Hz，$\nu_2=100$ Hz，$\Delta\varphi=0,\pi/4$；$\nu_1=200$ Hz，$\nu_2=300$ Hz，$\Delta\varphi=0,\pi/6,3\pi/4$。

习题答案

第八章　机　械　波



本章补充资源

波动(wave)是振动的传播过程,是一种重要的运动形式。波动现象在自然界中广泛地存在,如引起听觉的声波、引起视觉的可见光波、电台辐射的电磁波等。近代物理研究表明,波动性也是一切微观粒子的基本属性。各类波本质不同,因而各自具有其特殊的性质和规律;但他们也具有许多共同的特征和规律,具有相似的数学描述。波动学与工程技术有着密切的联系,是声学、地震学、电通信、光通信等技术学科的重要基础知识。本章讨论机械波的描述、本质、干涉和多普勒效应等内容,为学生进一步学习电磁波和量子物理打下基础。

8-1　机械波的产生和传播

NOTE

1. 机械波的产生和传播

机械振动在介质中的传播过程称为机械波(mechanical wave),如声波、水波、地震波等。产生机械波的条件一是要有一个作机械振动的物体,称为波源(source),二是要有传播机械振动的介质(medium)。如人们说话时发出的声波,其波源是人的声带,声带的振动引起附近空气振动,附近空气的振动又引起更远处空气的振动,这样机械振动就在空气介质中传播,形成声波。

波动中,如果介质中各质元的振动方向和波的传播方向始终垂直,这种波称为横波(transverse wave),例如弦乐器中在弦上形成的波动。如果介质中各质元的振动方向和波的传播方向始终一致,这种波称为纵波(longitudinal wave),例如空气中传播的声波。横波和纵波是较简单的波,在一些复杂的介质和环境中,横波和纵波不仅会同时存在,并且随着环境的变化有不同的形态,

比如地震波、水波等[①]。

NOTE

(1) 横波的形成和传播

一根弹性绳,一端固定,另一端被拉至水平后上下抖动,此时绳中传播的波是横波。为了分析横波的形成和传播,可将绳分成许多质元,并把每一个质元都视为质点依次编号,质元之间存在着弹性力。$t=0$ 时,各质点都处于平衡位置,随后质点 1 受到推动开始向上运动,并且在弹性力的作用下带动质点 2,质点 2 又带动质点 3,这样各质点相继向上运动,到 $t=T/4$(T 为波源的振动周期),质点 1 离开其自身的平衡位置达到正最大位移,振动传至质点 4,质点 4 开始向上运动。随后,质点 5 和 6 也相继离开其平衡位置向上运动,$t=T/2$ 时,质点 1 回到其平衡位置,质点 4 达到正最大位移,振动传到质点 7。到 $t=3T/4$ 时,质点 1 达到负最大位移,质点 4 回到平衡位置,质点 7 达到正最大位移,振动传到质点 10。到 $t=T$ 时,质点 1 完成一次完全振动,回到平衡位置,振动传到质点 13。1 到 13 各质点连成的曲线是一个完整的波形,其中质点 10 处于正最大位移,称为波峰,质点 4 处于负最大位移,称为波谷。此后振动继续向前传播,如图 8-1 所示。这里讨论的是弹性介质中传播的机械波,称为弹性波。

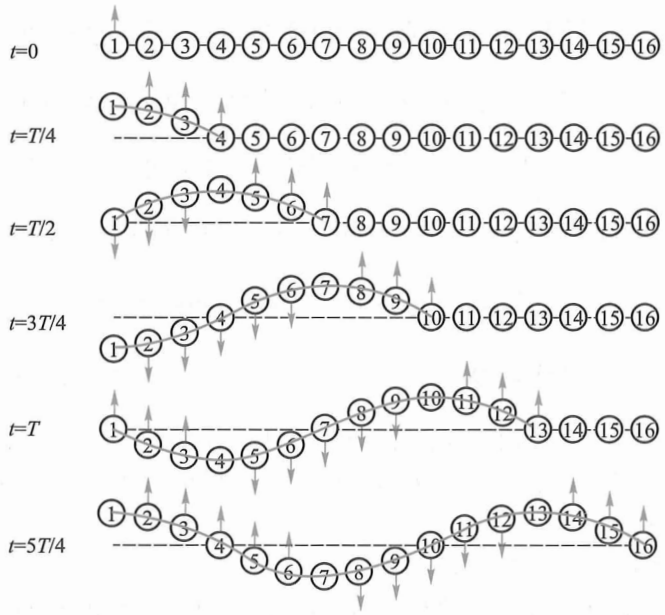


图 8-1 横波的形成和传播

① 我们这里说的“简单”,通常是指线性波,复杂的系统通常是非线性的。

NOTE

（2）纵波的形成和传播

一根长弹簧一端固定，另一端被人手抓住。当手沿弹簧前后振动时，弹簧中形成纵波。为了分析纵波的形成和传播，可依前述，将弹簧分成许多质元，并把每一个质元看作质点依次编号。$t=0$ 时，各质点都处于平衡位置。随后在手的推动下，质点 1 开始向右运动，并且在弹性力的作用下带动质点 2，于是各质点相继向右运动。到 $t=T/4$ 时，质点 1 达到正最大位移，振动传至质点 4，这样就在质点 1 与 4 之间形成一个密部。随后，质点 5 和 6 也相继离开其平衡位置向右运动。$t=T/2$ 时，质点 1 回到平衡位置，质点 4 达到正最大位移，振动传到质点 7，这时密部已传至质点 4 与 7 之间。$t=3T/4$ 时，质点 1 达到负最大位移，质点 4 回到平衡位置，质点 7 达到正最大位移，振动传到质点 10，这时密部已传至质点 7 与 10 之间，同时在质点 1 与 7 之间形成一个疏部。$t=T$ 时，质点 1 完成一次完全振动，振动传到质点 13，这时第一个密部已传至质点 10 与 13 之间，又在质点 1 与 4 之间形成第二个密部，而两密部之间夹着一个疏部在质点 4 与 10 之间，这样由质点 1 至 13 各点形成一个疏密相间的完整波形。此后振动继续向右传播，如图 8-2 所示。

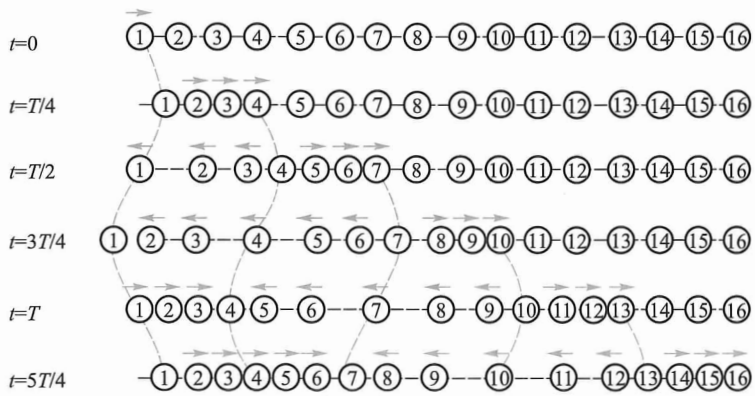


图 8-2 纵波的形成和传播

液体和气体内部的弹性力只能由压缩和膨胀引起，因此在液体和气体中只能产生纵波；而在固体中，既能产生纵波，又能产生横波。

（3）波传播过程的实质

波传播过程是振动状态的传播过程，是波形（相位）的传播过程，也是能量的传播过程。

如上所述，波传播过程中介质中各质点在其平衡位置附近作振动（图 8-2 中，连接质点 1、4、7、10、13 各点的五条虚线分别表示上述五点的振动曲线），质点并不随波向前传播，只在平衡位置

NOTE

附近来回振动而振动状态(相位)向前传播,各振动质点所形成的波形向前传播(图 8-1 中,连接各质点的五条实曲线分别表示不同时刻的波形),后振动的质点比先振动的质点相位落后。在振动状态的传播过程中,还伴随着能量的传播,如图 8-1 和图 8-2 所示,质点 4 在 $t=T/2$ 和 $t=T$ 时处于正、负最大位移处,其振动速度和动能为零,这时点 4 附近介质形变很小[如图 8-1 所示,形变大小可以由该点的斜率来表示。假设各点之间横坐标间距固定(因为都在自己的平衡位置附近上下振动),这样邻近两点的距离随着斜率的增大而增大。距离越大形变越大,在正负最大位移处,斜率为零,因而相邻距离最小,形变最小]。因此由形变而引起的弹性势能也为零;在 $t=3T/4$ 和 $t=5T/4$ 时,质点 4 处于平衡位置,其振动速度和动能达到最大值,这时点 4 附近介质的形变最大(斜率最大),因此弹性势能也达最大值。由此可见,波动过程中,介质中各质元的动能和势能同步变化:动能为零时,势能也为零,此时质元的机械能为零;动能最大时,势能也最大,此时质元的机械能最大。因此,在振动状态的传播过程中,各质元的机械能在不断地变化,由大变小,又由小变大。当其能量增大时,表示从波传播方向的后方介质向其输入的能量大于其向波传播方向前方介质输出的能量;当其能量减小时,表明后方介质向其输入的能量小于其向前方介质输出的能量。这说明,波传播过程中伴随着能量的传播。这种振动状态、波形和能量都在传播的波称为行波。应该注意的是,波动中介质质元的动能和势能同步变化、量值相等,这是由于介质元处于一个开放系统中,既受后方介质元推动作受迫振动,又是前方介质元振动的外源,这与孤立的简谐振动机械能守恒不同。

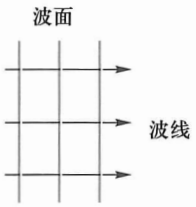
2. 波面和波线 · 惠更斯原理

在波传播过程中,任何时刻由振动相位相同的点构成的曲面称为波面(wave surface)。波面是波动的同相面,波面有无穷多,它们形成波面簇。有时把波传播方向上最前面的一个波面称为波前或波阵面(wave front)。波面的法线称为波法线,又称波线(wave ray)。在各向同性介质中,波沿波线传播。在各向同性的均匀介质中,波线总是与波面正交。

按照波面的形状,波可分为球面波(spherical wave)、平面波(plane wave)和柱面波(cylindrical wave)等。当波源的几何线度比观察点到波源的距离小得多时,该波源称为点波源。在各向同

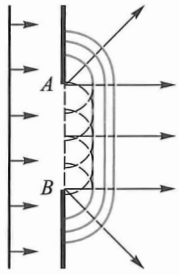


(a) 球面波



(b) 平面波

图 8-3 波面和波



入射波 衍射波

图 8-4 波的衍射

性的均匀介质中，点波源发出的是球面波，波面是一系列同心球面，点波源位于球心处，如图 8-3(a)所示。球面波的波线是以点波源为中心的一组径向直线。波面为平面的波称为平面波，其波线是与波面垂直的一组平行线。对于由点波源发出的球面波来说，在远离点波源的情况下，其波面的一小部分可近似地视为平面波。波面为柱面的波称为柱面波。

惠更斯(C.Huygens)首先提出了关于波面在介质中传播的理论，称为惠更斯原理。它可以表述为：

波面上每一点都可视为发射子波的波源，这些子波的包迹就是新波面。

根据惠更斯原理，可以用图示方法从某一时刻的波面确定下一时刻的波面。

惠更斯原理可以解释许多波的传播方向的问题，如导出波的反射定律和折射定律、定性解释波的衍射现象等。波传播过程中经过障碍物时发生的偏离直线传播的现象称为波的衍射。图 8-4 表示平面波通过狭缝 AB 的情况，缝 AB 上每一点都可视为子波波源(入射平面波 AB 以外的波面被墙阻挡了)，这些子波波源向前发出的子波波面的包迹面的中间部分是平面，边缘部分是弯曲的，说明在边缘处波偏离原来的传播方向，产生衍射现象。但是，惠更斯原理不能说明衍射波的强度分布。

3. 波速、波长、周期和频率

(1) 波速

波动是振动状态(相位)的传播过程。在单位时间内，某一确定的振动状态(相位)传播的距离称为相速或波速(wave speed)，用 u 表示。应该注意，波速不同于波动过程中质点的振动速度。

波动理论指出，机械波的波速由介质的弹性和惯性决定，与波源的振动频率无关①。在细长棒中，纵波的波速为 $u=\sqrt{E/\rho}$，式中 E 是棒的弹性模量，ρ 是棒的密度。在柔软的绳或弦中，横波的波速为 $u=\sqrt{F_T/\mu}$，式中 F_T 是绳或弦的张力，μ 是绳或弦的质量线密度，即单位长度的质量。气体中的声速为 $u=\sqrt{\gamma p/\rho}$，式中 p 是气体的压强，ρ 是气体的密度，γ 是气体的比热容比。双

① 一般只在无色散的介质中成立。运动场上的信号枪声，在远处听总比在近处听持续时间稍长，说明不同频率的声波传播的速度不完全相同，但是这种不同并不显著，因为你在很远的地方都可以辨别熟人的声音。

NOTE

原子分子理想气体的 $\gamma=1.40$，单原子分子理想气体的 $\gamma=1.67$。例如，空气的比热容比 $\gamma=1.40$，在标准状况下，空气中声速为 $u=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}=\sqrt{\frac{1.40\times1.013\times10^5}{1.293}}\ \mathrm{m/s}=331\ \mathrm{m/s}$。

（2）波长

同一时刻，在同一波线上，相位差为 2π 的两个质点间的距离称为波长（wavelength），用 λ 表示。在图 8-1 和图 8-2 中，质点 1 和 13、质点 2 和 14、质点 3 和 15 之间的距离都是一个波长。

（3）波的周期和频率

一个完整的波形通过波线上某一固定点所需的时间称为波的周期，用 T 表示。单位时间内通过波线上某一固定点的完整波数目称为波的频率，用 ν 表示。频率和周期的关系为

$$\nu=\frac{1}{T} \tag{8-1}$$

在波源静止的情况下，波源的振动周期和频率与由它激发的波动的周期和频率在量值上是相等的，这是显然的。考虑任意一个质点元，它振动一个周期，回到原来的位置，从波形上看正好是一个完整波形经过。

（4）波速、波长和频率之间的基本关系式

因为在一个周期内，振动状态传播的距离是一个波长，因此有

$$u=\frac{\lambda}{T}=\lambda\nu \tag{8-2}$$

即波速等于波长和频率的乘积。波长反映波动的空间周期性，频率（或周期）反映波动的时间周期性，上式把这两种周期性联系起来，因此它是波动的一个基本关系式。运用该式时要注意：频率由波源决定，与介质无关；波速由介质决定，与波源无关。当波从一种介质传到另一种介质时，波的频率不变，波速和波长发生改变。

（5）波程、相位差和波传播时间之间的关系

因为波长是波线上两个相位差为 2π 的质点间的距离，而波传播一个波长的距离所需的时间为一个周期，所以，当波沿波线 Ox 从 A 点传到 B 点时，波传播的距离，即波程为 $\Delta x=x_B-x_A$，若波传播的时间为 $\Delta t=t_B-t_A$，B 点的振动相位比 A 点的振动相位落后 $\Delta\varphi=\varphi_A-\varphi_B$，则有下列关系式：

$$\frac{\Delta x}{\lambda}=\frac{\Delta\varphi}{2\pi}=\frac{\Delta t}{T} \tag{8-3}$$

例 1

已知波源作简谐振动，其表达式为 $y=0.06\cos(\pi t)$（SI 单位），波动沿 x 轴正方向传播，波速 $u=2$ m/s。

（1）求波长；

（2）求波源在 1 s 和 2 s 时的相位差；

（3）若波源位于 $x=0$ 处，$x=2$ m 处质点的振动相位比波源的相位落后多少？比 $x=1$ m 处质点的振动相位又落后多少？

解 （1）由波源的简谐振动表达式知角频率为 $\omega=\pi\ \mathrm{s}^{-1}$，故波源的振动频率为

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\pi}{2\pi}\ \mathrm{Hz}=0.5\ \mathrm{Hz}$$

根据(8-2)式，波长为

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{2}{0.5}\ \mathrm{m}=4\ \mathrm{m}$$

（2）波源在 1 s 和 2 s 时的相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=\omega(t_1-t_2)=\pi(1-2)=-\pi$$

（3）根据(8-3)式，$x=2$ m 处质点的振动相位比波源的相位落后

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x=\frac{2\pi}{4}\cdot 2=\pi$$

比 $x=1$ m 处质点的振动相位落后

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x=\frac{2\pi}{\lambda}(x_2-x_1)=\frac{2\pi}{4}\cdot(2-1)=\frac{\pi}{2}$$

8-2 平面简谐波的余弦表达式

NOTE

简谐振动的传播过程称为简谐波，简谐波是最简单、最基本的波。波面是平面的简谐波称为平面简谐波。描述平面简谐波的函数式称为平面简谐波表达式，或平面简谐波波函数。

平面简谐波在介质中传播时，各质点都作简谐振动，它们有相同的振动频率和振幅，但同一时刻各质点的振动相位并不相同。因为振动的相位以相速向前传播，所以各质点振动的相位沿波速方向依次落后，存在确定的关系。波沿波线传播距离 Δx 所需时间为 $\Delta t=\frac{\Delta x}{u}$，相应的相位差为 $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{T}\Delta t=\omega\frac{\Delta x}{u}$。

平面简谐波的表达式实际上是波线上各质点的简谐振动表达式组，这些简谐振动表达式的差别只是相位，而各点的相位又存在确定的关系，所以该简谐振动表达式组可归纳为一个表达式，即平面简谐波表达式，式中的相位是质点平衡位置的函数。

1. 平面简谐波的余弦表达式

如图 8-5 所示，平面简谐波沿 x 轴正方向传播，波速为 u。用 x 表示质点的平衡位置，y 表示质点相对于平衡位置的位移。设波线上任意一点 O 的简谐振动表达式为

$$y_O = A\cos(\omega t+\varphi) \tag{8-4}$$

即 O 点的振动初相为 φ，若取 O 点为坐标原点，则位置坐标为 x 的质点的振动相位比 $x=0$ 处质点的振动相位落后 $\Delta\varphi=\omega\Delta t=\omega\dfrac{x}{u}$。或者说，$x$ 点在 t 时刻的相位等于 O 点在 $t-\Delta t=t-\dfrac{x}{u}$ 时刻的相位。因此，坐标为 x 的质点的简谐振动余弦表达式为

$$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right] \tag{8-5}$$

这也是沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的余弦表达式。利用关系式

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu,\quad u=\lambda\nu=\frac{\lambda}{T}$$

上式也可写作

$$\begin{cases} y=A\cos\left[2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right] \\ y=A\cos\left[2\pi\left(\nu t-\dfrac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right] \\ y=A\cos\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}(ut-x)+\varphi\right] \end{cases} \tag{8-6}$$

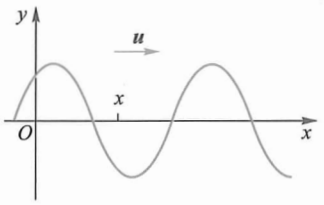


图 8-5 平面简谐波余弦表达式推导

NOTE

2. 平面简谐波表达式的物理意义

平面简谐波表达式中有两个自变量：时间 t 和质点的平衡位置坐标 x。现在我们讨论(8-5)式的物理意义。

(1) 固定 x

当固定 $x=x_0$ 时，y 只是 t 的函数，这时平面简谐波表达式变为平衡位置在 x_0 处的质点的简谐振动表达式。由(8-5)式得 x_0 处质点的简谐振动表达式为

$$y=A\cos\left(\omega t-\frac{\omega x_0}{u}+\varphi\right)$$

式中 $\varphi-\frac{\omega x_0}{u}$ 是振动初相。

(2) 固定 t

当固定 $t=t_0$ 时，y 只是 x 的函数，这时平面简谐波表达式变为 t_0 时刻的波形方程。由(8-5)式得 t_0 时刻的波形方程为

$$y=A\cos\left(\omega t_0-\frac{\omega}{u}x+\varphi\right)$$

式中 ωt_0 是常量，上式表示波线上各质点在 t_0 时刻的位移分布。以 y 为纵坐标，x 为横坐标作出的余弦曲线称为波形曲线(wave form)，显示了波的空间周期性。

(3) x 和 t 都变化

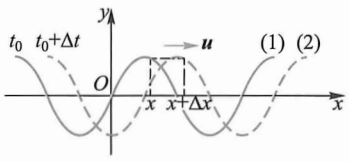


图 8-6 波形的传播

这时平面简谐波表达式表示波线上各质点的位移分布随时间的变化，形象地说，这时平面简谐波表达式反映了波形的传播，故该表达式所描述的波称为行波(traveling wave)。如图 8-6 所示，时刻 t_0 的波形曲线为实线(1)，时刻 $t_0+\Delta t$ 的波形曲线为虚线(2)，它们的波形方程分别为

$$y_1=A\cos\left(\frac{\omega}{u}x-\omega t_0-\varphi\right),\quad y_2=A\cos\left[\frac{\omega}{u}x-\omega(t_0+\Delta x)-\varphi\right]$$

由上两式得

$$y_1(x,t_0)=A\cos\left[\frac{\omega}{u}(x+u\Delta t)-\omega(t_0+\Delta t)-\varphi\right]=y_2(x+u\Delta t,t_0+\Delta t)$$

上式说明，在 $t_0+\Delta t$ 时刻位于 $x+u\Delta t$ 处质点的位移，正好等于在 t_0 时刻位于 x 处质点的位移，即在 Δt 时间内，整个波形沿波线向前传播了 $\Delta x=u\Delta t$ 的距离。由此可见，波形以波速 u 向前传播。

3. 质点的振动速度和加速度

波动传播过程中，介质中质点的振动速度是 y 对 t 的一阶偏导数，即

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-\omega A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]\qquad(8-7)$$

质点的振动加速度是 y 对 t 的二阶偏导数，即

$$a=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\omega^2 A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right] \qquad (8-8)$$

例 2

已知某质点的简谐振动表达式和波速 u，写出平面简谐波表达式：

(1) 已知 O 点的简谐振动表达式 $y=A\cos(\omega t+\varphi)$，波以速率 u 沿 x 轴负方向传播；

(2) 已知 x_1 点的简谐振动表达式 $y=A\cos(\omega t+\varphi)$，波以速率 u 沿 x 轴正方向传播。

解 (1) 波沿 x 轴负方向传播时，x 点的振动比 O 点的振动相位超前 $\Delta\varphi=\frac{\omega x}{u}$，所以平面简谐波的表达式为

$$y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

(2) 波沿 x 轴正方向传播时，x 点在时刻 t 的相位等于 x_1 点在时刻 $t-\frac{x-x_1}{u}$ 的相位，所以平面简谐波的表达式为

$$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x-x_1}{u}\right)+\varphi\right]$$

8-3 机械波的能量和能流

NOTE

1. 机械波的能量和能量密度

机械波在弹性介质中传播时，介质中各质元都在其平衡位置附近作振动，而且相邻质元的振动步调不一致，使介质发生形变。所以，介质中各质元既具有动能，又具有弹性势能。

设介质的密度为 ρ，某质元的体积为 $\mathrm{d}V$，质量为 $\mathrm{d}m$，当平面简谐波 $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]$ 在介质中传播时，该质元在时刻 t 的动能为

$$\mathrm{d}E_k=\frac{1}{2}m\cdot v^2=\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}V\cdot\omega^2A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]$$

之前我们已作过定性分析(不作定量证明)：平面简谐波传播过程中，介质中各质元的弹性势能和动能同步变化，在任何时刻其动能和势能都相等，即

$$\mathrm{d}E_p=\mathrm{d}E_k=\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}V\cdot\omega^2A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]$$

NOTE

因此，介质中质元的机械能为

$$dE = dE_p + dE_k = \rho dV \cdot \omega^2 A^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

单位体积内波的能量称为波的能量密度(energy density)，用 w 表示。由上式得

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho\omega^2 A^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \tag{8-9}$$

上式表明：波的能量密度是时间 t 和位置 x 的函数；对任意确定的单位体积，w 随时间不断变化。这说明波动过程是能量的传播过程。

能量密度在一个周期内的平均值称为平均能量密度，用 $\overline{w}$ 表示，即

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w dt = \frac{1}{T}\int_0^T \rho\omega^2 A^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] dt = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \tag{8-10}$$

上式表明：平均能量密度不随位置 x 而变，而与振幅的平方和角频率的平方成正比。

2. 机械波的能流和能流密度

为了描述波动过程中能量的传播，我们引入能流的概念。单位时间内通过某一面积的波的能量称为波通过该面积的能流，或称能通量(energy flux)。

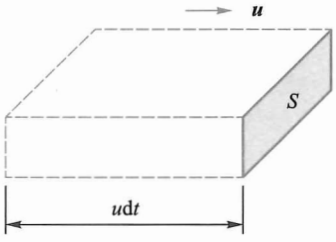


图 8-7 波的强度推导

单位时间内通过垂直于波传播方向的单位面积的能量称为能流密度(energy flux density)。能流密度的时间平均值称为平均能流密度，又称波的强度(intensity of a wave)，用 I 表示。如图 8-7 所示，在介质中垂直于波传播方向上取一面积 S，则 dt 时间内通过 S 的能量为 $wSudt$，因此通过面积 S 的能流为

$$\Phi = wSu \tag{8-11}$$

平均能流为

$$\overline{\Phi} = \overline{w}Su \tag{8-12}$$

平均能流密度为

$$I = \frac{\overline{\Phi}}{S} = \overline{w}u \tag{8-13}$$

其方向与波速 $\boldsymbol{u}$ 同向，故矢量式为

$$\boldsymbol{I} = \overline{w}\boldsymbol{u} \tag{8-14}$$

NOTE

将(8-10)式代入(8-13)式,得

$$I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u \tag{8-15}$$

上式表明:波的强度与振幅平方成正比。

国际单位制中,能流密度的单位是瓦[特]每平方米(W/m^2)。

3. 平面简谐波的振幅

在推导平面简谐波的余弦表达式时曾指出,在平面简谐波的传播过程中,介质中各质点的振幅相等。现根据(8-15)式和能量守恒定律加以证明。设有一平面简谐波在均匀的不吸收波能量的介质中传播,我们在垂直于波传播方向上取两个面积相等的平面 S_1 和 S_2,如图 8-8 所示。根据能量守恒定律,在一个周期内通过 S_1 面的能量应该等于通过 S_2 面的能量,即 $I_1S_1T=I_2S_2T$,所以 $I_1=I_2$,由(8-15)式得

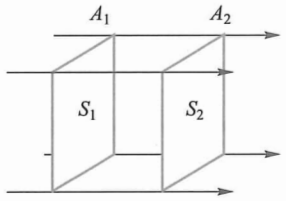


图 8-8 平面简谐波振幅 $A_1=A_2$

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 u=\frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 u$$

$$A_1=A_2 \tag{8-16}$$

上式表示:在均匀的不吸收波能量的介质中传播的平面简谐波的振幅保持不变。

4. 球面简谐波的余弦表达式

波面是球面的简谐波称为球面简谐波。设有一球面简谐波在均匀、各向同性、不吸收波能量的介质中传播,点波源位于球心 O,如图 8-9 所示,波面 S_1 和 S_2 的半径分别为 r_1 和 r_2,根据能量守恒定律,在一个周期内通过 S_1 面和 S_2 面的能量相等,即 $I_1S_1T=I_2S_2T$,所以

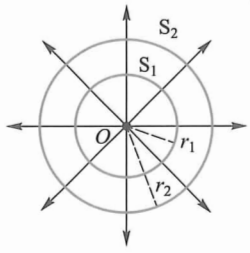


图 8-9 球面简谐波振幅

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

根据(8-15)式,有

$$\frac{I_1}{I_2}=\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

比较上两式,得

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{r_2}{r_1} \tag{8-17}$$

上式指出，在均匀、各向同性、不吸收波能量的介质中传播球面简谐波时，其振幅与离点波源的距离 r 成反比。若已知 r_1 处质点的振幅为 A_1，则 r 处质点的振幅为 A_1r_1/r。令 $A=A_1r_1$，得球面简谐波振幅为 A/r。

球面波的波线是以点波源为中心的一组径向直线。离波源 r 处质点的振动相位比波源的相位落后 $\Delta\varphi=\omega r/u$，因此球面简谐波的余弦表达式为

$$y=\frac{A}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{u}\right)+\varphi\right] \tag{8-18}$$

8-4 波的干涉

NOTE

1. 波的叠加原理

当几列波同时在同一空间传播时，每列波并不因其他波的存在而改变各自的特征（频率、振幅、波长、振动方向和传播方向等），因此在几列波相遇的区域内，任意一点的振动是各列波单独传播时在该点激发的振动的合振动。

这一规律称为波传播的独立性，或波的叠加原理（superposition principle）。例如，几个人同时讲话时，空气中同时传播着几列声波，而我们仍能分辨出各人的声音。

波的叠加原理适用于线性波，其波动方程是线性微分方程。对于非线性波，叠加原理不适用，例如强烈的爆炸声就有明显的相互影响。

一般地说，频率、振幅、相位等都不相同的几列波叠加时，情况很复杂。实验发现，满足一定条件的两列波叠加时，可能形成有的地方振动始终加强，有的地方振动始终减弱，从而形成强度在空间稳定分布的现象，这种现象称为波的干涉（interference）。

2. 波的干涉

干涉现象是一种最简单又具有重要实用意义的波的叠加现象，是波动的重要特征之一。能产生干涉现象的两列波称为相干波，产生相干波的波源称为相干波源。相干波源和相干波满足的

条件是频率相同、振动方向相同、相位差恒定，称为相干条件[①]。下面导出干涉现象中强度分布的规律。

如图 8-10 所示，S_1 和 S_2 是两个相干波源，它们的简谐振动余弦表达式分别为

$$y_{10}=A_{10}\cos(\omega t+\varphi_1),\quad y_{20}=A_{20}\cos(\omega t+\varphi_2)$$

它们所产生的相干波分别经过波程（path length）r_1 和 r_2 传至 P 点。根据波的叠加原理，P 点的合振动是两列波单独传播时在 P 点引起的振动

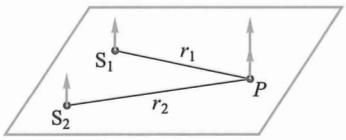


图 8-10 波的干涉

NOTE

$$y_1=A_1\cos\left[\omega\left(t-\frac{r_1}{u}\right)+\varphi_1\right]=A_1\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r_1+\varphi_1\right)$$

$$y_2=A_2\cos\left[\omega\left(t-\frac{r_2}{u}\right)+\varphi_2\right]=A_2\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r_2+\varphi_2\right)$$

的合成，这是两个同方向、同频率的简谐振动的合成，合振动是简谐振动，其振幅为

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

式中

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}\tag{8-19}$$

其中 $\varphi_2-\varphi_1$ 是两相干波源的初相差，$-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda}$ 是波程差 r_2-r_1 引起的相位差。因为波的强度与振幅的平方成正比，即

$$I\propto A^2,\quad I_1\propto A_1^2,\quad I_2\propto A_2^2$$

所以合成波的强度 I 与两相干波的强度 I_1 和 I_2 的关系为

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi\tag{8-20}$$

（1）干涉相长

两列波发生干涉时，合振幅最大的地方，有最大的强度，称为干涉相长。其条件是

$$\Delta\varphi=\pm2k\pi,\quad k=0,1,2,\cdots\tag{8-21}$$

该处

$$A=A_{max}=A_1+A_2,\quad I=I_{max}=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\tag{8-22}$$

当 $A_1=A_2$ 时

① 读者可以自行证明，振动方向垂直的两列波叠加时，任意一点的时间平均能量密度与位置无关。两列频率不相等的波叠加时，无论振动方向是否一致，任意一点的时间平均能量密度与位置无关。

NOTE

$$A_{max}=2A_1,\quad I_{max}=4I_1 \tag{8-23}$$

（2）干涉相消

两列波发生干涉时，合振幅最小的地方，强度最小，称为干涉相消。其条件是

$$\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{8-24}$$

该处

$$A=A_{min}=|A_1-A_2|,I=I_{min}=I_1+I_2-2\sqrt{I_1I_2} \tag{8-25}$$

当 $A_1=A_2$ 时，

$$A_{min}=0,\quad I_{min}=0 \tag{8-26}$$

（3）$\varphi_1=\varphi_2$ 时干涉相长和干涉相消的条件为

$$\Delta\varphi=2\pi\frac{r_1-r_2}{\lambda}=\begin{cases}\pm2k\pi, & k=0,1,2,\cdots, \quad \text{干涉相长}\\ \pm(2k+1)\pi, & k=0,1,2,\cdots, \quad \text{干涉相消}\end{cases} \tag{8-27}$$

由于波程差 $\delta=r_1-r_2$ 直观又易测量，所以上述条件常用 δ 表示为

$$\delta=r_1-r_2=\begin{cases}\pm k\lambda, & k=0,1,2,\cdots, \quad \text{干涉相长}\\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\cdots, \quad \text{干涉相消}\end{cases} \tag{8-28}$$

k 称为干涉的级次。如 $\delta=\pm k\lambda$ 中，$k=1$ 称一级极大；$\delta=\pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$ 中，$k=2$ 称二级极小。

例 3

已知波源 B 的简谐振动表达式为 $y_1=0.02\cos 2\pi t$（SI 单位），波源 C 的简谐振动表达式为 $y_2=0.02\cos(2\pi t+\pi)$（SI 单位），P 点至 B 的距离 $|BP|=0.4$ m，P 点至 C 的距离 $|CP|=0.5$ m，波速 $u=0.2$ m/s。求两相干波源 B 和 C 发出的两列相干波传到 P 点引起的两个分振动的相位差和合振动的振幅。P 点处波的强度是单列波强度的几倍？

解 根据（8-19）式，P 点两分振动的相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(|CP|-|BP|)$$

$$=\pi-\frac{2\pi}{0.2}(0.5-0.4)=0$$

即两分振动同相。根据（8-23）式，合振动振幅为 $A=2A_1=0.04$ m，波的强度为 $I=4I_1$。

8-5 驻波

驻波(standing wave)是一种特殊的干涉现象。振幅相同的两列相干波在同一直线上沿相反方向传播时叠加形成驻波。

1. 驻波的定性分析

如图 8-11 所示,有两列振幅相同的相干波沿 x 轴相向传播,正向传播的一列波用细实线表示,负向传播的一列波用虚线表示,合成波用粗实线表示。在两列波完全重叠时开始计时,经过 1/4 周期后,即 $t=T/4$ 时,两列波分别向 x 轴正向和负向传播了 1/4 波长的距离,这时各点的合位移都为零,合成波波形与 x 轴重合。再经过 $T/4$,即 $t=T/2$ 时,两列波又完全重叠,这时的合成波波形与 $t=0$ 时的波形不同,两时刻质点的合位移大小相同,方向相反。$t=3T/4$ 时,各点的合位移又为零,合成波波形又与 x 轴重合。经过一个周期,波形和 $t=0$ 时的波形相同。由图 8-11 可见,不论什么时刻,x 轴上有某些点始终静止不动,如 b、d、f 等点,称为驻波的波节(nodes);而另一些点的合振动振幅最大,如 a、c、e 等点,称为驻波的波腹(antinodes);其他各点的合振动振幅在零和最大值之间。两个相邻波节或相邻波腹之间的距离是 $\lambda/2$,相邻波节与波腹之间的距离是 $\lambda/4$。因为波节始终不动,整个合成波被波节分成许多分段,如 bd 段、df 段等,每一分段中各质点的振动相位都相同,两相邻分段中的质点振动相位相反。合成波波形并不沿 x 轴方向传播,而是驻定在一定位置上,各质点分段作不等幅的集体振动,没有相位和波形的传播。驻波的能量被限制在波节和波腹之间长度为 $\lambda/4$ 的小段中,不存在能量的定向传播,只是动能和势能在波腹和波节之间转化。当各质点都达到其最大位移时,振动速度和动能为零,但介质发生形变,尤其是靠近波节处形变最大,这时驻波能量以弹性势能的形式集中于波节附近。当各质点都处于平衡位置时,介质形变消失,势能为零,但各质点的速度和动能都达到各自的最大值,尤其是波腹处速度和动能最大,这时驻波能量以动能形式集中于波腹附近。

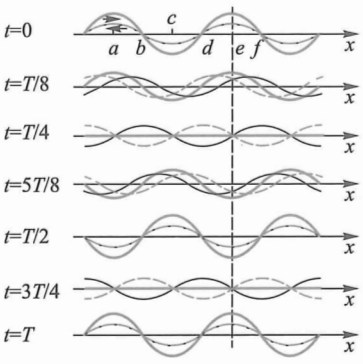


图 8-11 驻波的形成

NOTE

综上所述,驻波的特征是:

(1) 没有相位的传播,波线上各点的相位并不是逐点变化的,而是在两个相邻波节之间各质点的振动相位相同,波节两侧质点的振动相位相反。

NOTE

（2）没有波形的传播，波节始终静止不动，各质点分段作振幅不等的集体振动。

（3）没有能量的定向传播，只是在波腹与波节之间不断地进行着动能与势能的相互转化。由此可见，驻波与行波有不同的特征。

2. 驻波的定量分析

当在两列简谐行波完全重叠时开始计时，并取 $t=0$ 时达到正最大位移的某波腹点作为坐标原点 O（如图 8-11 中的 a 点或 e 点所示），则两列简谐行波在 O 点引起的简谐振动的表达式分别为

$$y_{10}=A\cos(\omega t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right),\quad y_{20}=A\cos(\omega t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

因此，沿 x 轴正向传播的平面简谐波表达式为

$$y_1=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

沿 x 轴负向传播的平面简谐波表达式为

$$y_2=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

得驻波表达式为

$$y=y_1+y_2=\left[2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right]\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\tag{8-29}$$

上式表明：

（1）除波节外，各点均在其平衡位置附近作简谐振动。

（2）各点的振动频率相等，等于两列相干行波的频率。

（3）各点振动的振幅 $\left|2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right|$ 与该质点的平衡位置 x 有关，波节始终静止不动，故波节坐标满足 $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)=0$，可解出波节的坐标为

$$x=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{4},\quad k=0,1,2,\cdots\tag{8-30}$$

相邻两波节的距离为

$$x_{k+1}-x_k=[2(k+1)+1)]\frac{\lambda}{4}-(2k+1)\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda}{2}\tag{8-31}$$

因为波腹处振幅最大，故波腹坐标满足 $\left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right|=1$，由此

NOTE

可解出波腹坐标为

$$x=\pm k\cdot\frac{\lambda}{2},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{8-32}$$

相邻两波腹的距离为

$$x_{k+1}-x_k=(k+1)\frac{\lambda}{2}-k\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{2} \tag{8-33}$$

相邻波节和波腹间的距离为

$$(2k+1)\frac{\lambda}{4}-k\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{4} \tag{8-34}$$

(4) 质点振动的相位

当 $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)>0$ 时，驻波表达式为 $y=\left|2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right|\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$；质点振动的相位为 $\frac{2\pi}{T}t$，它与质点的平衡位置 x 无关。

当 $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)<0$ 时，驻波表达式为 $y=\left|2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right|\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\pi\right)$；质点振动的相位为 $\frac{2\pi}{T}t+\pi$，它与质点的平衡位置 x 也无关。

因为波节满足 $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)=0$，波节两边质点位移方向相反，所以波节两侧质点的振动是反相的(有 π 的相位差)，两相邻波节间各点的振动相位相同。这表明各质点分段作振动。

3. 半波损失

当波在固定端反射时，反射点是波节，这表明反射处反射波与入射波相位反相，因此波在反射过程中有相位突变 π。因为相位差 π 对应于波程差 $\lambda/2$，所以常将波在反射过程中产生的相位突变 π 的现象称为半波损失。波在自由端反射时，反射点是波腹，这表明在自由端反射波与入射波相位同相，不存在半波损失。

波从介质 1 垂直入射到分界面，再从介质 2 反射回介质 1 时，若满足 $\rho_2u_2>>\rho_1u_1$，则分界处形成波节，存在半波损失；若 $\rho_2u_2<<\rho_1u_1$，则分界处形成波腹，不存在半波损失。上面两个不等式中，ρ 是介质的密度，u 是介质中的波速，ρu 大的称波密介质，小的称波疏介质。

例 4

已知驻波表达式 $y=4\cos(2x)\cos(5t)$(SI 单位),求:(1) 叠加成此驻波的两列平面简谐行波的波长和波速大小;(2) 0 到 10 m 范围内波节和波腹的位置。

解 (1) 用对照方法确定波长和波速。将驻波表达式与标准形式(8-29)式对照,得 $\frac{2\pi}{\lambda}=2\ \mathrm{m^{-1}}$,$\frac{2\pi}{T}=5\ \mathrm{s^{-1}}$,因此波长为 $\lambda=3.14$ m,波速为 $u=\frac{\lambda}{T}=\frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda}=\frac{5}{2}=2.5$ m/s。

(2) 波节始终静止不动,满足 $\cos(2x)=0$,所以

$$2x=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k=0,1,2,\cdots$$

由此解出从 0 到 10 m 范围内波节的位置为

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{4}\ (\mathrm{m}),\quad k=0,1,2,3,4,5$$

因为相邻波腹与波节间距离为 $\frac{\lambda}{4}=\frac{\pi}{4}$,所以 0 到 10 m 范围内波腹的位置为

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=(k+1)\frac{\pi}{2}\ \mathrm{m},$$

$$k=-1,0,1,2,3,4,5$$

例 5

已知入射波表达式 $y_1=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]$,在 $x=0$ 处发生完全反射,反射点为固定端。试写出:

(1) 反射波表达式;(2) 合成波表达式;(3) 波节和波腹的位置。

解 (1) 将 $x=0$ 代入入射波的表达式 y_1,得到入射波在 $x=0$ 处激发的振动的表达式为 $y_{10}=A\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi\right)$,因反射点是固定端,故反射时有半波损失,反射波在 $x=0$ 处的振动 y_{20} 与 y_{10} 反相;又因是完全反射,没有透射,故 y_{20} 与 y_{10} 振幅相同;而频率在反射过程中不变。因此由 y_{10} 知 $y_{20}=A\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi+\pi\right)$。由入射波表达式知,入射波沿 X 轴负方向传播,故反射波沿 X 轴正方向传播。由 y_{20} 得反射波表达式为

$$y_2=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi+\pi\right]$$

(2) 由公式 $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 得合成波表达式为

$$y=y_1+y_2=2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

(3) 由 $\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\frac{\pi}{2}\right)=0$ 解出波节位置为 $x=(k+1)\frac{\lambda}{2}$。因入射波沿 x 轴负方向传播,而在 $x=0$ 处完全反射,故波动发生在 x 轴正半轴,所以上式中 k 值取 $-1,0,1,\cdots$。波节位置亦可表示作 $x=k\frac{\lambda}{2}$,$k=0,1,2,\cdots$。

由 $\left|\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\frac{\pi}{2}\right)\right|=1$ 解出波腹位置为 $x=(2k+1)\frac{\lambda}{4}$,$k=0,1,2,\cdots$。

8-6 多普勒效应

NOTE

由于波源与观测者(接收器)有相对运动使得观测者接收到的频率与波源的振动频率不同,这种现象称为多普勒效应(Doppler effect)。例如,当高速火车鸣笛而来时,站台上的旅客听到火车汽笛的音调变高;火车鸣笛而去时,旅客听到汽笛的声调变低。

下面讨论波源与观测者在两者连线上有相对运动时机械波的多普勒效应。对于机械波来说,有一个“绝对参考系”,即介质静止参考系。我们讨论波的速度,观测者的速度或波源的速度都是相对介质而言的。用 v_S 表示波源相对于介质的速率,v_r 表示观测者相对于介质的速率。下面我们分别讨论观测者和波源运动对接收频率的影响。

1. 观测者运动,波源静止

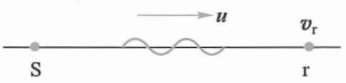


图 8-12 观测者运动

观测者(接收器)的接收频率 ν_r 是单位时间内接收器所作的完全振动的次数,它等于单位时间内接收器接收到的完整波数目,即等于波相对接收器的速率除以波长,所以

$$\nu_r=\frac{u\pm v_r}{\lambda} \tag{8-35}$$

如图 8-12 所示,当观测者 r 接近波源 S 时,观测者速度 $\boldsymbol{v}_r$ 向左,波速 $\boldsymbol{u}$ 向右,波相对观测者的速率为 $u+v_r$;当 r 离开 S 时,v_r 向右,u 向右,波相对观测者的速率为 $u-v_r$。用正负号分别表示观测者接近或远离波源。可总结为:当观测者运动、波源静止时,波相对观测者的速度改变了,波长不改变,因此频率改变了。

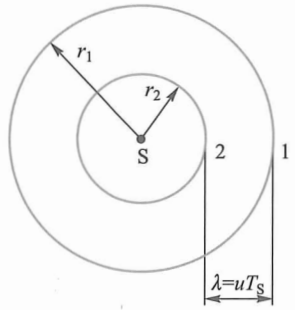
2. 波长与波源的运动有关

(1) 波源相对于介质静止($v_S=0$)

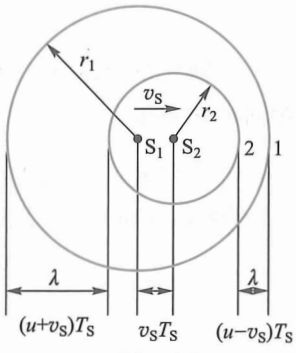
如图 8-13(a)所示,点波源 S 在 $t=0$ 时的振动状态于时刻 t 传到半径 $r_1=ut$ 的球面波波面 1;S 在 $t=T_S$ 时的振动状态于时刻 t 传到半径 $r_2=u(t-T_S)$ 的球面波波面 2,波长等于波面 1 和波面 2 的间距,即 $\lambda=r_1-r_2=uT_S$。

(2) 波源以速率 v_S 相对于介质运动($v_S\neq 0$)

如图 8-13(b)所示,$t=0$ 时波源位于 S_1,$t=T_S$ 时波源位于



(a) $v_S=0$



(b) $v_S\neq 0$

图 8-13 波源运动时的波长

NOTE

S_2,S_1 与 S_2 之间的距离等于 $v_S T_S$。时刻 t,波源在 $t=0$ 时的振动状态传到波面 1,$t=T_S$ 时的振动状态传到波面 2,两波面的间距,即波长为

$$\lambda = r_1 - r_2 \mp v_S T_S = (u \mp v_S) T_S \tag{8-36}$$

在波源运动的前方取“-”号,后方取“+”号,即波源接近观测者时取“-”号,离开观测者时取“+”号。因此,这时观测者接收到的波的频率是

$$\nu_r = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{(u \mp v_S) T_S} = \frac{u}{(u \mp v_S)} \nu_S \tag{8-37}$$

其中负号表示波源接近观测者,正号表示波源远离观测者。可总结为:当波源运动、观测者静止时,波速不变(因为波离开波源后在介质中传播,与波源无关),波长改变,因此频率改变。

3. 观测者和波源都运动

这时相对观测者而言,波速改变,波长也改变,结合由(8-35)式和(8-37)式得

$$\nu_r = \frac{u \pm v_r}{\lambda} = \frac{u \pm v_r}{(u \mp v_S) T_S} = \frac{u \pm v_r}{(u \mp v_S)} \nu_S \tag{8-38}$$

上式中,当观测者接近波源时,v_r 前取“+”号,离开波源时取“-”号;波源接近观测者时,v_S 前取“-”号,离开观测者时取“+”号。

多普勒效应在科学技术上有广泛的应用。例如,利用声波的多普勒效应可以监测车速;利用超声波的多普勒效应可对心脏跳动情况进行诊断;利用电磁波的多普勒效应可以测定星球相对于地球的运动速度。

例 6

一辆汽车以速率 v 向一山崖驶去,汽车喇叭的振动频率为 ν,声速为 u,求司机听到的山崖回声的频率。

解 喇叭以速率 v 接近山崖,根据(8-36)式,在喇叭运动前方,波长为

$$\lambda = (u - v_S) T_S = \frac{u - v_S}{\nu_S} = \frac{u - v}{\nu}$$

司机以速率 v 接近山崖,反射波以速率 u 接近司机,所以波相对司机的速率为 $u+v$。根据(8-35)式,司机听到的回声频率为

$$\nu_r = \frac{u+v}{\lambda} = \frac{u+v}{u-v} \nu$$

8-7 超声多普勒血流仪和医学超声成像诊断仪

超声是频率在 20 kHz 以上的声波，正常人类的听觉系统一般无法感知超声波。研究表明，超声波可以透过人体组织并对任何声阻抗的变化产生灵敏的反应，从而在人体内获得的携带有器官和结构信息的声回波信号。

如图 8-14 所示是利用多普勒效应测量血液流动速度的原理图，探头由发射和接收超声波的两块晶片所组成。静止的超声波发生器发射确定频率的超声波，超声波进入人体血管后，被以一定速度运动的血液所接收，而运动的血液反射超声波后，反射波由静止的超声波接收器所接收。因为血液是运动的，因此，超声波接收器接收的超声波频率与超声波发生器发射的频率不同，产生了多普勒频移。根据超声波发生器发射的频率和多普勒频移就可以计算出血液的流动速度。

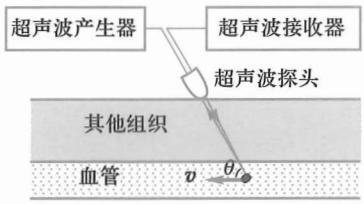


图 8-14 超声多普勒血流仪原理图

NOTE

设静止声源（即超声波发生器）发射超声波的频率为 ν，超声波在人体内的传播速度为 u，血液流动的速度为 v，超声波传播方向和血流方向之间的夹角为 θ。则血管中随血流以速度 v 运动着的红细胞接收到的超声频率 ν' 为

$$\nu' = \frac{u + v\cos\theta}{u}\nu$$

红细胞反射回来的超声波由静止的探头接收，这时红细胞相当于以速度 v 运动的波源，静止的超声波探头接收到的频率 ν'' 为

$$\nu'' = \frac{u}{u - v\cos\theta}\nu'$$

联立两式，可得

$$\nu'' = \frac{u + v\cos\theta}{u - v\cos\theta}\nu$$

超声波发生器发出的超声波频率与接收的回波频率之差将产生多普勒频移 $\Delta\nu$，且

$$\Delta\nu = \nu'' - \nu = \frac{2v\cos\theta}{u - v\cos\theta}\nu$$

可以求出血流速度为

NOTE

$$v=\frac{\Delta\nu}{(2\nu+\Delta\nu)\cos\theta}u$$

因为 $u\gg v$，故 $\Delta\nu\ll\nu$。

$$v=\frac{\Delta\nu}{2\nu\cos\theta}u$$

由于人体内获得的超声回波信号携带有器官组织和结构的信息，若将它们以图像的方式清晰地、直观地显示出来，将为医生对疾病的诊断提供极大的帮助。由于超声诊断成像设备的操作和作用环境无特殊要求，尤其可使病人在诊断过程中无损伤、无痛苦，并可清晰显示软组织，因此广泛地应用于人体的许多部位和脏器的疾病诊断中，尤其在腹部、眼、心血管和妇产科方面，超声诊断更有独到之处。

目前常用的显示方式有 A 型超声诊断仪、M 型超声诊断仪、B 型超声诊断仪、超声多普勒血流仪、彩色多普勒血流显像仪等。随着信息技术的发展，特别是计算技术的发展，人们发明了多种不同形式的超声层析成像（computed tomography，CT）技术，即通过从物体外部检测到的数据重建物体内部（横断面）信息的技术，也叫计算机辅助断层成像技术。

超声成像是现代医学成像的主要手段之一。与 X 射线、核医学成像、CT 扫描等手段相比，超声成像的优点在于无创伤、无损害地观察软组织的构造并进行实时动态的研究，但其局限性在于超声回声信息中缺乏病原学的特异性，声学图像的整体解剖学概念差，特别是对含气组织及其骨骼系统的探测存在较大的困难等。

本章摘要

1. 机械波的产生和传播

产生条件：波源和介质。

行波是相位传播、波形传播和能量传播过程。

2. 波速、波长、周期和频率

波速 u 取决于介质的惯性和弹性。

波长 λ 表示波的空间周期性。

周期 T、频率 ν 表示波的时间周期性。

NOTE

相互关系 $u=\lambda\nu=\dfrac{\lambda}{T}$，$\dfrac{\Delta\varphi}{2\pi}=\dfrac{\Delta x}{\lambda}=\dfrac{\Delta t}{T}$

3. 简谐波表达式

平面简谐波：$y=A\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{x}{u}\right)+\varphi\right]$

球面简谐波：$y=\dfrac{A}{r}\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{r}{u}\right)+\varphi\right]$

4. 波的能量和能流：动能和势能同步变化，量值相等

能量密度：$w=\rho\omega^2A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\dfrac{x}{u}\right)\right]$，$w_{\max}=\rho\omega^2A^2$，$\overline{w}=\dfrac{1}{2}\rho\omega^2A^2$

波的强度：$I=\overline{w}u=\dfrac{1}{2}\rho\omega^2A^2u$

5. 波的干涉

波的相干条件：频率相同、振动方向相同、相位差恒定。

干涉相长和相消条件：$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda}$

$$\Delta\varphi=\begin{cases}\pm2k\pi, & k=0,1,2,\cdots, \quad \text{干涉相长}\\ \pm(2k+1)\pi, & k=0,1,2,\cdots, \quad \text{干涉相消}\end{cases}$$

$\varphi_1=\varphi_2$ 时干涉相长和干涉相消的条件为

$$\delta=r_1-r_2=\begin{cases}\pm k\lambda, & k=0,1,2,\cdots, \quad \text{干涉相长}\\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\cdots, \quad \text{干涉相消}\end{cases}$$

两列波干涉的强度分布：$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi$。

6. 驻波

振幅相同、传播方向相反的两列相干波叠加而成，是一种特殊的干涉现象。

驻波表达式（原点是波腹，$\varphi=0$）：

$$y=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right]+A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$=2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

相邻波节和波腹间距等于 $\lambda/4$。

波节两侧质点振动相位相反，相邻波节间各质点振动相位相同。

7. 半波损失

行波在反射时引起的相位突变 π 的现象。

8. 机械波的多普勒效应

波源与观测者有相对运动时，$\nu_r \neq \nu_S$的现象。

$$\nu_r = \frac{u \pm v_r}{(u \mp v_S)}\nu_S$$

思考题

8-1 振动、波动有什么联系和区别？机械波中某一质点的简谐振动表达式与该简谐波的表达式有何关系？有什么不同？

8-2 机械波通过不同介质时，波长 λ、频率 ν 和速度 u 中，哪些要改变？哪些不改变？

8-3 横波与纵波有何区别？波峰处质点的运动状态和波谷处质点的运动状态有什么不同？

8-4 要使小提琴的声调（频率）升高，可采取哪些措施？

8-5 为什么我们能同时听到各种声音，而且能同时辨别各种声波传来的方向？

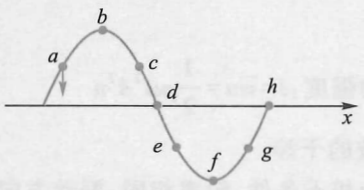
8-6 某卫星发射恒定频率的电磁波。地面跟踪站探测到这一频率的电磁波，使它与某一标准频率的电磁波形成拍振动，然后将这个拍转入扬声器，于是人们就听到了卫星的信号。试分析当卫星趋近跟踪站、通过跟踪站上空以及离开跟踪站时声音的变化情况。

8-7 男人和女人的声音哪一个容易发生绕射？当人一边朝着障碍物前进一边叫喊时，所听到的回声声调将发生什么变化？

8-8 已知某时刻横波的波形曲线如图所示，其中 a 点正向下运动，请在图中判断：

（1）波传播的方向；

（2）该时刻 b、c、d、e、f、g、h 各点的运动方向。



思考题 8-8 图

8-9 声源向静止的观察者运动和观察者向静止的声源运动时，都会使观察者听到的声调变高，试问这两者在物理上有什么区别？

8-10 什么是能流密度？它有什么物理意义？它与哪些因素有关？

8-11 波在介质中传播时，为什么介质元的动能和势能具有相同的相位，而弹簧振子的动能和势能却没有这样的特点？

8-12 在波传播时，介质的质元并不随波迁移。但实际上在水面上有波形成时，可以看到漂在水面上的树叶沿水波前进的方向移动。这是为什么？

习题

8-1 潮汐波在太平洋中的速率约为 740 km/h，波长为 300 km，问其频率为多大？从日本到美国旧金山的距离为 8×10^3 km，问潮汐波传播所需的时间？

8-2 （1）频率在 $20\sim20\times10^3$ Hz 的弹性波能触发人耳的听觉。设空气里的声速为 330 m/s，求这两个频率声波的波长；

(2) 人眼所能见到的光(可见光)的波长范围是400 nm(紫光)到760 nm(红光),求可见光的频率范围。($1\ \text{nm}=10^{-9}\ \text{m}$,光速 $c=3\times10^{8}\ \text{m/s}$)

8-3 据报道,1976年唐山大地震中,有些物体曾被猛地向上抛起2 m高。设地震横波为简谐波,且频率为1 Hz,波速为3 km/s。问此地震波的波长为多大?振幅为多大?

8-4 频率为500 Hz的平面波的波速 $u=350\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。问:

(1) 同一波线上,相位差为 $\pi/3$ 的两点相距多远?

(2) 介质中某质元在时间间隔为 10^{-3} s的两个振动状态的相位差是多少?

8-5 频率为 3.0×10^{3} Hz、振幅为 1.0×10^{-3} m的声波,以波速 $u=1.56\times10^{3}\ \text{m/s}$ 沿 x 轴正方向传播,已知 x 轴上 A 和 B 两点的距离为 $x_B-x_A=0.13$ m。

(1) 求波长 λ;

(2) 求波从 A 传至 B 所需的时间;

(3) 同一时刻,B 点的振动相位比A点的振动相位落后多少?

(4) 求质点振动速度和加速度的最大值。

8-6 已知一平面简谐波的表达式为 $y=5\cos\left(8t+3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$(SI单位),问:

(1) 该平面波沿什么方向传播?

(2) 它的频率、波长和波速各是多少?

(3) 表达式中的 $\dfrac{\pi}{4}$ 有什么意义?

8-7 某潜艇声呐发出的超声波表达式为

$y=1.20\times10^{-3}\cos(10^{5}\pi t-220x)$(SI单位)

求:

(1) 波源的振幅和频率;

(2) 海水中超声波的波长和波速;

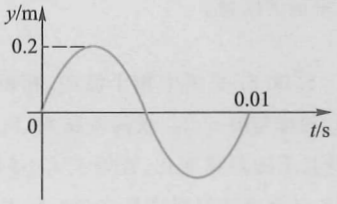
(3) 距波源为 $x_1=8.00$ m与 $x_2=8.05$ m处两质点的振动相位差。

8-8 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播,波速 $u=400\ \text{m/s}$,$x=0$ 处质点的简谐振动曲线如图所示。求:

(1) 平面简谐波的表达式;

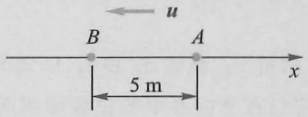
(2) $x=2$ m处质点的振动表达式;

(3) $x_1=15$ m和 $x_2=16$ m处两质点的相位差。



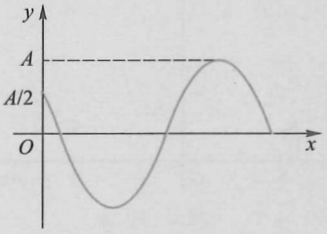
习题8-8图

8-9 一平面简谐波以速度 $u=10\ \text{m/s}$ 沿 x 轴负方向传播,波线上 A 点的振动表达式 $y_A=2\cos(2\pi t+\varphi)$(SI单位),$B$ 点和 A 点相距5 m,如图所示。试分别以 A 和 B 为坐标原点写出平面简谐波的表达式。



习题8-9图

8-10 沿 x 轴正方向传播的平面简谐波在 $t=0$ 时的波形曲线如图所示,波长 $\lambda=1$ m,波速 $u=10\ \text{m/s}$,振幅 $A=0.1$ m。试写出:



习题8-10图

(1) O 点的振动表达式;

(2) 平面简谐波表达式;

(3) $x=1.5$ m处质点的振动表达式。

8-11 一电台的功率为500 W,求距电台500 km处电磁波的平均能流密度(设电磁波为球面波)。

8-12 一平面简谐波在介质中传播,波速 $u=$

10^3 m/s，振幅 $A=1.0\times10^{-4}$ m，频率 $\nu=10^3$ Hz，介质密度 $\rho=800$ kg/m^3。求：

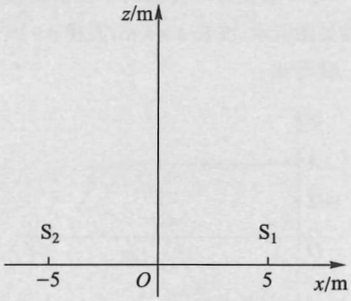
（1）波的强度；

（2）60 s 内通过垂直于波传播方向上面积为 $S=4\times10^{-4}$ m^2 平面的能量。

8-13 S_1 和 S_2 是两个相干波源，相距为 1/4 波长，S_1 比 S_2 相位超前 $\pi/2$。设两波在 S_1、S_2 连线方向的强度相同且不随距离变化，皆等于 I_1。问此连线上在 S_2 外侧各点合成波的强度是多少？S_1 外侧各点合成波的强度是多少？

8-14 同一介质中 A 和 B 两点有两个相干波源 S_1 和 S_2，其振幅相等，频率均为 100 Hz，相位差为 π。若 A 和 B 相距 30 m，波在介质中的传播速度为 400 m/s，试求 A、B 连线上因干涉而静止的各点位置。

8-15 两相干点波源 S_1 和 S_2，已知 S_1 的相位比 S_2 超前 π，它们在坐标系中的位置如图所示，其振动方向垂直纸面（即 y 轴方向），并以 $u=100$ m/s 的速度在 xOz 平面内向四周传播，波的频率为 25 Hz，试求：



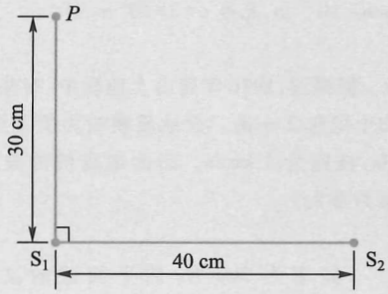
习题 8-15 图

（1）在两波源连线的垂直平分线上（即 z 轴上）干涉加强或减弱点的位置；

（2）在两波源连线上 S_1 右侧干涉加强或减弱点的位置；

（3）在两波源连线上 S_1 和 S_2 之间干涉加强点的位置。

8-16 同一介质中的两个相干波源 S_1 和 S_2 的振幅皆为 $A=0.33$ m，如图所示。当 S_1 点为波峰时，S_2 恰为波谷。设介质中的波速为 100 m/s，欲使两列波在 P 点干涉后得到加强，这两列波的最小频率为多少？



习题 8-16 图

8-17 两列相向传播的平面简谐波为

$$y_1=6.0\times10^{-2}\cos\left[\frac{\pi}{2}(2.0x-8.0t)\right]\ (\mathrm{SI})$$

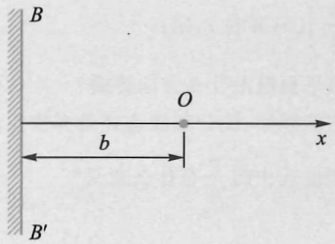
$$y_2=6.0\times10^{-2}\cos\left[\frac{\pi}{2}(2.0x+8.0t)\right]\ (\mathrm{SI})$$

求：

（1）简谐波的频率、波长和波速；

（2）合成波波节和波腹的位置。

8-18 波速为 u 的平面简谐波沿 x 轴负方向传播。已知 O 点的简谐振动表达式为 $y_0=A\cos(\omega t+\varphi)$，此波在平面 BB' 处全反射，如图所示，反射点为波节，试写出反射波表达式。



习题 8-18 图

8-19 一平面简谐波 $y_1=A\cos(\omega t-kx)$（$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$称为波数）向右传播。若其在距坐标原点为 $x_0=4\lambda$ 处被墙壁反射，反射处可视为波节。试求：

（1）反射波的表达式；

（2）驻波的表达式；

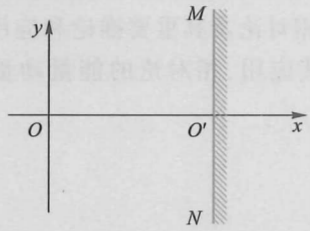
（3）原点与 x_0 处之间各个波节和波腹的位置。

8-20 如图所示，一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，波速 $u=40$ m/s。已知在坐标原点 O 引起的振动方程 $y_O=A\cos\left(10\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$（SI 单位），$MN$ 是垂直于 x 轴的波密介质反射面，已知 $|OO'|=14$ m，设反射波不衰减，试求：

（1）入射波和反射波的表达式；

（2）驻波的表达式；

（3）驻波波腹和波节的位置。



习题 8-20 图

8-21 一警报器发出频率为 1 000 Hz 的声波，以速率 10 m/s 离开观测者向悬崖运动。已知声速 $u=340$ m/s，问观测者接收到的下列频率是多少？

（1）直接从警报器发出的声波；

（2）从悬崖反射的声波。

8-22 一个观测者在铁路边，一列火车从远处开来，他接收到的火车汽笛声的频率为 650 Hz。当火车从身旁飞驰而过、远离他时，他测出的汽笛声频率为 540 Hz。已知空气中声速为 340 m/s，求火车行驶的速度。

8-23 x 轴上 A 和 B 两点的坐标分别为 $x_A=1$ m，$x_B=1.5$ m。波源 S 位于 x 轴负半轴上，其速率 $v_S=100$ m/s，频率 $\nu_S=200$ Hz，波速 $u=200$ m/s。求下列情况下，A 和 B 两点的相位差 $\varphi_A-\varphi_B$。

（1）波源接近 A、B；

（2）波源离开 A、B。

8-24 人体主动脉内血液的流速一般是 0.32 m/s。现在沿血液流动方向发射 4.0 MHz 的超声波，被红细胞反射回来的波与原发射波之间形成的拍频为多大？已知超声波在人体内的传播速度为 1.54×10^3 m/s。

8-25 设计一个计算机程序来动态演示平面简谐波 $y=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$ 在传播过程中遇到反射端形成反射波和驻波的过程。

要求程序能够选择反射处为固定端或自由端，并可在一定范围内改变波的周期 T、波长 λ 和反射端所处的位置。

（提示：选择反射端为固定端或自由端，应在程序起始处通过设定标志值来区分，如 $k=-1$ 为固定端，$k=1$ 为自由端。选择 k 值后程序应会运行不同的子程序）

习题答案

第九章　狭义相对论



本章补充资源

本章首先介绍经典力学的伽利略变换与麦克斯韦电磁理论的内在矛盾以及众多物理学家为解决这个矛盾所作出的重要贡献，然后介绍爱因斯坦狭义相对论及其重要推论和应用。本章要求重点掌握洛伦兹变换及其应用、相对论的能量动量守恒及其应用。

9-1　光速

NOTE

在你的经验中，什么东西跑得最快？这个世界上物体的运动速度有没有上限？对于第一个问题，很多人的答案可能是光，因为它瞬间到达。那么光的速度是多少呢？是有限的还是无限的？有文字记载第一个实际尝试测量光速的人是伽利略。他和助手夜晚拿着灯笼各自站在相距一英里的两处（有说是山头），由伽利略掀开灯笼的遮布并开始计时，当助手见到光后也掀开自己灯笼的遮布。伽利略见到助手方向的光后停止计时。伽利略由此得到了光速。为了提高测量的精度，伽利略延长了距离进行同样的操作，然而来回的时间并没有改变。伽利略很快就认识到光的速度是非常大的，他的测量失败。17 世纪丹麦天文学家奥勒·罗默是得到可靠光速的第一人。他发现木星的卫星每次被木星遮挡所持续的时间并不是一样长的。他认为这是由于地球（木星）轨道的运转，地木之间的距离是随时改变的。因此卫星被遮挡时和露脸时地木间的距离不一样，见图 9-1。这导致地球看到的遮挡持续时间与卫星实际被遮挡的时间不一样。因此即使卫星实际被遮挡的时间每次都一样，地球上看到的都可以不一样。经过长年的观测，他得到光的速度是 2.2×10^8 m/s[①]。第一位在地面上测量光速的是百年后的法国著名物理学家阿曼

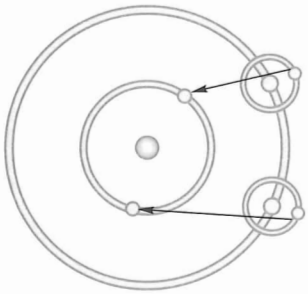


图 9-1

① 现代的物理学家发现罗默的观察数据极为精确，是他自己计算时出现了失误。

达·菲索[①]。菲索的测量装置如图 9-2 所示。菲索得到光的速度是 31.5 万千米/秒。各种改进的测量光速的实验一直延续到当代,但是结论在那时基本可以确定了:光速非常大但是是有限的。那么有没有比光运动更快的物质呢?我们不得而知。然而也许有同学会想:如果我坐着火车迎着光跑,不是可以看到更快的光了吗?如此而来,光的速度应该不是固定的。由于我们相对地面的运动速度很小,我们并不能显著发现光速的改变。这样说来似乎蛮有道理。然而随着物理学家对光本性的深入研究,事情并不那么简单。

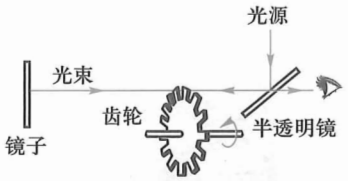


图 9-2 齿轮静止时,光从齿轮缝中穿过,到达反光镜后原路返回,可以被观察到。转动齿轮,当转速达到一定值时,穿过的光在返回时,正好被齿轮遮挡,所以人无法观测到返回的光。继续加大转速,达到一定值时,光从一个齿缝间穿过,从下一个齿缝间返回。知道齿轮的转速,就可以知道光来回行走需要的时间

9-2 麦克斯韦电磁理论

随后的课程会介绍,光的本性是电磁波,其被麦克斯韦电磁理论完美预言。电磁理论还预言光(电磁波)的速度是 3.0×10^8 m/s(一个确定的值),大小与实验完全一致。然而根据经典力学,说一个物质的运动速度必须要明确其相对哪个参照物而言的。后面电磁学章节将会展示,麦克斯韦方程本身看不出是建立在哪个参照物(参考系)上的,所以物理学家想给这个理论找个参考系。电磁理论还告诉我们,光的传播速度与光源的速度没有关系。这个性质和声波(机械波)的性质非常相近[②]。我们说声波的速度是 340 米/秒,是相对空气介质而言的。也就是说,当我们相对空气静止时,无论声源如何运动,我们测量声波的速度都是恒定的。反之,如果我们相对空气运动,那么声速是改变的。也就是说在刮风的天气,声源在上风口和下风口,我们观测声波的速度是不一样的。既然光也是一种波,它是否也像声波一样需要一种介质呢?历史上物理学家的确是这样认为的,还给这种介质起名为“以太”。有了以太,物理学家自然认为麦克斯韦的电磁理论是在以太静止系中写下的,预言的是以太静止系中的光速,就像我们通常处理声波和其他机械波的方式一样。这一些看起来是那么自然,然而物理学家还是苦恼:“以太”在哪里呢(电磁理论中并没有这个东西)?

NOTE

① 在菲索之前,英国天文学家布拉雷德在 1729 年通过恒星的光行差得到的光速是 3.08×10^8 m/s。

② 机械波的这个性质虽然和经典粒子的性质是不同的,但是机械波和经典粒子都符合牛顿经典力学。因此电磁波如果类似机械波,不会与伽利略变换相矛盾。

9-3 以太

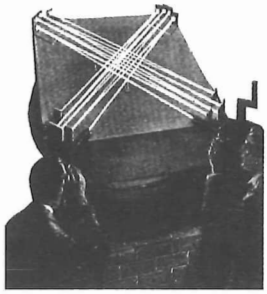


图 9-3 迈克耳孙和莫雷的干涉仪。整个实验平台置于水银之上，便于平稳旋转

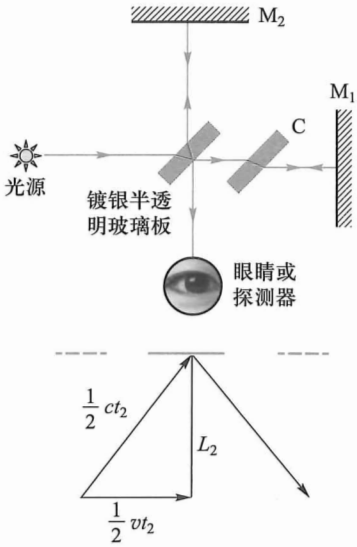


图 9-4 上图是干涉仪的光路图。下图是光在以太静止系中实际行走的轨迹。由于 M_2（包括整个干涉仪）是在以太中运动，光从半透膜达到 M_2，必须斜着行进，同样从 M_2 反射后也必须斜着行进才能返回半透膜

显然如果有以太，它应该充满整个太空，因为遥远的星光能到达地球。我们的地球在以太中穿梭，就像敞篷汽车在空气中行驶，应该能感受到“以太风”：迎着地球运动方向而来的光与追着地球而来的光的速度是不一样的，虽然这个差值是很小的（地球运动速度已经比我们陆地上所有宏观物体的运动速度大得多了）。有两位物理学家：迈克耳孙和莫雷，就打算测量这个微小的差别[①]。他们巧妙地利用光的干涉现象，高精度地分辨出光速的微小改变。他们的测量装置如图 9-3 所示。实验的原理见图 9-4。光线从半反射镜分光后走两条路径：其中一条假设为沿着地球的运动方向，另外一条垂直于地球的运动方向。然后光到达反光镜后返回，再相聚而发生干涉。我们假设一条光路的长度为 L_1，另一条为 L_2[实验上设计两条光路长度基本相同，但是实验并不要求它们完全相等，见(9-5)式]。沿着地球运动方向的光来回需要时间是

$$t_1=\frac{L_1}{c+v}+\frac{L_1}{c-v}=\frac{1}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\frac{2L_1}{c} \tag{9-1a}$$

其中 c 是光速，v 是地球相对以太运动的速率，不过以太静止参考系在哪里并不确切，一般默认为地球相对太阳的速率（至少数量级一样）。垂直地球方向的光路如图 9-4 所示，来回时间是

$$t_2=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{2L_2}{c} \tag{9-1b}$$

显然两条光路来回时间不一样，然而单次的干涉并不能获得有用的信息，因为你不知道没有地球运动时干涉条纹是怎样的。所以必须进行另外一次干涉实验做比较。现在我们把整个仪器旋转 90 度，让光路 1 垂直地球运行方向，光路 2 沿着地球运动方向。这样光路 1 来回的时间是

① 在迈克耳孙和莫雷之前，已经有很多物理学家对以太做过深入的研究了，比如菲索的以太拖曳实验、恒星的光性差，限于篇幅就不讨论了。这些实验的总体结论是无法确定物体（或介质）相对以太运动的大小，换句话说，无法确定是否存在以太。爱因斯坦在回顾那段历史时表示，菲索的以太拖曳实验，恒星的光性差已经足够说服他以太是不必要的，迈克耳孙和莫雷的实验对他影响不大（他没有太关注）。迈克耳孙自己却曾说过他很遗憾他的实验促使了狭义相对论这个怪物诞生。

NOTE

$$t_1'=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{2L_1}{c}$$

即比第一次提前

$$\Delta t_1=t_1-t_1'=\frac{1}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\frac{2L_1}{c}-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{2L_1}{c}\approx\frac{v^2}{c^2}\frac{L_1}{c} \tag{9-2}$$

约等号是忽略了泰勒展开中 v/c 的更高幂次。而光路 2 来回的时间是

$$t_2'=\frac{L_2}{c+v}+\frac{L_2}{c-v}=\frac{1}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\frac{2L_2}{c}$$

将比第一次延长

$$\Delta t_2=t_2'-t_2=\frac{1}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\frac{2L_2}{c}-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{2L_2}{c}\approx\frac{v^2}{c^2}\frac{L_2}{c} \tag{9-3}$$

时间的差距等效于光程(光行走的路程)的差距,所以两次实验两条光路的光程差改变为

$$\Delta L=(\Delta t_1+\Delta t_2)c\approx\frac{v^2}{c^2}(L_1+L_2) \tag{9-4}$$

这会导致第二次实验的干涉条纹相对第一次干涉条纹发生移动。迈克耳孙莫雷实验的臂长是 11 m,(迈克耳孙自己最开始也做过同样的实验,使用的臂长是 1.2 m,误差较大。)地球的速度是 30 km/s,如果采用可见光的中部波长 $\lambda=5.5\times10^{-7}$ m,将有 0.4 个条纹的移动。实际上在实验的精度下(精度为 0.01 个条纹),没有见到条纹移动。随后这个实验被不断改进,结果都否定以太风的存在(至少它相对地球的速度要远远小于地球相对太阳的运动速度)。这个实验装置还可以静止不动,使地球绕太阳转一周,这样地球在不同时间处于不同的惯性系。无论如何,总会有一个参考系相对宇宙以太背景的速度可以与地球相对太阳的速度相当。零条纹移动意味着光在各个方向上相对干涉仪的速率都是一样的,与地球的运动状态无关。这个实验结果在当时引起了很大的震动,物理学家想弄明白究竟发生了什么事情。洛伦兹提出,由于仪器在“弹性”的以太介质中穿梭,沿着运动方向的臂长会受到以太的挤压,因而长度是原来的 $\sqrt{1-v^2/c^2}$,这样就不会有干涉条纹的移动。这就是著名的洛伦兹长度收缩。

如果在(9-1)式中,臂长由于某种原因,只是原长的 $1-v^2/c^2$ (即沿着地球运动方向的臂长缩短了),仪器旋转 90°,还会有额外的光程差吗?[验证(9.3)式等于零。]

9-4 相对论

NOTE

我们在学习牛顿力学时,就知道牛顿运动定律只在惯性参考系里成立。虽然我们目前还不知道什么叫惯性参考系,至少我们知道在一类互相以匀速相对运动的参考系中,牛顿运动定律都成立。换句话说,力学规律的数学形式在这些参考系中都是一样的。这意味着在这些惯性系中做的所有力学实验,都与力学规律的数学形式一致。那么在这些惯性系中的观测者就无法仅通过力学实验确定自己在哪个惯性参考系里。这就是伽利略在《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》一书中所描述的一艘封闭的船舱内的场景:"在这里(只要船的运动是等速的),你在一切现象中观察不出丝毫的变化,你也不能够根据任何现象来判断船究竟是在运动,还是停止。当你在地板上跳跃时,你所通过的距离和你在一条静止的船上跳跃时所通过的距离完全相同,也就是说,你向船尾跳时并不比你向船头跳时,由于船的迅速运动而跳得更远些,虽然当你跳在空中时,在你下面的地板是在向着和你跳跃相反的方向奔驰着。当你抛一件东西给你的朋友时,如果你的朋友在船头而你在船尾时,你所费的力并不比你们俩站在相反的位置时所费的力更大。从挂在天花板下的装着水的酒杯里滴下的水滴,将垂直地落在地板上,没有任何一滴水偏向船尾方面滴落,虽然当水滴尚在空中时,船在向前走。"这就是伽利略的相对性原理:力学规律在任何惯性参考系里都是一样的。

9-5 伽利略变换

我们考虑船舱中一个小球的运动。船上的观测者通过建立直角坐标系记录球的运动轨迹,他还可以测量小球所受到的力,而把这个现象总结为牛顿第二运动定律:

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} \tag{9-5}$$

岸边的观测者，也可以建立自己的直角坐标系记录这个球的运动轨迹，还可以测量小球受到的力而总结出牛顿第二运动定律（前提是力学规律在任何参考系中都是一样的）：

NOTE

$$F' = m'\frac{\mathrm{d}^2 r'}{\mathrm{d}t'^2} \tag{9-6}$$

带撇的物理量对应岸边观测者的观测量。那么公式(9-5)式和(9-6)式中所对应的各种物理量之间有什么关系呢？根据经验，如果船上和岸边的观测者都具有相同的钟，并且互相校准了，我们认为他们的读数是一样的：

$$t = t' \tag{9-7}$$

如果船相对岸边以 u 作匀速运动，经验也告诉我们

$$\frac{dr'}{dt'} = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr}{dt} + u \tag{9-8}$$

公式(9-8)中我们已经假定两个坐标系的坐标轴是互相平行的。对公式(9-8)两边求时间导数立刻就有

$$\frac{d^2 r'}{dt'^2} = \frac{d^2 r'}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \tag{9-9}$$

这表明物体的加速度在任何惯性系中都是一样的。而对公式(9-8)两边求积分可以得到

$$r' = r + ut + C \tag{9-10}$$

C 是积分常量。如果我们选择 t=t'=0 时，两个坐标原点重合，得到 C=0。(9-7)式和(9-10)式就是伽利略变换。如果我们再假定

$$\mathbb{F} = \mathrm{F}', \quad m = m' \tag{9-11}$$

即我们认为物体的质量和其所受到的外力在任何惯性系中都是一样的，我们就可以利用伽利略变换从(9-5)式得到(9-6)式。换句话说，(9-7)式、(9-10)式和(9-11)式是符合相对性原理的“好”坐标变换，它保证公式(9-5)式和(9-6)式一致。

9-6 绝对时空

我们在谈论时间度量时，都提到了“钟”。无论这个“钟”是怎样的具体形式，本质上都是利用物体的周期性运动（比如地球自转一周是天，地球公转一周是年，钟摆一个来回是秒），所以时间的度量就是用一种运动去度量另外一种运动。这其实是很自

NOTE

然的，如果万物都不运动了，时间就停止了。然而这种度量也会带来另外一个问题：你怎么能够确定这个运动周期的长度和下一个运动周期的长度是一样的呢？牛顿认为应当把(9-7)式上升到哲学高度："绝对的真正的数学时间，就其本性而言，是永远均匀地流失着，与任何外界事物无关。"如此可以通过数学的时间证明摆的周期是固定的，其他的周期运动时长也是固定的，"钟"的运用有了理论基础。同样一把尺在这里量一下和在那里量一下一样长吗？牛顿认为空间是均匀的，不依赖物质而存在的："绝对空间就其本质而言是与任何外界事物无关的，它从不运动，且永远不变。"空间的绝对和均匀性确定了一把尺子在任何位置都是一样长的。有了绝对空间，运动就分成了两类：相对绝对空间的运动成为绝对运动，相对任意参照物的运动就是相对运动。那么我们是否能感知绝对运动呢？或者说我们能否感知绝对空间的存在呢？按照相对性原理，相对绝对空间做匀速运动的观测者无法确定自己是否相对绝对空间运动。牛顿也承认这个事实："相互运动的观测者，由于其感官的原因，而形成各自的相对空间。而其中只有相对绝对空间匀速运动的观测者才能得出与相对绝对空间静止的观测者一样的结论。"但是牛顿认为某种绝对运动是可以感知的。牛顿为此提出了一个水桶实验。如图 9-5 所示，牛顿据此断言：水面是否凹陷与水相对水桶的**相对**运动状态无关(换句话说，水桶不是一个合格的参考系；不是谁都可以做合格的参照物的。)，水面凹陷与否与水相对绝对空间的**绝对**运动状态有关。牛顿关于绝对空间的论断，其实就是给予惯性参考系一个严格的定义：相对绝对空间做匀速运动的参考系。牛顿关于绝对时空的观点后来遭到很多学者的批评，我们这里就不再介绍了，问题的最终解决还需要等到爱因斯坦的广义相对论。由于牛顿学术界的崇高威望，绝对空间依然是学术界的热门话题，特别是我们在第一小节中提到的关于光的电磁理论的出现，导致了寻找以太的热潮。如果以太真的存在，我们的确可以只通过地面的实验确定我们自己(相对以太)的运动状态(而不需要观测地球相对太阳或者其他星星的位置)，而以太静止的参考系自然就是绝对空间的候选者了[①]。

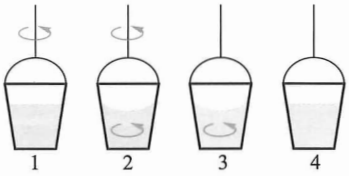


图 9-5 牛顿的水桶实验

图(a)刚开始，水桶转，水没有转，水桶和水有相对运动，水面平；

图(b)一段时间后，水桶转，水跟着转，水桶和水没有相对运动，水面凹陷；

图(c)水桶停，水还在转，水桶和水有相对运动，水面凹陷；

图(d)水桶停，水也停，水桶和水没有相对运动，水面平

① 当然这时绝对空间和相对于其匀速运动的其他惯性系是可以通过测量(光的性质)加以区分的，但是这不改变牛顿运动定律在惯性系中的普适性，因为光成为另类，不属于力学范畴。如果真是这样，物理学家还需要探究电磁学在不同惯性参考系的行为。

9-7 洛伦兹变换

NOTE

我们在第三小节提到，要使得牛顿运动定律在任何惯性系下的数学形式不变，惯性系之间的坐标变换需采用伽利略变换。我们认为伽利略变换是显而易见的，牛顿运动定律在惯性系中的成功应用是毋庸置疑的，两者的完美结合使得他们的正确性不容置疑。然而，我们在第二节里提到关于光的电磁理论：正确预言了光的速度并且是一个确定的数，这显然和伽利略变换相矛盾。解决的办法之一我们在第一小节里也介绍了：假定光和声波一样需要一种弹性介质——以太，电磁理论自然是写在以太静止的参考系里，并不是对任何惯性系普适的。如果找到以太，不仅解决了这个矛盾，而且还可能找到绝对空间。然而迈克耳孙莫雷的实验没有找到以太，这成为 20 世纪初“物理学晴朗的天空中的一小朵乌云”（开尔文语）。洛伦兹为了解释迈克耳孙莫雷的实验结果，提出物体在沿着运动方向受到以太挤压会收缩。他进一步发现，如果坐标变换改写成

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x-ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t-\frac{u}{c^2}x\right) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned} \tag{9-12}$$

电磁学的麦克斯韦方程的形式在不同惯性系中是不变的。(9-12)式中我们已经假定带撇的参考系相对不带撇参考系沿着 x 轴以 u 的速度运动。(9-12)式称为洛伦兹变换。它看起来和伽利略变换差别很大。其实由于光速很大，而参考系间的相对运动速度很小，$u/c \ll 1$，$\gamma \approx 1$。在当时的实验精度内，很难区别洛伦兹变换与伽利略变换的差别。然而洛伦兹变换还是会带来观念上的巨大改变。如果承认洛伦兹变换，电磁学的麦克斯韦方程变成符合相对性原理了，而牛顿运动定律反而不符合了。同时，光的速率在任何惯性参考系里都是一个固定的值（既然麦克斯韦方程符合相对性原理，其预言的光速值在惯性系也是普适的）。随后庞加莱很快就发现洛伦兹变换是四维时空的一个转动变换，这个我们会在后面的小节中介绍。讨论到这里，我们发现无论是牛顿运动定律，还是麦克斯韦方程，都有办法满足相对性原理，差别仅仅

NOTE

是采取哪种坐标变换。而且这两种坐标变换在通常的速度下差别极小，很容易造成两种理论与所有的实验都符合的假象。然而当我们把目光投向高速运动的物体时，明显的差别就显现出来了。一个著名的例子是蟹状星云，它除了来验证这里的坐标变换外，它本身就是天文学里的重大事件。二十世纪初天文学家发现蟹状星云以 1 500 km/s 的速度在膨胀，往前推算应该在 900 年前它是一个星星，然而翻阅西方在那个时段的天文学记录，没有发现这个事件。中国北宋的天文学家于 1054 年在蟹状星云的位置发现了一个明亮的“客星”，亮度与金星相当，白天可见，事件持续两年之久。这是人类第一次确认的超新星爆发事件。蟹状星云与我们距离 6 500 ly，如果光速增加 1 500 km/s，光可以早到 32.5 年。因此超新星爆发时，向地球喷射的物质所发出的光会比横向喷射的物质发出的光早到 32.5 年（如果伽利略变换是正确的话），这样宋朝的天文学家应该肉眼能持续看到客星 32 年之久。当然如果存在以太，光的速度和光源的速度无关，并不与伽利略变换相矛盾。所以问题很明白了，如果要坚持伽利略变换，必须要有以太。没有以太，天平将向洛伦兹变换倾斜[①]。

9-8 光速不变

现在问题聚焦在：电磁理论是否需要以太？洛伦兹等老一辈物理学家还没有准备完全抛弃以太，或许是对辉煌的经典力学还有些不舍（要知道麦克斯韦本人也是相信以太存在的），没有迈出这最后的一步（其实庞加莱已经指出以太是多余的）。年轻的爱因斯坦认为以太是多余的。按照电磁理论，电磁波是变化的电场和磁场互相交替激发而推向前的，与机械波的产生有很大的不同。机械波的本质是质点振动形式的传播，离开了（介质中的）质点，就无从谈论机械波了。所以没有介质，就没有机械波。电磁波的本质是随时间变化的电磁场，有了电磁场还需要别的吗？爱因斯坦回忆起自己十六岁时的一个追光设想：如果我能追上光，我将看到电场和磁场凝固不再随时间变化，也不再向前推动，这是可能的吗？爱因斯坦认为根据电磁理论，这

① 狭义相对论诞生之前，已经有其他迹象显示物理规律偏离伽利略变换。比如 1901 年，考夫曼就发现粒子的比荷随着粒子运动速度的变化而变化，预示着粒子的质量或者电荷在不同参考系是不一样的。

NOTE

是不可能的，所以人永远追不上光。这里当然是指人所能借助的所有工具都追不上光，所以光速是自然界速率的极限值。那么根据相对性原理，任何惯性系光速都是一样的，否则不同惯性系速度的极限值不一样，我们就可以通过测量光速而区别不同的惯性参考系了。当然要抛弃以太，光靠一个思想实验是不够的，经过前人大量的努力和爱因斯坦本人对电磁学的深入研究，最终爱因斯坦将光速不变作为物理原理提出来，与伽利略的相对性原理（作适当扩充）一起组成了狭义相对论的两大假说：

（1）在任何惯性系，所有物理规律的形式都是一样的。或者说我们无法用任何实验区分不同的惯性参考系。

（2）在任何惯性参考系，光的速度大小都是一样的[①]。

第二条原理说明光的速率与观测者的运动状态无关，这与伽利略变换相矛盾，这必然会导致新的坐标变换形式。这种新的坐标变换形式就是上小节介绍的洛伦兹变换。

我们下面就尝试利用光速不变推导出洛伦兹变换。如图 9-6 所示，考虑两个以相对速度 $\boldsymbol{u}$ 匀速运动的惯性参考系，它们的坐标轴互相平行，x 轴是相对运动方向。还是按照（9-10）式的约定，在 $t=t'=0$ 时，两个坐标原点重合。我们考虑一个事件，比如光一闪，在 S 参考系可以用四个数 (x,y,z,t) 表示这事件发生的位置和时刻。在 S′系用 (x',y',z',t')。坐标变换就是让这两组数关联起来。现在我们假定坐标变换是线性的（这是保证两个坐标系都是直角坐标系的最普遍的变换形式），即

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x+\beta t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \eta x+\lambda t \end{aligned} \tag{9-13}$$

其中 α、β、η、λ 是和相对速度相关的系数。我们认为垂直于运动方向的维度不受运动的影响，所以坐标是不改变的。现在我们让一束光在两个坐标原点重合之时（$t=t'=0$）从坐标原点出发，经过一段时间达到 P 点，在 S 系用事件 (x,y,z,t) 表示，在 S′系用 (x',y',z',t') 表示。两个系中的观测者都认为光速是 c，所以有

① 对于第二条光速不变的假定，也许有同学会说：麦克斯韦理论不是预言了光速是一个确定值了吗？问题是麦克斯韦理论要符合相对性原理，必须要借助洛伦兹变换，而洛伦兹变换本身就暗含了光速不变。特别需要提的是：坐标变换是运动学问题，它必须置于任何动力学之前（牛顿运动定律和电磁学都是动力学理论）。麦克斯韦方程预言光速是常量，只能是对假定 2 的一种验证。所以只有麦克斯韦理论是不够的，就如同只有牛顿运动定律，而没有伽利略变换，无法体现伽利略相对性原理一样。

NOTE

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$
$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \tag{9-14}$$

将(9-14)式的第二个方程中的带撇量用不带撇的量替换,就可得到

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$
$$(\alpha x+\beta t)^2+y^2+z^2=c^2(\eta x+\lambda t)^2 \tag{9-15}$$

(9-15)式中的两个等式都是关于(x,y,z,t)的方程。(9-15)第一个方程代表光可以向任何方向发射,只要满足这个方程即可。(9-15)第二个方程是通过坐标变换获得的关于(x,y,z,t)的方程。第二个方程必须与第一个方程完全一样,否则会对光的路线提供一个额外的约束。这个约束显然是不合理的,这代表在S系的观测者不能随意发射光波。

利用(9-15)中两个方程的全等性,比较这两个方程的系数可以得到

$$\alpha^2-c^2\eta^2=1$$
$$c^2\lambda^2-\beta^2=c^2 \tag{9-16}$$
$$\alpha\beta-c^2\eta\lambda=0$$

(9-16)中有四个未知数只有三个方程。第四个方程可以用如下方法获得:一个站在S′系原点的观测者,他自己的坐标永远是$x'=0$,然而对于S系来说,这个观测者是以u的速度沿x轴远离的,所以S系中他的坐标是$x=ut$。代入(9-13)式的第一个方程,得到

$$\alpha u+\beta=0 \tag{9-17}$$

联合方程(9-16)式和(9-17)式就可以得到洛伦兹变换(9-12)式。洛伦兹变换中的γ必须是个实数,所以$u\leqslant c$。这说明任何两个观测者的相对速度都不能大于光速。换句话说,光速是所有物体运动速度的上限。因此在满足相对性原理的条件下,光速不变等价于光速是极限速度。另外,如果$c\to\infty$,洛伦兹变换(9-12)式就还原为伽利略变换。所以伽利略变换其实就是速度上限是无穷大的坐标变换。因而在惯性参考系之间,只有两种可能的坐标变换:一种是速度没有上限,一种是速度有上限。①

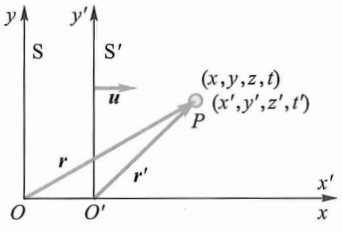


图 9-6

利用(9-16)式和(9-17)式得到洛伦兹变换公式。

① 有一种“无光相对论”,就是假设速度有上限而得到和洛伦兹变换相似的结果。而狭义相对论仅仅是将速度上限设置为光速。

例 1

列车以 200 km/h 的速度从杭州出发，一小时后达到上海。空中正好有一飞船以 $0.6c$ 的速度沿杭州—上海方向飞过。问飞船参考系认为列车花了多少时间从杭州达到上海？

解 整个过程可以归纳为两个事件：列车在 t_1 时刻从杭州（坐标为 x_1）出发，t_2 达到上海（x_2）。在飞船系看来，这两个事件的时刻分别为[(9-13)式的第四式]

$$t_1'=\gamma\left(t_1-\frac{u}{c^2}x_1\right)$$

$$t_2'=\gamma\left(t_2-\frac{u}{c^2}x_2\right)$$

其中 $u=0.6c$。两式相减得到

$$\Delta t'=t_2'-t_1'=\gamma\left[(t_2-t_1)-\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)\right]$$

$$=\gamma\left(\Delta t-\frac{u}{c^2}\Delta x\right)=\gamma\left(1-\frac{u}{c^2}v\right)\Delta t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}}\left(1-\frac{0.6\times200/3\ 600}{3\times10^5}\right)\times1\ \text{h}$$

$$\approx1.25\ \text{h}$$

其中 v 是列车在地面的速率。

9-9 同时性

一旦物体的运动速度有上限，坐标变换中时间的定义就有点讲究了。通常我们假定有个观测者，时间就是这个观测者手里钟的读数。然而观测者只能位于坐标中的一点，这在伽利略变换下是没有问题的。因为信号的传递速度是无穷大，观测者可以被假定能及时记录下空间中任何点发生的事件，这样时间是由唯一的一台钟确定的。在狭义相对论，由于信号传递速度不能大于光速，仅有一个观测者是不能及时记录下任何空间点上发生的事件的。所以在狭义相对论中，我们需要无穷多的观测者分别站在每个空间点上，用他们手中的钟及时记录下发生在身边的事件。为了确保一个观测者记录的时间对另外一个观测者也有效，他们的时钟需要校准。校准的方法是在两个相对静止的观测者中间，有一人发射光波信号，两位观测者接到光信号后根据约定将时钟校准（比如都调到 12 点）。这样在某个惯性系，每个空间点都站着一个静止观测者，手里都有校准好的时钟。这个惯性参考系就有统一的时间了，见图 9-7。如果在两地发生两个事件（比如在两地各有一个灯泡一闪），两地的观测者记录下的时刻是相等的，我们说这两个事件在这个参考系是同时的。然而这种校准时

NOTE

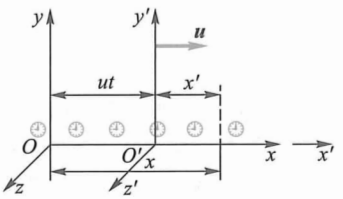


图 9-7 每个空间点都放一台钟，这些钟互相静止，互相校准，钟的读数是相对这些钟静止的参考系的时间

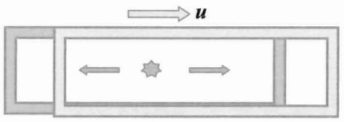


图 9-8 由于光速不变，在车厢上看光同时达到车厢两端，在地面看光先达到车厢尾部

NOTE

钟的方式在另一个参考系看来是不合适的。如图 9-8 所示，放置在车厢中部的灯光一闪，在车厢上看来，光会同时达到车厢两端，完美校准车厢两端的时钟。但是对于站在地面上的观测者看来，由于车厢在移动，沿着车厢移动方向的光到达车厢壁需要的时间是

$$t_1' = \frac{L'}{2(c-u)} \tag{9-18}$$

其中 L' 是地面测量的车厢长度（与后面在车厢上测量的车厢长度 L 加以区别）。u 是车厢相对地面的速度。逆着车厢移动方向的光达到车厢壁需要的时间是

$$t_2' = \frac{L'}{2(c+u)} \tag{9-19}$$

两者的时间差是

$$\Delta t = t_1' - t_2' = \frac{1}{1-\dfrac{u^2}{c^2}} \frac{uL'}{c^2} = \gamma^2 \frac{uL'}{c^2} \tag{9-20}$$

(9-19)式和(9-20)式是利用光速不变得到的。（读者可以自己验证一下，如果采用伽利略变换，地面的观测者会认为向车厢运动方向和逆车厢运动方向光的速度是不一样的，所以光还是同时到达车厢两端的。这与绝对时空是一致的。）当然，地面上也是如法炮制在各个位置放置时钟，并用同样的方式校准了时钟。所以车上校准时钟的方式，在地面上看不合适。同样地面上校准时钟的方式也不会得到车上观测者的认同，见图 9-9。这个事实已经正确地反映在洛伦兹变换上了。我们将车厢作为 S 系，光到达车厢两端由事件 (x_1, t) 和 (x_2, t) 表示，其中 $x_1 - x_2 = L$，L 是 S 系中测量的车厢长度。我们略去了无关的 y、z 坐标。S′系是地面，其相对 S 系的速度是 $-u$。光达到两端的事件由 (x_1', t_1') 和 (x_2', t_2') 表示。由洛伦兹变换(9-12)式的第四个方程得到

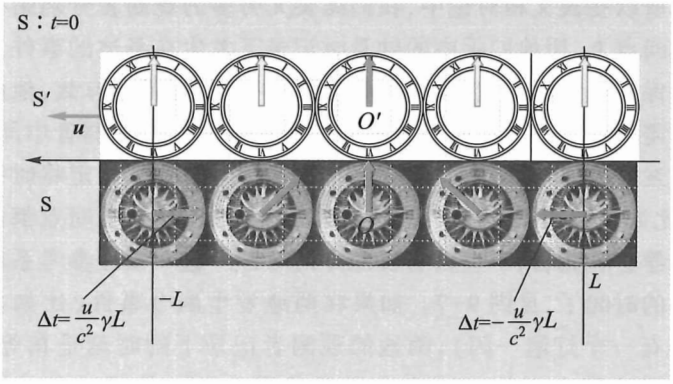


图 9-9 在上面的参考系（S′）看来，S 系各点的钟没有校准。反过来，在 S 系看来，S′系的钟都被错误校准了

NOTE

$$t_1'=\gamma\left(t+\frac{u}{c^2}x_1\right)$$

$$t_2'=\gamma\left(t+\frac{u}{c^2}x_2\right) \tag{9-21}$$

$$\Rightarrow \Delta t'=t_1'-t_2'=\gamma\frac{u}{c^2}(x_1-x_2)=\gamma\frac{uL}{c^2}$$

与公式(9-20)式比较,得到

$$L'=\gamma^{-1}L \tag{9-22}$$

这正是洛伦兹收缩。在地面上看,车厢(由于运动)在运动方向上长度收缩(比车厢上看要短)。长度收缩我们在下面小节还会提到。总结一下,由于信号传递速度的上限是光速,在一个惯性系中认为同时发生的两个事件,在另一个参考系看来不是同时发生的。换句话说,在一个参考系认为一批放置在不同空间点的钟是校准的,在另外一个参考系认为没有校准。所以在狭义相对论中同时性是相对的。

如果两个事件在车厢上是同时同地发生的,在地面看这两事件是否同时?

两个粒子通过万有引力(或者电磁力)这种非接触力相互作用时,同时性的作用力和反作用力还会存在吗?

例 2

甲乙两人分别站在相距 100 m 的跑道两端,同时以 10 m/s 的速度相向跑动,到达对方所在的终点。问甲乙两人分别认为谁取得了这场比赛的胜利?

解 假设甲向 x 轴正方向跑,乙向 x 负方向跑,在地面参考系,他们同时达到终点,记为两个事件(t,x_1)和(t,x_2),$x_1-x_2=100$ m,这两个事件在甲看来不是同时的:

甲到达的时间 $t_1'=\gamma\left(t-\frac{u}{c^2}x_1\right)$

乙达到的时间 $t_2'=\gamma\left(t-\frac{u}{c^2}x_2\right)$

$$\Delta t'=t_1'-t_2'=-\gamma\frac{u}{c^2}(x_1-x_2)\approx-\frac{10\times100}{9\times10^{16}}\ \text{s}$$

$$\approx-1.1\times10^{-14}\ \text{s}$$

其中 $u=10$ m/s,$\gamma\approx1$。甲认为他先达到,虽然领先的时间非常小。同样,对乙来说,有

甲到达的时间 $t_1''=\gamma\left(t+\frac{u}{c^2}x_1\right)$

乙达到的时间 $t_2''=\gamma\left(t+\frac{u}{c^2}x_2\right)$

$$\Delta t''=t_1''-t_2''=\gamma\frac{u}{c^2}(x_1-x_2)\approx\frac{10\times100}{9\times10^{16}}\ \text{s}$$

$$\approx1.1\times10^{-14}\ \text{s}$$

注意乙相对地面的速度是$-u$。所以乙认为他先达到。

9-10 时间延缓

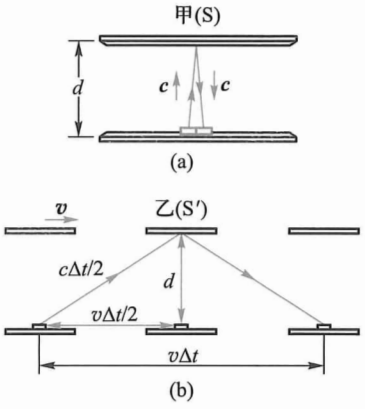


图 9-10 光钟(a)一个静止的光钟;(b)运动的光钟

NOTE

从光速不变出发已经出乎意料地得到同时的相对性,我们会进一步发现相对运动的两个钟走得不一样快。如图 9-10 所示,是一个爱因斯坦光钟。光在两个反射面来回走一圈所需的时间是

$$\Delta t=\frac{2d}{c} \tag{9-23}$$

d 是两个反射面之间的距离。我们可以将(9-23)式作为一个时间单位,就像单摆一个来回。现在我们把一模一样的两个爱因斯坦光钟分别放置在两个参考系上,比如一个在车上,一个在地面。在地面上观察车上的光钟,由于钟的两个反射面在移动,光走的路线如图 9-10(b)所示。由于光速不变,地面上的观测者认为车上的光钟一个来回需要的时间是

$$\Delta t'=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\frac{2d}{c}=\gamma\frac{2d}{c}=\gamma\Delta t \tag{9-24}$$

显然地面上的观测者认为车上那个光钟一个单位时间(一个来回用时)比自己的一个单位时间长,或者说车上的钟慢了。这个事实也反映在洛伦兹变换中了。车是 S 系。考虑光从 S 系光钟的下反射面出发,这个事件标记为(x,t_1),光走了一个来回后回到下反射面,这个事件标记为(x,t_2),显然 $t_2-t_1=2d/c$。这两个事件在地面 S′系标记为(x'_1,t'_1)和(x'_2,t'_2)。利用洛伦兹变换(9-12)式的第四个方程,得到

$$\begin{aligned}t'_1&=\gamma\left(t_1+\frac{u}{c^2}x\right)\\ t'_2&=\gamma\left(t_2+\frac{u}{c^2}x\right)\\ \Rightarrow\Delta t'&=t'_2-t'_1=\gamma(t_2-t_1)=\gamma\Delta t\end{aligned} \tag{9-25}$$

这个结果和(9-24)式完全一样,所以运动的钟会变慢:地面看车上的钟变慢了,同样从车上看地面的钟也变慢了①。另外我们注意到,在 S 系中,光的出发和回来这两个事件是发生在同一空间

① 这里其实谈论的是两组不同的事件。一组事件是车上爱因斯坦钟的光从底部出发,然后回到底部。另一组事件是地面钟的光从底部出发回到底部。对于前者,两个事件在车上看是发生在同一位置,所以车上记录的是原时,比地面记录的短。对于后者,两个事件在地面看是发生在同一位置,地面记录的是原时,比车上记录的短。这仅仅表明对两事件的时间间隔,不同参考系的观测者会有不同的看法。

位置，而在 S′系看来，是发生在不同的空间点（由于钟在运动）。我们可以用(9-25)式的第三个方程总结为：两个不同的事件，它们的时间间隔在不同的参考系中观测是不同的。如果存在一个参考系两个事件发生在同一位置，那么这个参考系的观测者测量的时间间隔是最短的，比任何其他参考系观察的要短。我们把这个时间间隔称为这两个事件的原时，也称为固有时。

NOTE

请利用原时的概念，解释运动的机械钟也一样变慢。[提示：钟的两次计时（比如指针指向 12 点，和指针指向 1 点）可以看做两个事件。这两个事件用另一台相对它运动的钟来计时，时长多少？]

例 3

地面上两个观测站相距 180 km。一飞船以 $0.6c$ 的速度通过这两个观测站。飞船上的宇航员认为通过两个观测站需要多长时间？

解 地面观测者认为飞船通过的时间是：

$$\Delta t=\frac{180\ \text{km}}{0.6\times3\times10^{5}\ \text{km/s}}=10^{-3}\ \text{s}$$

对于飞船的宇航员来说，自己始终是静止的，是两个观测站分别通过自己，自己的钟记录的是固有时，因此

$$\Delta t'=\sqrt{1-0.6^{2}}\,\Delta t=8\times10^{-4}\ \text{s}$$

例 4

地球上的观测者发现一艘 3 ly 外星飞船以 $0.5c$ 的速度向地球飞来[①]，于是向这艘飞船发射一束光信号。问地球上的观察认为飞船上的外星人多久会接收到光信号？飞船上的外星人认为光传播了多久才到达？接收到光信号时认为地球的距离是多少？

解 对于地球来说，光相对飞船的速度是 $1.5c$，所以经过时间 $t=3/1.5\ \text{y}=2\ \text{y}$，飞船会接收到光信号。这时，飞船距离地球为 $3-1\ \text{ly}=2\ \text{ly}$。

要讨论外星人多久接收到光信号，我们可以把这个问题可以归为两个事件。事件 1：地球发光。在地球看来，这个事件表述为在 t 年时，地球在 x_1 发射光信号；事件 2：飞船接收信号。在地球参考系，这个事件表述为在 $t+2$ 年时在位置 x_2 接收到光信号（$x_2-x_1=2\ \text{ly}$）。外星人对这两个事件的描述可以由(9-13)式的第四式得到

光源发光时刻 $t_1'=\gamma\left(t+\frac{u}{c^{2}}x_1\right)$

① 光从飞船传到地球需要三年，我们看到飞船其实已经是三年前的事情了。我们这里不讨论这些情况，只假定地球发射光信号时，飞船离地球三光年。

星球收到时刻 $t_2'=\gamma\left(t+2+\frac{u}{c^2}x_2\right)$

$$\Rightarrow \Delta t'=t_2'-t_1'$$

$$=\gamma\left[2+\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}[2+1]\ \text{y}=2\sqrt{3}\ \text{y}$$

其中我们设定飞船朝 x 轴负方向(向左)飞行,$u=0.5c$。所以外星人认为光飞行了 $2\sqrt{3}$ y。这说明在外星人看来,地球发射光信号时距离飞船 $2\sqrt{3}$ ly。经过 $2\sqrt{3}$ y,地球已经飞近 $\sqrt{3}$ ly(在外星人看来,地球的速度也是 $0.5c$),所以在外星人看来,接收信号时地球距离飞船 $\sqrt{3}$ ly。总结一下,我们关注两个事件:地球发光和外星人收到光信号。在地球看来两个事件的时间差和空间位置差是 $(\Delta t,\Delta x)=(2\ \text{y},2\ \text{ly})$,在外星人看来是 $(\Delta t',\Delta x')=(2\sqrt{3}\ \text{y},2\sqrt{3}\ \text{ly})$。所以对同样两个客观事件,无论时间还是空间,不同参考系的观测者给出不一样的描述。

方法二:我们也可以用(9-12)式的第一式得到相同的结果:

飞船收到光时的坐标 $x_2'=\gamma[x_2+u(t+2)]$

地球发光时的坐标 $x_1'=\gamma(x_1+ut)$

$$\Delta x'=x_2'-x_1'=\gamma(x_2-x_1+2u)=\frac{2+1}{\sqrt{1-0.5^2}}\text{ly}$$

$$=2\sqrt{3}\ \text{ly}$$

和前面完全一样。

[评注]地球发射信号和外星人接收信号这两个事件,无论在地球上看来,还是在飞船上看来,都不是发生在同一位置,因此两个事件的时间间隔对两者来说都不是固有时。比较任意两个观测者对两个事件的看法,可以直接使用洛伦兹变换。在整个计算过程中都有一个未定的时间 t,它等于多少并不重要,因为我们讨论的是两个事件空间和时间的差距。

9-11 长度收缩

NOTE

上面的例题显示,对于两个客观的事件,无论是空间还是时间,不同参考系的观测者给出不同的描述。时间的不同性最明显的例子是运动的钟变慢。空间的不同性会表现在运动的物体沿运动方向的长度收缩。我们现在要选取两个客观事件,能够用来测量运动车厢的长度。如图 9-11(a)所示,我们在车厢两端放置两盏灯。如果这两盏灯在地面看来是同时亮的,那么在地面记录下此时刻两盏灯的坐标,坐标之差就代表车厢的长度。显然地面上认为同时亮的两盏灯,在车厢上的观测者不认为是同时亮的。由于两盏灯相对车厢是静止的,所以即使两盏灯不是同时亮,两盏灯的空间坐标依然可以代表车厢两端的空间坐标,它们之差依然可以被车厢上观测者认定为是车厢的长度。两盏灯的闪亮在

地面可以用(t', x'_1),(t', x'_2)表示,在车厢上对应于(t_1, x_1),(t_2, x_2)。利用(9-13)式的第一个方程,有

$$x_1=\gamma(x'_1-ut')$$
$$x_2=\gamma(x'_2-ut') \tag{9-26}$$

这时S(车厢)相对S′(地面)的速度是u。(9-26)式的两式相减得到

$$x_2-x_1=\gamma(x'_2-x'_1) \tag{9-27}$$

由于$x_2-x_1=d$,$x'_2-x'_1=d'$,显然在地面车辆车厢的长度要短于车厢上的测量。我们把在物体静止参考系测量的物体长度叫作固有长度。显然车厢由于运动在运动方向上长度短于固有长度,这就是洛伦兹收缩。

我们也可以只用光速不变得到(9-27)式。我们考虑车厢上一个观测者站在车厢尾端。向车厢前段发射一束光。光在车厢前端反射回来。车上的观测者可以记下光来回所需的时间Δt,通过$2d=c\Delta t$得到车厢的长度。由于光一个来回回到出发点,所以对于车厢的观测者而言,光出发和到达是发生在同一地点,时间间隔是原时。对于地面上的观测者而言,显然由于(9-25)式,他认为两个事件的时间间隔变长了

$$\Delta t'=\gamma\Delta t=\gamma\frac{2d}{c} \tag{9-28}$$

地面观测者还可以追寻光的轨迹,如图9-11(b)所示:光首先需要达到另一个反射面,这段时间是

$$t'_1=\frac{d'}{c-u} \tag{9-29}$$

这里的d'是地面认为车的长度。然后光从反射镜返回到出发点耗时

$$t'_2=\frac{d'}{c+u} \tag{9-30}$$

总共耗时

$$\Delta t'=t'_1+t'_2=\frac{1}{1-u^2/c^2}\frac{2d'}{c}=\gamma^2\frac{2d'}{c} \tag{9-31}$$

和公式(9-28)式比较,不难发现

$$d'=\gamma^{-1}d=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}d \tag{9-32}$$

和(9-22)式、(9-27)式完全一样。

时间延缓和长度收缩早已被大量的微观粒子物理实验所证实。“基本粒子”中的μ子首先是在大气中发现的,它是由高能宇宙射线与大气分子碰撞,在距地面大约10^4 m的高空产生的。

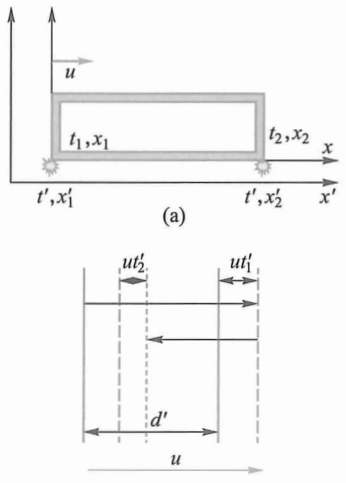


图9-11 图(a)是地面测量车厢长度的要求,图(b)是地面观察车厢尾端光源发射及在车厢前端反射回到车厢尾端的过程,两条实垂线表示光发射时车厢的位置。粗点垂线是光到达车厢前端时车厢的位置。细垂线是光到达车厢尾端时车厢尾端的位置

NOTE

NOTE

它的性质与电子很相似，但是质量是电子的二百多倍，很容易衰变成电子和中微子，所以寿命很短，只有 2.2×10^{-6} s。如果 μ 子以近光速运动，在其寿命中只能移动 660 m。然而在当时的实验条件下，科学家只能在地面（高原上）探测它们，所以 μ 子是如何达到地面的？有了相对论效应，问题就一目了然了。只要 μ 子的速度达到 $0.998c$，在地面的观测者认为 μ 子的寿命应该是

$$\Delta t=\frac{2.2\times10^{-6}\ \text{s}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=3.48\times10^{-5}\ \text{s}$$

这可以让 μ 子移动超过 1 万米的距离（对于 μ 子自己来说，产生和衰变发生在同一位置，所以自己测量的寿命是固有时。对于地面来说，产生和衰变不在同一位置，测量的寿命相对固有时要长）。实际产生的 μ 子能量会有变动。有的速度更大，可以移动更远的距离。那么从 μ 子的视角如何理解这个过程呢？对于 μ 子来说，其寿命还是 2.2×10^{-6} s。但是由于其快速运动，地面观测者认为的一万米距离，在 μ 子（速度为 $0.998c$）看来只有

$$l=\sqrt{1-v^2/c^2}\,l_0=632\ \text{m}$$

所以在 2.2×10^{-6} s 里依然可以达到地面。从 μ 子的视角观察，大地以 $0.998c$ 的速度向自己移动。在自己的寿命里，大地如果能运动到眼前，大地的距离是

$$l=2.2\times10^{-6}\text{s}\times0.998c=659\ \text{m}$$

和长度收缩完全一致。

关于长度收缩有这样一个佯谬：一列火车静止的时候比一个山洞稍长。当其飞快运动起来，在地面观测者看来其长度比山洞短。然而在火车上的观测者看来，是山洞在运动，所以是山洞比火车短。这时，山洞两边有一伙强盗，他们在山洞两边准备了坚固无比的闸门，等火车完全进入山洞后，把闸门放下，因而把火车关在山洞里。但是在火车上的观测者看来，火车比山洞长，无法被关入山洞。这究竟是怎么回事？

9-12 四维时空

通过上面的实例，我们发现对于同样两个事件（μ 子的产

生和撞到地面),μ 子和地面观测者的关于时间间隔和空间距离的看法都不相同,但是它们又是互相关联在一起的。对于任意两个事件,在 S 系中,空间间隔是 Δx(我们不考虑 y、z 方向的间隔,因为在 S 和 S′系是没有差别的。),时间间隔是 Δt; 在 S′系,空间间隔是 $\Delta x'$,时间间隔是 $\Delta t'$。利用洛伦兹变换,不难验证

$$c^2\Delta t^2-\Delta x^2=c^2\Delta t'^2-\Delta x'^2 \tag{9-33}$$

我们假定(9-33)式的值是正的,请考虑,在哪个参照系中,两个事件的时间间隔最短?

如果假定(9-33)式的值是负的,在哪个参照系中两个事件的空间距离最短?

这种联系首先被庞加莱注意到,从而将时间和空间连在一起,构成时空几何。为了把问题阐述明白,我们现在考虑二维的欧式几何。如图 9-12(a)所示,空间上两点 A、B 可以通过建立直角坐标系标注它们的位置。坐标的建立是随意的:S 坐标系、A,B 分别标注为(x_1,y_1),(x_2,y_2);在 S′坐标系中,A、B 标注为(x_1',y_1'),(x_2',y_2')。虽然

$$\begin{aligned}\Delta x=x_2-x_1\neq x_2'-x_1'=\Delta x'\\ \Delta y=y_2-y_1\neq y_2'-y_1'=\Delta y'\end{aligned} \tag{9-34}$$

但是,A、B 之间的距离在任何坐标系下都是一样的,即

$$\Delta x^2+\Delta y^2=\Delta x'^2+\Delta y'^2 \tag{9-35}$$

(9-33)式和(9-35)式很相似,区别就是(9-33)式中间是减号,所以(9-33)式不是欧式空间。但是(9-33)式的不变性预示着它其实是另外一种几何空间的“距离”,这种空间称为赝欧式空间(物理学上称为闵可夫斯基空间)。洛伦兹变换就是这种空间不同的坐标系之间的变换关系,类似于图 9-12(a)中的坐标旋转。当然由于是闵可夫斯基空间,其坐标旋转其实是图 9-12(b)中所显示的那样。这可以通过如下方式理解:在 S′系的时间轴 t'就是直线 $x'=0$,它在 S 系中表现为

$$x'=\gamma(x-ut)=0\Rightarrow ct=\frac{c}{u}x \tag{9-36}$$

是一条斜率大于 1 的直线。同样 S′系的 x'轴就是直线 $t'=0$,在 S 系表现为

$$t'=\gamma\left(t-\frac{u}{c^2}x\right)=0\Rightarrow ct=\frac{u}{c}x \tag{9-37}$$

所以 x'轴在 S 系中是一条斜率小于 1 的直线。x'和 x 轴的夹角与 ct 和 ct'之间的夹角一样。

一位相对 S 系以速度 u 运动的观测者($t=0$ 时处于坐标原

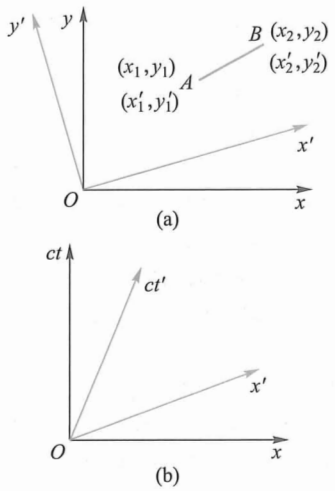


图 9-12 (a)欧式空间;(b)闵氏空间

点),其时空轨迹方程是

$$x=ut\Rightarrow ct=\frac{c}{u}x \tag{9-38}$$

和(9-36)式比较可知,一个观测者的时空轨迹就是自己所在的静止系的时间轴。显然S系的时间轴就是静止于$x=0$处的观测者的时空轨迹。

我们现在利用时空轨迹讨论一下所谓的孪生子佯谬。孪生子佯谬说的是一对出生的孪生子,一位在地面,另一位坐宇宙飞船去旅行。这样两位孪生子由于相对运动都认为对方的时钟走得慢,所以时间花得少而比自己年轻。当飞船旅行结束回到地球,那么究竟谁比谁更年轻呢?在回答这个问题前,我们需要明确,飞船并不是一直处于惯性系:它需要出发,返回,降落。所以问题本身已经超出狭义相对论的范畴。但是我们依然可以利用时空轨迹来讨论这个问题。如图9-13所示,是建立在地面S系的时空图,地面的孪生子的时空轨迹就是时间轴,而飞船的时空轨迹是出发和返回两条线段。我们首先要说明,由于(9-33)式,时空轨迹的长度在任何坐标系下是一样的,而这个长度对于这个轨迹的主人来说就是他经历的时间长度(轨迹就是他自己的时间轴)。因此我们可以直接通过比较地面孪生子的时空轨迹长度和飞船的时空轨迹长度来判断两者经历的时间跨度的长短。在欧氏空间,毫无疑问两点间最短的那条线是线段。但是在闵可夫斯基空间,由于距离的定义(9-33)式中出现负号,两点间是那条"直"的线段是最长的,所以地面的孪生子在相遇时年纪会更大点。

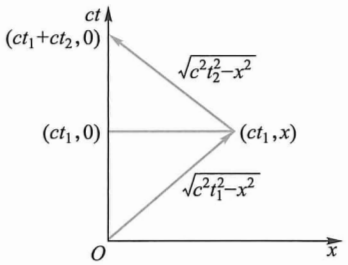


图9-13 由于(9-33)式,斜线的长度不是由勾股定律(欧式空间)所确定的(两直角边平方和开根号),而是两"直角"边平方差开根号。之所以给直角打上引号,是因为那个角实际的形状不再是图像上显示的那样由两条垂直线构成的。如图9-12(b)所示,S′的时间轴和x'轴就不是"垂直"的

*9-13 时空因果区域

NOTE

(9-33)式定义了闵可夫斯基空间中两个时空点(就是我们说的事件)之间的距离平方,然而细心的读者会发现它并不恒为正数。那么负数到底有什么物理意义呢?在洛伦兹变换中

$$\Delta t'=\gamma\left(\Delta t-\frac{u}{c^2}\Delta x\right) \tag{9-39}$$

在S系中,如果$\Delta t=t_2-t_1>0$,说明事件2发生在事件1的后面。在S′系中,如果要保证同样的时间顺序,即$\Delta t'=t_2'-t_1'>0$,则必须要求

NOTE

$$\Delta t-\frac{u}{c^2}\Delta x>0 \tag{9-40}$$

如果我们要求任何参考系下(事件发生的)时间顺序都是一致的,则充分条件可以是

$$\Delta t-\frac{1}{c}|\Delta x|>0 \tag{9-41}$$

这对应于闵可夫斯基空间(闵氏空间)的距离平方[(9-33)式]

$$D^2=c^2\Delta t^2-\Delta x^2>0 \tag{9-42}$$

我们说这两个时空点(事件)是类时的,它们有因果关系(因为它们的时序在任何参考系中都是一样的)。对于这样的两个事件,一定存在一个参考系,这两个事件是发生在同一位置,这时距离就等于原时乘以 c。任意一个观测者的时空轨迹上任意两点的距离都是类时的。与条件(9-41)式相反,如果

$$\Delta t-\frac{1}{c}|\Delta x|<0 \tag{9-43}$$

则在有些参考系会出现 $\Delta t'=t_2'-t_1'<0$ 的情况。与此相对应,时空距离的平方满足

$$D^2=c^2\Delta t^2-\Delta x^2<0 \tag{9-44}$$

我们说这两个时空点(事件)是类空的,它们没有因果关系。因为一个事件发生后,要影响另外一个事件,必须以最快的速度把信号传递过去,这个信号传递可以是任意物理允许的方式,然而我们知道这个速度极限是光速。(9-44)式表明无论如何另外一个事件都发生在信号达到之前,所以它们是因果无关的,具体表现在它们的时序是不确定的。对于这样两个事件,一定存在一个参考系,它们是同时发生的。两件不在同一位置却同时发生的事件显然不具有因果关系。介于(9-42)式和(9-44)式的是

$$D^2=c^2\Delta t^2-\Delta x^2=0 \tag{9-45}$$

我们称这两个时空点(事件)是类光的。两个类光事件,要么在任何参考系中,都是同时同地发生,要么在任何参考系中都不是同时(时序不变),也不是同地发生的。所以两个类光事件也是有因果关系的。这样对于任意一个时空点(事件),我们可以划分出与这个时空点有因果关系的区域。如图 9-14 所示,有因果关系的区域被条件(9-45)式包裹。(9-45)式是通过事件 P 的两条斜率为±1 的直线。如果算上 y 的维度(当然还可以包括 z 的维度),条件(9-45)式就变成以 P 为顶点的两个锥面,称为光锥,因为它是以 P 点作为出发点(终点)的所有光线的轨迹集合。在光锥以外的区域就是与 P 点没有因果关系的区域。任意到达

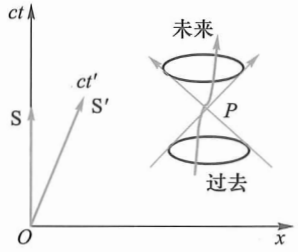


图 9-14

P 点的粒子，都是从图 9-14 中光锥所包括的过去而来，任意从 P 点出发的粒子只能达到图中光锥所包括的未来区域。

请验证粒子的时空轨迹上的任意两点都是类时的。

9-14 速度变换



图 9-15

我们现在考虑一个问题：在 S 系中一艘飞船的速度是 v，在 S′ 系中其速度是多少？如在图 9-15 中，甲乙两艘飞船相向而飞行，问在甲看来乙飞船的速度是多少？如果速度是按照伽利略变换来叠加，乙相对甲的速度就超光速了。光速不变原理其实已经告诉我们这种情况是不会发生的。

我们考虑在 S 系观察一个质点：它 t_1 时刻在 (x_1,y_1,z_1)，t_2 时刻在 (x_2,y_2,z_2)，因此这个质点的速度是

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_y &= \frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta y}{\Delta t} \\ v_z &= \frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta z}{\Delta t} \end{aligned} \tag{9-46}$$

S′ 系中的观测者（相对 S 系沿 x 轴以 $\boldsymbol{u}$ 运动）认为上述两个事件应该是：t_1' 在 (x_1',y_1',z_1')，t_2' 在 (x_2',y_2',z_2')，因此这个质点的速度是

$$\begin{aligned} v_x' &= \frac{x_2'-x_1'}{t_2'-t_1'}=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}=\frac{\gamma(\Delta x-u\Delta t)}{\gamma(\Delta t-u\Delta x/c^2)} \\ &= \frac{\Delta x/\Delta t-u}{1-u\Delta x/(\Delta t c^2)}=\frac{v_x-u}{1-uv_x/c^2} \\ v_y' &= \frac{y_2'-y_1'}{t_2'-t_1'}=\frac{\Delta y'}{\Delta t'}=\frac{\Delta y}{\gamma(\Delta t-u\Delta x/c^2)} \\ &= \frac{\Delta y/\Delta t}{\gamma[1-u\Delta x/(\Delta t c^2)]}=\frac{v_y}{\gamma(1-uv_x/c^2)} \\ v_z' &= \frac{v_z}{\gamma(1-uv_x/c^2)} \end{aligned} \tag{9-47}$$

(9-47)式中 $\gamma=1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c}}$。虽然物体在 y、z 轴方向的位移是不

变的，但是两个坐标的时钟快慢是不同的，所以这两个方向的速度在两个参考系下也是不同的。这正好保证了光速不变，因为 x 方向的速度发生改变，y、z 方向的速度不变，不可能保证光速的大小在任何参考系中都是一样的。

NOTE

我们将(9-47)式用到本节开头的问题，有

$$u=v_{甲}=\frac{2}{3}c,\quad v_x=v_{乙}=-\frac{2}{3}c$$
$$v'_{乙}=\frac{-2c/3-2c/3}{1+4/9}=-\frac{12}{13}c \tag{9-48}$$

因此乙相对甲的速率小于光的速率。容易验证，对于任意不大于光速的 u 和 v，v'一定不大于光速。

请利用(9.47)式验证光速在任何参考系下大小都是一样的。

9-15 相对论力学

1. 相对论质量

牛顿力学的数学形式在伽利略变换下是不变的，但是在洛伦兹变换下会发生改变，因此不满足狭义相对性原理。举一个简单的例子：按照牛顿运动定律，我们用恒力推动一个物体，只要时间足够长，总能够把物体加速到超光速。因此在狭义相对论框架下，牛顿运动定律的形式需要改变。

洛伦兹首先发现：一个运动的带电粒子，在电磁力作用下，其质量会发生变化，沿着运动方向与垂直于运动方向的质量不一样(即所谓的纵质量和横质量)①。我们不追寻洛伦兹的思考路线，因为那依赖于电磁场的洛伦兹变换的形式。我们从动量守恒的角度引入相对论质量。② 我们依然认为动量和质量的关系是

$$\boldsymbol{p}=m(v)\boldsymbol{v} \tag{9-49}$$

由(9-49)式可知质量可能与粒子的速率相关。我们下面将导出(9-49)式中质量与速率的关系式，对这部分内容不感兴趣的同学可以直接跳到公式(9-53)式。

① 洛伦兹定义的质量是力与加速度之比。

② 当时洛伦兹本人也不认为动量守恒是必须遵守的，因此动量守恒对于我们来说也是一个大胆的假定。

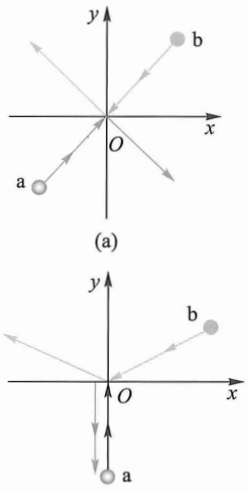


图 9-16 (a)适当选择参考系,使得 a、b 球碰撞前后 x 轴方向的速度不变。(b)进一步选取一个参考系,a 球在 x 轴方向的速度为零。虽然本图不再采用质心系,y 轴方向总动量依然为零

NOTE

现在考虑两个质量一样的小球的完全弹性碰撞。在质心系中,它们的速度大小相等,方向相反:a(v_x, v_y, v_z),b$(-v_x, -v_y, -v_z)$。适当选择坐标的方向,碰撞如图 9-16(a)所示。现在我们可以选择一个相对图 9-16(a)向右以 v_x 速度运动的参考系,使得小球 a 的 x 轴方向的速度为零,如图 9-16(b)所示。这时入射小球 a 的 y 轴方向的速度是

$$v_y' = \frac{v_y}{\gamma\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)} = \gamma v_y$$

$$1-\frac{v'^2}{c^2} = 1-\frac{v_y'^2}{c^2} = \frac{1-\frac{v_x^2+v_y^2}{c^2}}{1-\frac{v_x^2}{c^2}} \tag{9-50}$$

(9-50)式中 $\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c}}$。而小球 b 的速度是

$$u_y' = \frac{-v_y}{\gamma\left(1+\frac{v_x^2}{c^2}\right)}$$

$$u_x' = \frac{-2v_x}{\left(1+\frac{v_x^2}{c^2}\right)} \tag{9-51}$$

$$1-\frac{u'^2}{c^2} = 1-\frac{u_x'^2+u_y'^2}{c^2} = \frac{\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v_x^2+v_y^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v_x^2}{c^2}\right)^2}$$

由于 y 轴方向系统总动量等于零,所以

$$\frac{m(u')v_y}{\gamma\left(1+\frac{v_x^2}{c^2}\right)} = m(v')\gamma v_y$$

$$\Rightarrow \frac{m(u')}{m(v')} = \gamma^2\left(1+\frac{v_x^2}{c^2}\right) = \frac{\left(1+\frac{v_x^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)} = \frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \tag{9-52}$$

(9-52)式最后的等式中我们利用了(9-50)式和(9-51)式的结果。因此我们可以设定小球的质量为

NOTE

$$m(v)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{9-53}$$

小球在静止时其质量为 m_0，我们称之为静止质量。如果我们依然认为质点动量的改变是源于外力的作用，那么牛顿第二运动定律将被修改成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\boldsymbol{F} \tag{9-54}$$

(9-54)在速度等于零时就回归牛顿第二运动定律。而在速度趋近光速时，质量会趋近无穷大，因此即使受到一个有限的恒力作用，小球也不会加速到光速。一个系统如果没有受到外力作用，总动量依然守恒。不过(9-54)本身并不能让人觉得力学定律在洛伦兹变换下是不变的。这还需要定义力在洛伦兹变换下的形式，这已经超出了我们的教学范围。

如果将质量定义为力和加速度之比。利用(9.54)式求出沿着速度方向和垂直于速度方向的质量(可以假定瞬间速度的方向沿着 x 轴)。

2. 相对论能量

我们现在讨论一个质点的能量。我们依然定义质点动能的改变等于外力所做的功。那么一个质点从静止开始，加速到速度 v，外力做的功等于质点所获得的动能

$$\begin{aligned}
E_k &= \int_0^r \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^r \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^p \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_0^p \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} \\
&= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}\Big|_0^v - \int_0^v \boldsymbol{p}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v} \\
&= \frac{m_0v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \int_0^v \frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot \mathrm{d}v \\
&= \frac{m_0v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_0c^2
\end{aligned}$$

NOTE

$$=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2=m(v)c^2-m_0c^2 \tag{9-55}$$

所以动能正比于质点的运动质量与静止质量之差。(9-55)式在 $v\ll c$ 时 v/c 很小,可进行泰勒展开

$$E_k=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)=m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right) \tag{9-56}$$

只保留(9-57)右边第一项,就是牛顿力学的动能。在速度接近光速时,泰勒展开的高级项就不可忽略,这时的动能会偏离牛顿力学的动能。物体的动能是由于物体运动起来而具有的能量,是相比于物体静止时的能量增量。这使得爱因斯坦做出了一个大胆的推测:一个质点的总能量正比于其质量[①]:

$$E=m(v)c^2 \tag{9-57}$$

这就是著名的质能关系式,将能量和质量等同(统一)起来(差一个光速平方常量,没有本质差别)。根据(9-57)式,物体静止时也具有能量。物体运动起来时其动能完全蕴含在其质量的增量中。下面我们来看其具体的含义。我们考虑两个静止质量相同的小球的完全非弹性碰撞:在它们的质心系中以速率 v 对心碰撞,黏在一起而静止,如图 9-17(a)所示。在牛顿力学中,这个过程机械能是不守恒的,碰撞前小球的动能在碰撞后消失了。那么它们去了哪里了呢?碰撞后粘在一起的两个小球的总质量是多少呢?为了考察这个问题,我们现在考虑一个相对质心系以 $\boldsymbol{v}$ 向右运动在参考系[图 9-17(b)]。静止在这个参考系的观测者认为:碰撞前小球 a 是静止的,而小球 b 的速度是

$$v'=\frac{-2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

$$m(v')=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}m_0 \tag{9-58}$$

碰撞后,合并起来的质量是 $m_{总}(v)$(质量只和速度的大小相关,与速度的方向无关,v 与 $-v$ 对应的质量大小一样),速度是 $-v$。由动量守恒可以得到

① 爱因斯坦在“物体的惯性与它所含能量有关吗?”这篇论文中,论证了物体通过辐射会使自己的质量减小。

$$-m_{总}(v)v=m(v')v'=\frac{-2m_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}v$$
$$\Rightarrow m_{总}(v)=\frac{2m_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{9-59}$$

(9-59)式给出了粘在一起的两个小球的运动质量。我们现在回到质心系[图 9-17(a)],碰撞后粘在一起的小球是静止的,由静止质量和动质量的关系(9-53)式得到

$$m_{总0}=m_{总}(v)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{9-60}$$

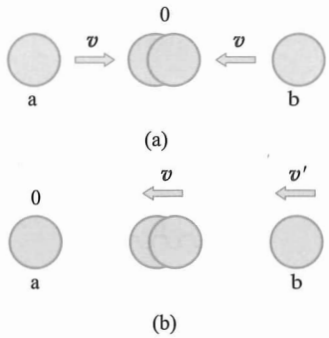


图 9-17

而(9-61)的右边正好是两个碰撞前小球的运动质量之和。所以在质心系[图 9-17(a)],碰撞后黏在一起的小球质量等于碰撞前两个小球的(运动)质量之和。两个运动小球的动能没有消失,而是储存在合并后的质量中了。这个结论对图 9-17(b)这个参考系也是成立的。利用(9-58)式碰撞前两个小球的总质量是

$$m_0+\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}m_0=\frac{2m_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}=m_{总}(v) \tag{9-61}$$

所以没有外力存在时,系统不仅动量守恒,总质量也是守恒的。根据质能公式(9-57)式,总能量也是守恒的。这里的总能量,包括一切形式的能量,不仅有动能、引力能,还有我们将会学到的电磁能和我们在本教学中不会涉及的强、弱相互作用能。另外,我们这里谈论的小球静止质量,其实已经包含了很多形式的能量了。如果我们深入微观,我们知道小球是由很多原子分子组成的,而这些原子分子并不是静止的,而是在不断运动着,它们之间还有电磁相互作用。所以小球的静止质量已经包含了这些原子分子的动能。两个小球的完全非弹性碰撞,只是把小球的宏观动能转化成原子分子的微观动能和其他形式的能量(如果这个过程没有任何形式的能量损失,比如辐射)。质能等价说明能量有实在的载体。系统能量的释放伴随着能量载体的释放和系统质量的损失。我们通常说的放热、放光或电磁辐射的过程,对应的是光子的释放,只是它们的频率有所不同。所以光子必然也带有质量。根据量子理论,一个光子所带的能量是 $h\nu$,h 是普朗克常量。所以光子的质量是

NOTE

$$m=\frac{hv}{c^2} \tag{9-62}$$

需要说明光没有静止参考系，所以也无从讨论其静止质量。如果非要谈论其静止质量，其静止质量只能为零，否则光子的质量会是无穷大。根据质量和动量的关系(9-49)式，光子的动量为

$$p=mc=\frac{hv}{c}=\frac{h}{\lambda} \tag{9-63}$$

能量的传递伴随着物质的转移，这个图像用到宏观过程，可能会产生疑问。比如我们用力推动物体做功，物体的质量(能量)增加，这个过程似乎看不到能量载体的释放和吸收。要解释这个过程，我们必须深入到微观。我们知道所有的力都可以归结为四种相互作用力。而我们日常的宏观力都可以归结为电磁力：宏观的挤压变形，在微观上表现为原子分子之间电磁力的作用。那么电磁力是如何在电荷之间互相施加从而交换能量的呢？从量子的角度看，两个电荷之间交换了光子，如图 9-18 所示。由于光子同时带着能量和动量，所以接受的电荷也同时获得了能量和动量，这和宏观上的热交换非常相似。太阳每秒钟通过可见光和其他辐射释放的能量大约为 3.9×10^{26} J 的能量，地球上就是靠接受太阳释放的粒子获得能量。这部分能量相当于太阳每秒钟损失 4.3×10^{9} kg 的质量。太阳的能量来源于其中心的核聚变反应。最终的结果(虽然过程会复杂得多)是

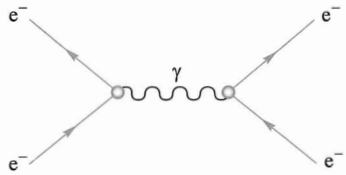


图 9-18

NOTE

$$4\mathrm{p}\rightarrow{}^{4}_{2}\mathrm{He}+2\mathrm{e}^{+}+2\mathrm{v}_{\mathrm{e}}+\text{能量}$$

其中 p 是质子(也就是氢原子核)，e^{+}是正电子，v_{e}是电子中微子，能量就是指光子以及其他粒子的动能。所以太阳不仅放出光子，还放出其他粒子，它们都是能量的一部分。特别是正电子，多数情况下会马上和太阳内部的负电子湮没而转化成光子。所以实际上能留在太阳内部的是氦原子核。整个过程质量损失就是 4 个质子的质量减去氦核的质量(质量亏损)：

$$4\times1.672\ 6\times10^{-27}-6.646\ 3\times10^{-27}\ \mathrm{kg}\approx4.4\times10^{-29}\ \mathrm{kg}$$

利用(9-58)，这部分质量损失相当于 4×10^{-12}J 的能量。质量亏损的百分比大约是 0.66%。作为比较，我们可以考虑氢气燃烧生成水的过程。氢气的燃烧值是 1.4×10^{8} J/kg，转化成质量大概是每千克氢气燃烧后损失 1.6×10^{-9} kg 的质量，亏损百分比大约是核聚变反应的四百万分之一，这还不包括参加反应的氧气。这也就是核弹比普通化学炸药威力大得多的原因。

例 5

一个静止的粒子衰变成两个粒子，质量分别为 m 和 $2m$，质量小的粒子速度为 v。求原衰变粒子的质量以及衰变产物的静止质量。

解 由质量守恒可知原衰变粒子质量 $m'=m+2m=3m$

轻的衰变产物的静止质量：$m_0=m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

由动量守恒可以知道重的衰变产物速度为 $-v/2$，所以它的静止质量为：$m'_0=2m\sqrt{1-\frac{v^2}{4c^2}}$

9-16 光的多普勒效应

和机械波类似，光也有多普勒效应。如图 9-19 所示，光源不断发出脉冲，两个脉冲之间的时间间隔是一个周期 T。当光源远离观测者时，在光源发出一个脉冲后，会移动距离 uT，再发射第二个脉冲，这样第二个脉冲需要多花 uT/c 的时间到达观测者。所以观测者观潮到的周期是 $(1+u/c)T$。这其实就是机械波的多普勒效应。然而这个周期 T 是在观测者静止参考系中观测到的两个脉冲时间间隔。由于时间延缓效应，在光源静止参考系中，周期其实是①

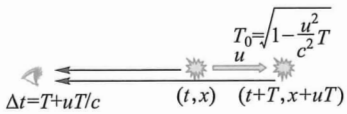


图 9-19 光的纵向多普勒效应

NOTE

$$T_0=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}T \tag{9-64}$$

所以当光源远离观测者时，测得的周期是

$$T'=\left(1+\frac{u}{c}\right)T=\frac{1+\frac{u}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}T_0 \tag{9-65}$$

换算成频率，就得到②

$$v'=\frac{1}{T'}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}}\frac{1}{T_0}=\sqrt{\frac{1-\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}}v \tag{9-66}$$

① 在光源静止系，两个脉冲是发生在同一位置，因此时间间隔是原时。

② 我们用这种方式得到的结论没有用到光子的概念，纯粹是经典的结论。

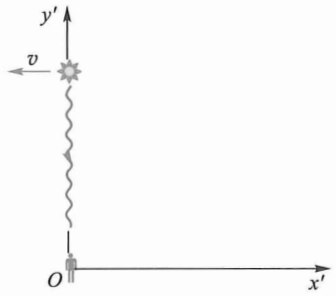


图 9-20 光的横向多普勒效应，在观测者看来，光的传播方向与光源的运动方向垂直

这就是光的纵向多普勒效应：当光源与观测者互相远离时，观测者观察到的光频率比光源本身发射的频率要小，也称为光的多普勒红移①。(9-66)式与机械波的多普勒频移明显不同，特别是(9-66)式并不区分到底是光源在动还是观测者在动，只和他们的相对运动速度相关。而对于机械波来说，有一个“绝对参考系”——介质，波源相对介质运动的情况与观测者相对介质运动的情况是不一样的(即使它们的相对速度完全一样)。光与机械波的另一个重要差别是光有横向多普勒效应。当光源的运动方向垂直于光的传播方向时(图 9-20)，两次脉冲光源与观测者的距离没有发生改变，但是依然有时间延缓效应，所以(9-65)式可修改为

$$T' = T = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} T_0 \tag{9-67}$$

或者

$$v' = \frac{1}{T'} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \frac{1}{T_0} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} v \tag{9-68}$$

如果光源和观测者相向靠近，(9.66)式将如何变化？

光的多普勒效应有很广泛的应用。很著名的例子是穆斯堡尔效应。一个处于激发态的原子核会衰变到低能态的原子核，同时放出一个光子(γ 射线)。如果光子遇到同样一个处于相同低能态的原子核，会被共振吸收，而将原子核激发到相同的激发态。然而这种共振吸收很少发生，因为原子核放出光子时会反冲，这样放出的光子的能量比能级差要小一点，而原子核吸收光子时也会反冲，所以共振吸收不会发生。穆斯堡尔发现，一些元素的原子核固定在整个金属晶体上，因而反冲可以忽略，就可以实现共振吸收。穆斯堡尔由于这项发现在 1961 年获得诺贝尔奖。实际上，由于各种原因，原子核吸收的光子与原子核的能级差会有很小的差异，比如 ^{57}Fe，当光子的能量差异与能级差之比 $\Delta E/E > 10^{-13}$ 时，共振吸收不会发生。这时可以来回移动吸收的晶体，调节移动的速度，利用多普勒效应达到共振吸收。利用这项技术，可以测量微小的频率差，相对精度达到 $10^{-13} \sim 10^{-22}$。此项技术在精确测量领域有广泛的应用。比如在地面的引力红移，光频率由

① 我们已经假定 S 系光源是静止的。其实这里光源到底是怎样的运动状态关系不大了，而和光的传播方向有确定的关系。只要光的传播方向和 S′系相对 S 系的运动方向一致，S′系观察到的频率 v' 就比 S 系的观测者观察到的频率 v 小，(9-68)式依然成立，这可以用惠更斯原理来解释。

于地球引力的作用会改变 $\Delta v/v \sim 10^{-15}$，庞德和瑞博卡就利用穆斯堡尔效应测量到了这个改变，验证了广义相对论的一个重要预言。光的多普勒效应在天文学和宇宙学也有广泛的应用。我们可以利用星体接收到的光谱与地球上同类原子的光谱进行比较而确定星体相对地球的运动速度，如图 9-21 所示。哈勃就是这样发现所有星体的光谱都出现红移，从而判断星体都在远离地球的①。氢原子的 21 cm 谱线的红移（或蓝移）可以用来确定星系边缘的暗晕绕星系的旋转速度，这是发现宇宙中存在暗物质的关键。

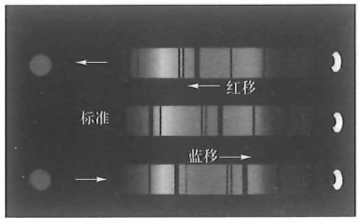


图 9-21 光谱红移蓝移示意图

*9-17 四维动量

NOTE

我们可以利用(9-57)式定义动量的第零分量（时间分量）：

$$p_0 = \frac{E}{c} = m(v)c = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{9-69}$$

不难验证

$$p_0^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_0^2 c^2 \tag{9-70}$$

(9-69)式表明能量和动量存在一种关联，和时间与空间的关系类似。(9-33)式表明$(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$是四维时空的一个位移矢量，其长度在任何坐标下是不变的。(9-70)式表明(p_0, p_x, p_y, p_z)也是四维时空的一个矢量，其长度在任何坐标下是不变的②。注意(9-70)长度的定义与(9-33)式完全一样。我们现在来证明(p_0, p_x, p_y, p_z)的坐标变换方式与$(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$是一样的。首先利用速度变换公式(9-47)式可以得到

$$v'^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 = \frac{\left(v_x - u\right)^2 + \left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\left(v_y^2 + v_z^2\right)}{\left(1-\dfrac{uv_x}{c^2}\right)^2}$$

① 星系（除极邻近的星系受引力吸引外）宏观上都是远离地球的，但是单个的恒星还有绕星系中心旋转的运动，所以那些离地球很近的恒星其光谱并不总是出现红移的。另外，宇宙膨胀所带来的光谱红移与狭义相对论的多普勒红移还是有差别的，只能说在 v/c 的一级效应下，对两者的解释可以相同。

② 三维速度矢量在三维空间旋转变化下，其大小是不变的。洛伦兹变换是四维时空的旋转变换，四维矢量的“长度”在这种变换下也是不变的。

NOTE

$$\Rightarrow 1-\frac{v'^2}{c^2}=\frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2} \tag{9-71}$$

再利用(9-48)式和(9-72)式得到

$$p'_x=\frac{m_0v'_x}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{(v_x-u)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(p_x-\frac{u}{c}p_0\right)$$

$$p'_y=\frac{m_0v'_y}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{m_0v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=p_y$$

$$p'_z=\frac{m_0v'_z}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{m_0v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=p_z$$

$$p'_0=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(p_0-\frac{u}{c}p_x\right) \tag{9-72}$$

(9-72)式对任何粒子都是有效的。对于光子,虽然其静止质量为零,它依然具有一定的动量和能量。根据爱因斯坦的光子说,由波粒二象性公式

$$p_0=\frac{E}{c}=\frac{h\nu}{c},\quad |\boldsymbol{p}|=\frac{h}{\lambda}=\frac{h\nu}{c} \tag{9-73}$$

并假定光子沿着 x 轴正方向运动,将(9-73)式代入(9-72)式的第四式,得到

$$\nu'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(\nu-\frac{u}{c}\nu\right)=\frac{1-\frac{u}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\nu=\sqrt{\frac{1-\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}}\nu \tag{9-74}$$

这就是光的纵向多普勒效应公式。我们得到(9-74)式时,没有谈及光源的运动状态,因此光的多普勒效应只是两个相对运动的观测者对同一方向传播的光的不同观测结果,与光源的运动状态没有直接关联。光的横向多普勒效应公式也可以获得。在(9-72)式中让我们假定光在 S′系(观测者静止系)是沿着 y' 轴方向传向观测

者的，同时光源是沿着 x' 轴负方向运动[在 S 系(光源静止系)中看来观测者是沿着 x 轴正方向运动的]，这样在观测者(S′系)看来光源的运动方向与光的传播方向垂直(见图 9-20)①，所以观测者认为光子在 x 轴方向的动量为零。利用(9-72)式的第一式得到

$$p_x'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(p_x-\frac{u}{c}p_0\right)=0\Rightarrow p_x=\frac{u}{c}p_0 \tag{9-75}$$

将(9-75)式代入(9-72)式的第四式，并利用(9-73)式得到

$$v'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(v-\frac{u^2}{c^2}v\right)=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}v \tag{9-76}$$

与(9-68)式一致。利用(9-73)式还可以得到

$$p_0^2-|\boldsymbol{p}|^2=0$$

与(9-70)式相比，显然光子的静止质量为零。

NOTE

本章摘要

1. 洛伦兹变换

光速不变导致洛伦兹变换(参考系 S′相对 S 以 u 沿 x 轴正向运动，u 可正可负，u 为负表明 S′其实向 x 轴负方向运动)。

$$x'=\gamma(x-ut)$$
$$y'=y$$
$$z'=z$$
$$t'=\gamma\left(t-\frac{u}{c^2}x\right)$$
$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

对于任意两个事件，时间和空间间隔的变换关系为

$$\Delta x'=\gamma(\Delta x-u\Delta t)$$
$$\Delta t'=\gamma\left(\Delta t-\frac{u}{c^2}\Delta x\right)$$

① 不能以 S 系作为标准。因为在 S 系中，光沿着 y 轴方向传播，在 S′系中看来光的传播方向并不沿着 y 轴方向。这样光源的速度在光的传播方向上的投影不为零，有部分纵向多普勒效应。

NOTE

2. 时间和空间

对于任意两个相对速度沿 x 轴运动的参考系，两个事件的时间间隔和空间间隔满足

$$c^2\Delta t^2-\Delta x^2=c^2\Delta t'^2-\Delta x'^2$$

上式表达了不同参考系观测者对两个客观事件时间、空间间隔的不同看法。如果两个事件在某个参考系中看来发生在同一位置，时间间隔在这个参考系中必然是最短的，称为原时或固有时。这也是动钟变慢效应。如果两个事件在某个参考系看来同时发生，空间间隔在这个参考系中必然是最短的。这也是动尺的洛伦兹收缩。同时的相对性在上式中一目了然。

3. 速度变换

S′系以速度 u 沿 x 轴相对 S 系运动，同一物体相对两个参考系的运动速度满足

$$v_x'=\frac{v_x-u}{1-uv_x/c^2}$$

$$v_y'=\frac{v_y}{\gamma(1-uv_x/c^2)}$$

$$v_z'=\frac{v_z}{\gamma(1-uv_x/c^2)}$$

4. 相对论力学

（1）相对论质量

$$m(v)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

（2）相对论能量和动量

$$E=m(v)c^2,\quad \boldsymbol{p}=m(v)\boldsymbol{v}$$

光子的能量与动量

$$E=mc^2,\quad p=mc$$

光子没有静止质量。

5. 光的多普勒效应

光的纵向多普勒效应

$$v'=\sqrt{\frac{1-\dfrac{u}{c}}{1+\dfrac{u}{c}}}v$$

横向多普勒效应

$$v' = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}v$$

习题

9-1　比邻星距离地球 4 ly，如果宇航员乘坐速度为 0.8c 的飞船前往。问宇航员花多少时间能到达？

9-2　π 介子是一种不稳定的粒子，当它静止时，平均寿命为 2.5×10^{-8} s，之后即衰变成一个 m 介子和一个中微子。在实验室测得它的速率为 $u=0.99c$，问它从产生到衰变能移动多长距离（单位：m）？

9-3　乙相对甲以速度 v 沿 x 轴正方向运动。甲认为乙的钟比自己的慢，乙则认为甲的钟慢。如果有丙相对甲以 u 的速度沿 x 轴正方向运动。请问丙认为甲乙两人的钟哪个走得更慢？

9-4　一艘飞船以 0.8c 的速度从地面上空飞过。飞船参考系测量飞船的长度是 50 m。飞船头部宇航员向飞船尾部发射一束光信号。问在飞船上观察，尾部多长时间后接收到光信号？在地面上观察，多长时间后尾部接收到光信号？

9-5　一块正方体石头静止于地面，密度是 2 000 kg/m^3。一飞船沿着正方体的一棱边方向从上空以 0.8c 的速度飞过，问飞船宇航员测得的石头密度是多少？

9-6　1 kg 水，从 0 ℃加热到 100 ℃，质量变化为多少？

9-7　地面上的观测者发现两艘飞船相向而行，飞船甲的速度是 0.8c，飞船乙的速度是 0.6c。这时两艘飞船相距 4.2×10^9 m，飞船甲的时钟指向 11 点，飞船乙的时钟指向 12 点。问地面观测者认为多长时间后两艘飞船会碰撞？碰撞时飞船甲的时钟示数多少？飞船乙的时钟示数多少？飞船甲认为飞船乙的速率为多大？飞船甲的宇航员发现自己的方向舵失控，通过计算可知飞船乙有多少反应时间（此时飞船甲的时钟指向 11 点）？你认为以上你的计算结果都是自洽的吗？请解释原因。

9-8　地球和月球基地中的宇航员约定同时向对方发射光信号，结果由于失误，月球基地中的宇航员晚了 1 s 发射信号。这时正好有飞船沿着地月方向飞行，飞船宇航员（根据计算）发现两个信号是同时发射的，问飞船相对地面的速度是多大？是否有可能存在另一艘飞船认为月球基地的信号更早发射的情况？

9-9　验证（9-33）式。

9-10　如果人类发明光子火箭，这种火箭向外喷射的是光，可以将飞船加速到近光速。请计算：如果最终飞船被加速到 0.8c，发射前飞船质量是整个火箭质量的几分之几？

9-11　一列火车以 0.6c 的速率绕一个周长为 6 280 m 的圆形轨道运动，头尾相接。在车上的观测者看来圆周应该为多长？圆的半径是多少？（提示：列车不处于惯性系中，因此请从地面的角度分析问题）

9-12　一个以 0.99c 速度运动的粒子与具有相同静止质量的静止粒子碰撞。如果在两粒子质心系中观察，它们的初速度各是多少？

9-13　GPS 定位系统中，卫星通过原子钟定时向地面发射信号，地面接收器通过自己的原子钟确定接收到信号的时间，然后再根据卫星星历数据得知卫星的位置，从而知道自己的位置。一般 GPS 定位系统中至少要 4 颗卫星才行。卫星处于 20 000 km 的高空，如果假设卫星轨道是圆形，请估算由卫星运动导致的一天内的时间误差（从而导致定位误差）是多少？（注：还有部分误差来自引力场时钟变慢效应，这里不考虑）

9-14　在经典力学中，电子经过多大的电势差加速后，其速度达到光速？事实上，在粒子加速器中，可

以把电子加速到 100 GeV(1 GeV = 1 000 MeV),这时电子的速率多大?

9-15 一对光子碰撞可以产生一对正负电子。(为什么一个光子不能转变成一对正负电子?)光子的最大波长是多少?

9-16 铀-235 的质量亏损百分比是 0.09%。试问一个 10^6 kW 的核电站,一年需要消耗多少含量为 5%的铀-235 核燃料①?

9-17 $ct-x$ 时空图中有两点 A、B(B 在上,A 在下),它们相连的直线的斜率大于 1。如果一个粒子从 A 到 B,请作出粒子所用时间最短的行程线和所用时间最长的行程线。

9-18 在穆斯堡尔效应中,如果入射到 ^{57}Fe 上的光子能量与能隙之差与能隙之比 $\Delta E/E = 10^{-13}$,则需要以多大的速度移动 ^{57}Fe 晶体?



习题解答

① 实际上并不是每个铀-235 原子核都会裂变、释放出预期的能量,放出的能量转化成电能,也会有巨大的损耗。这些都不考虑。

第十章　气体动理论

物质内部大量微观粒子杂乱无章的无规则运动称为热运动，温度是描述热运动的最基本的物理量。与温度有关的宏观现象称为热现象，热现象是大量微观粒子热运动的宏观表现。研究热现象的理论有两种：一种是微观理论，称为统计力学（statistical mechanics）；另一种是宏观理论，称为热力学（thermodynamics）。统计力学从物质的微观结构出发，根据微观粒子所遵循的力学规律，用统计的方法研究物质的宏观热现象。热力学不涉及物质的微观结构，而是根据观察和实验总结出来的热力学定律，用逻辑推理的方法研究热现象。这两种理论是相辅相成的，统计力学从微观上对热现象作出本质的解释，使热力学理论获得更深刻的意义；热力学理论建立在实验规律的基础上，具有高度的普遍性和可靠性，可用来检验微观理论的正确性。



本章补充资源

NOTE

气体动理论（kinetic theory of gas）是统计力学的一部分，它从气体微观结构的一些简化模型出发，用力学规律和统计方法研究气体的宏观热现象，建立宏观量和微观量统计平均值之间的关系，阐明宏观量的微观本质。描述系统的状态和性质的物理量称为宏观量，如气体的压强、温度、内能等。描述微观粒子运动状态和性质的物理量称为微观量，如分子的质量、速度、能量等。

10-1　平衡态　状态参量　理想气体

1. 热力学系统

统计力学和热力学所研究的具体对象是由大量微观粒子（原子、分子、电子等）组成的宏观系统，称为热力学系统，简称系统。

NOTE

热力学系统可以是气体、液体、固体等。系统周围的环境称为外界。与外界无相互作用,即既没有物质交换也没有能量交换的系统称为孤立系统;与外界只有能量交换而无物质交换的系统称为封闭系统;与外界既有能量交换、又有物质交换的系统称为开放系统。

2. 平衡态

热学中,最基本的概念是温度和热平衡。如果两个物体温度不相等,互相接触,则会导致热量从高温物体流向低温物体,直到不再有热量流动,我们便说这两个物体达到热平衡,此时它们的温度相等。除了热平衡,还有更普遍意义上的平衡状态。在不受外界影响的条件下,系统的宏观性质不随时间变化的状态称为平衡状态,或称平衡态。这里所说的外界影响,是指外界与系统交换能量和物质。例如,封闭在容器中的某种气体,当其与外界没有能量交换时,无论气体原先是否处于平衡态,经过足够长时间后,它最终都会达到平衡态,而且气体能长期维持这一状态不变。这时气体内各处必须具有相同的温度。除此以外,气体还必须达到力学平衡。如果气体所有分子所处的力学环境都相同且各向同性,压强和密度也会处处相等,呈现一种均质状态。当气体处于外场中,比如处于重力场中时,力学平衡会导致压强和密度并非处处相同。系统还可以在更复杂环境中达到平衡,这超出了本教材的范围。我们的主要目标集中在均质的理想气体。

从微观上看,系统处于平衡态时,其分子仍在不停地作热运动。因此,热学中的平衡是动态平衡,通常称为热动平衡。

3. 状态参量

系统处于平衡态时,其宏观性质可用一组独立的宏观参量来描述,这些参量称为状态参量,系统的其他宏观量都可以表示为状态参量的函数,称为状态函数。对于一定质量的理想气体,其平衡态可用体积(volume)V、压强(pressure)p 和温度(temperature)T 三个状态参量中的任意两个来描述。

以独立的状态参量作为坐标所作的图称为状态图。例如选择 p、V 作为状态参量,p 为纵坐标、V 为横坐标的状态图称为 p-V 图。同样也可作出 p-T 状态图和 V-T 状态图等。状态图中一个

点和气体的平衡态之间有一一对应关系。

NOTE

国际单位制中，体积的单位是立方米（m^3）。压强的单位是帕[斯卡]（Pa），简称帕，它等于在 1 m^2 面积上受到 1 N 的正压力。温度的单位和数值的表示方法称为温标。物理学中常用的温标有热力学温标和摄氏（Celsius）温标两种。热力学温标又称绝对温标或开尔文（Kelvin）温标，热力学温度用 T 表示，其单位是开[尔文]（K）。摄氏温度用 t 表示，其单位是摄氏度（℃）。热力学温度与摄氏温度的关系为 $t/℃ = T/K - 273.15$，即规定热力学温度 273.15 K 为摄氏温度 0℃，273.15 K 是水的冰点。

4. 理想气体及其状态方程

理想气体（ideal gas）是严格遵从玻意耳（Boyle）定律（一定质量的气体在温度不变时，其压强与体积成反比）、查理（Charle）定律（一定质量的气体在体积不变时，其压强与热力学温度成正比）和盖-吕萨克（Gay-Lussac）定律（一定质量的气体在压强不变时，其体积与热力学温度成正比）的气体。理想气体是真实气体的理想模型，实际气体在压强不太大、温度不太低的情况下，可近似地看成理想气体。

一定质量的理想气体处于平衡态时，只需用两个独立参量就能确定其宏观状态。理想气体状态参量 p、V、T 之间的关系式为

$$pV = \frac{m_{气}}{\mu}RT = \nu RT \tag{10-1}$$

称为理想气体状态方程（ideal gas law），式中 $m_{气}$ 为气体的质量；μ 为气体的摩尔质量，其单位是千克每摩[尔]（kg/mol）；ν 为物质的量，其单位是摩[尔]（mol）；R 称为摩尔气体常量（gas constant），因为理想气体在标准状况（$T_0 = 273.15$ K，$p_0 = 1.013 \times 10^5$ Pa）下，摩尔分子体积为 $V_m = 22.4 \times 10^{-3}$ m^3/mol，故由（10-1）式得 $R = \dfrac{p_0 V_m}{T_0} = \dfrac{(1 \times 1.013 \times 10^5) \times (22.4 \times 10^{-3})}{273.15}$ J/(mol · K) = 8.31 J/(mol · k)。1 mol 分子的任何物质所含有的分子数皆为 $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ mol^{-1}，称为阿伏伽德罗（Avogadro）常量。以 N 表示气体分子总数，m 表示分子质量，则（10-1）式可改写为

$$p = \frac{1}{V}\frac{m_{气}}{\mu}RT = \frac{1}{V}\frac{mN}{mN_A}RT = \frac{N}{V}\frac{R}{N_A}T$$

令 $n = \dfrac{N}{V}$，$k = \dfrac{R}{N_A}$，上式写作

$$p=nkT \tag{10-2}$$

这是理想气体状态方程的另一形式。式中 n 是单位体积内分子数，称为分子数密度；k 称为玻耳兹曼(L.Boltzmann)常量，其值为 $k=\frac{R}{N_A}=\frac{8.31}{6.02\times10^{23}}\text{J/K}=1.38\times10^{-23}\text{ J/K}$。

10-2 理想气体的压强和温度

NOTE

本节从理想气体的微观模型出发，依据单个分子所遵循的力学规律，用统计平均方法建立微观量的统计平均值与宏观量之间的联系，揭示压强和温度的统计意义。

从分子热运动出发阐明系统的宏观性质时，需要对单个分子的力学性质作出基本假设，我们将其称为气体的微观模型。为了阐明理想气体的微观模型，先介绍分子之间的相互作用力。

1. 分子间作用力

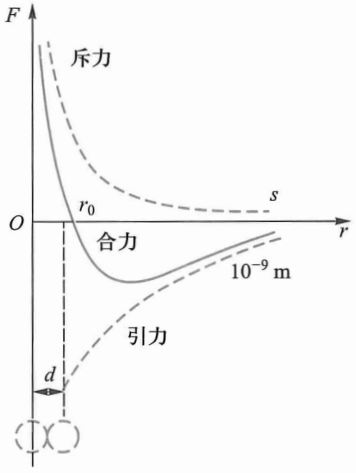


图 10-1 分子间作用力

分子由原子组成，原子由原子核和电子组成，电子绕核运动，形成电子云。两个分子之间既存在引力，也存在斥力，分子间作用力 F 随两个分子的中心之间的距离 r 的变化情况如图 10-1 所示，斥力和引力用虚线表示，合力用实线表示。当两个分子分离较远时，如图中 $r>s$ 时，分子间作用力几乎为零，s 称为分子的有效作用距离；实验表明，s 的数量级为 $10^{-9}\sim10^{-8}$ m。这种随距离增大而急剧减小的力称为短程力，超出有效作用距离时，短程力实际上可以忽略不计。当 $r=r_0$ 时，引力和斥力互相抵消，合力为零，这一位置称为平衡位置。$r>r_0$ 时两分子的相互作用力表现为引力；$r<r_0$ 时，分子间作用力表现为斥力。当 $r=d$ 时，斥力变得非常大，以至两个分子之间的距离不可能再小于 d，这相当于把分子视为直径为 d 的刚性球，故 d 称为分子的有效直径，实验表明，d 的数量级约为 10^{-10} m。

NOTE

2. 理想气体的微观模型

根据分子间作用力的性质，对理想气体单个分子的力学性质作下列三个假设：

（1）除碰撞的瞬间外，分子间不存在相互作用力；

（2）碰撞时，把分子视为直径为 d 的刚性球，分子小球的体积和气体体积相比可忽略不计；

（3）分子运动遵从牛顿力学规律，分子的碰撞是完全弹性的。

这些假设称为理想气体的微观模型。该模型可概括为：理想气体是自由的、无规则运动着的弹性小球的集合。

3. 统计假设

统计假设是对大量分子集体性质所作的假设。当气体处于平衡态时，若忽略重力的影响，分子数密度 n 处处相等。从微观上看，在任何短时间内，都有许多分子从各个方向进入某一体积元内，同时又有许多分子从该体积元内从各个方向出去。因此，n 处处相等，这意味着每个分子向任何方向运动的概率是相等的。所以，假设：

（1）气体分子向某一方向运动的分子数与向相反方向运动的分子数相等。如对于 x 坐标轴，$v_{ix}>0$ 和 $v_{ix}<0$ 的分子数相等，各占总分子数的一半。

（2）气体分子的速度沿各个方向的分量的各种平均值相等。如沿坐标轴的速度分量平方的平均值相等，即

$$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2} \tag{10-3}$$

其中

$$\overline{v_x^2}=\frac{v_{1x}^2+v_{2x}^2+\cdots+v_{Nx}^2}{N}=\frac{\sum_i N_i v_{ix}^2}{\sum_i N_i}$$

$$\overline{v_y^2}=\frac{\sum_i N_i v_{iy}^2}{\sum_i N_i},\qquad \overline{v_z^2}=\frac{\sum_i N_i v_{iz}^2}{\sum_i N_i}$$

式中 N_i 表示速度为 v_i 的分子数。对所有分子取平均值，有 $\overline{v^2}=\overline{v_x^2}+\overline{v_y^2}+\overline{v_z^2}$，与(10-3)式联立得

$$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2} \tag{10-4}$$

4. 压强公式

NOTE

从微观上看，容器中气体对器壁产生的压强是大量气体分子对器壁不断碰撞的平均效果。虽然每一个分子对器壁的碰撞是断续的，但大量分子对器壁的碰撞犹如密集的雨点打在伞上，产生一个持续的、恒定的压力。

设容器内有一定质量的理想气体处于热动平衡态，气体的体积为 V，分子总数为 N，分子质量为 m。气体分子热运动速度的大小和方向各不相同，为计算方便起见，把所有分子按速度区间分为许多组，每一组分子的速度大小和方向差不多相同。第 i 组分子的速度在 $\boldsymbol{v}_i$ 到 $\boldsymbol{v}_i+\Delta\boldsymbol{v}_i$ 区间内，分子数为 N_i，分子数密度为 N_i/V。在容器壁上取一块小面积 ΔA，并取垂直于该面积的方向为 x 轴方向，如图 10-2(a)所示。

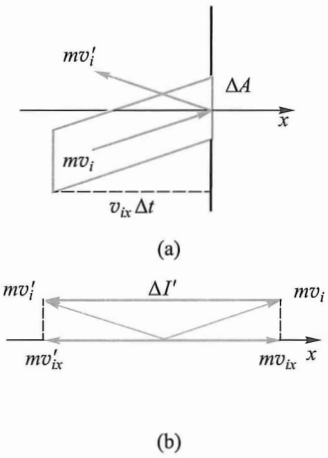


图 10-2 速度为 v_1 的分子对 ΔA 的碰撞

根据质点的动量定理，一个速度为 $\boldsymbol{v}_i$ 的分子小球与 ΔA 进行一次完全弹性碰撞受到的冲量为 $\Delta\boldsymbol{I}'=m\boldsymbol{v}_i'-m\boldsymbol{v}_i$。如图 10-2(b)所示，该冲量的大小为 $\Delta I'=2mv_{ix}$，方向沿 x 轴负向。根据牛顿第三定律，该分子在碰撞中施于 ΔA 的冲量为 $\Delta\boldsymbol{I}=2m\boldsymbol{v}_{ix}$，方向沿 x 轴正向。

为了计算在 Δt 时间内，所有与 ΔA 相碰分子施于 ΔA 的总冲量，把这些分子按速度区间分成许多组，如图 10-2(a)所示为速度区间为 $\boldsymbol{v}_i\sim\boldsymbol{v}_i+\Delta\boldsymbol{v}_i$，即速度在 $v_i(v_{ix}>0)$ 附近的分子组，凡是底面积为 ΔA、斜高为 $v_i\Delta t$、高为 $v_{ix}\Delta t$ 的斜柱体内速度为 $\boldsymbol{v}_i\sim\boldsymbol{v}_i+\Delta\boldsymbol{v}_i$ 的分子，在 Δt 时间内都能与 ΔA 相撞。该斜柱体体积为 $v_{ix}\Delta t\Delta A$，所以在 Δt 时间内，速度为 $\boldsymbol{v}_i\sim\boldsymbol{v}_i+\Delta\boldsymbol{v}_i$ 与 ΔA 相碰的分子数为 $\frac{N_i}{V}v_{ix}\Delta t\Delta A$，这些分子在 Δt 时间内对 ΔA 作用的冲量为 $\left(\frac{N_i}{V}v_{ix}\Delta t\Delta A\right)(2mv_{ix})$，方向沿 x 轴正向。显然，在 Δt 时间内，所有与 ΔA 相撞的分子对 ΔA 作用的总冲量 I 是把上式对所有 $v_{ix}>0$ 的各速度区间的分子求和，因为 $v_{ix}<0$ 的分子是不会与 ΔA 相撞的。根据统计假设，$v_{ix}>0$ 与 $v_{ix}<0$ 的分子数各占分子总数的一半，故有

$$I=\frac{1}{2}\sum_i\left(\frac{N_i}{V}v_{ix}\Delta t\Delta A\right)(2mv_{ix})=\sum_i\left(\frac{N_i}{V}mv_{ix}^2\Delta t\Delta A\right)$$

NOTE

$\sum_i$ 表示对所有分子求和，$\sum_i$ 号前的 1/2 表示只有 $v_{ix}>0$ 的一半分子与 ΔA 相撞。根据冲量的定义式，ΔA 面所受的平均力为

$$\overline{F}=\frac{I}{\Delta t}=\sum_i\left(\frac{N_i}{V}mv_{ix}^2\Delta A\right)$$

因此，压强为

$$p=\frac{\overline{F}}{\Delta A}=\sum_i\left(\frac{N_i}{V}mv_{ix}^2\right)=\frac{Nm}{V}\frac{\sum_i(N_iv_{ix}^2)}{N}=\frac{N}{V}m\overline{v_x^2}=nm\overline{v_x^2}$$

利用(10-4)式，上式化为

$$p=\frac{1}{3}nm\,\overline{v^2}=\frac{2}{3}n\left(\frac{1}{2}m\,\overline{v^2}\right)=\frac{2}{3}n\overline{\varepsilon}_t \qquad (10-5)$$

称为理想气体的压强公式，简称压强公式。式中 $\overline{\varepsilon}_t=\frac{1}{2}m\overline{v^2}$ 称为气体分子的平均平动动能，是分子平动动能的统计平均值；n 是分子数密度，也是一个统计平均量。只有当分子数很大时，$\overline{\varepsilon}_t$ 和 n 才具有稳定的数值。压强公式把压强 p 与分子平动动能的统计平均量 $\overline{\varepsilon}_t$ 和 n 联系了起来，所以压强是一个统计平均量，只有当分子数很大时，压强才有明确的意义。单个分子或少数分子对器壁的碰撞不会产生稳定的压强，在这种情况下，压强也就失去了意义。

上述推导过程中，在求所有与 ΔA 相碰的分子对 ΔA 作用的总冲量之前，用了力学方法处理，说明个别分子的运动遵从力学规律。在求大量分子对 ΔA 作用的总冲量和压强时，用了统计假设和统计平均方法，建立了微观量的统计平均值 $\overline{\varepsilon}_t$ 和 n 与宏观量 p 之间的联系，揭示了压强的统计意义。

5. 温度公式

将理想气体的压强公式(10-5)式和理想气体状态方程 $p=nkT$ 联立得

$$\overline{\varepsilon}_t=\frac{3}{2}kT \qquad (10-6)$$

称为理想气体的温度公式，简称温度公式。它指出理想气体分子的平均平动动能与气体热力学温度成正比，而与气体的其他性质无关，这说明气体的温度是理想气体分子的平均平动动能的量度。温度越高，分子平均平动动能越大，分子热运动越剧烈，所以气体温度是表征气体分子热运动剧烈程度的物理量。因为 $\overline{\varepsilon}_t$ 是

统计平均值，只有当气体分子数很大时，$\overline{\varepsilon_t}$ 才有确定的值，所以温度具有统计意义，对个别分子或少数分子谈温度是没有意义的。

由温度公式(10-6)式和 $\overline{\varepsilon_t}=\frac{1}{2}m\overline{v^2}$ 得

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}\approx 1.73\sqrt{\frac{RT}{\mu}} \qquad (10-7)$$

式中 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 称为理想气体分子的方均根速率(root-meansquare speed)，是分子速率的一种统计平均值。上式表明，方均根速率与气体种类和热力学温度有关。在温度相同的情况下，气体分子的质量越大，方均根速率越小；对于同一种气体，温度越高，方均根速率越大。在0℃时，氢气分子的方均根速率为 1.84×10^3 m/s，氧气分子的方均根速率为461 m/s，氮气的方均根速率为493 m/s，空气的方均根速率为484 m/s。

10-3 能量均分定理 理想气体的内能

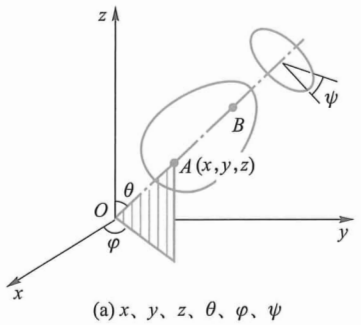
NOTE

能量均分定理(equipartition of energy)，有时又称为能量按自由度均分定理，是平衡态下大量分子能量所遵从的统计规律。用它可以计算理想气体的内能和热容。在推导压强公式时，我们没有考虑分子的结构，而是在忽略分子间相互作用力的假设下，把分子看成质点，计算了气体分子的平均平动动能。实际上，分子不仅有大小，而且可以产生形变，故分子除平动外，还有转动和振动，这涉及分子结构。作为简化的模型，在温度不是很高(不足以激发原子内部的自由度)时，我们把原子看成质点，若只考虑分子的平动和转动，可把分子看成刚体；若要考虑分子的平动、转动和振动，可把分子看成弹性体。因此，在计算气体分子的平均能量时，不能仅把分子看成一个质点，而要考虑分子的结构，这需要利用自由度的概念。

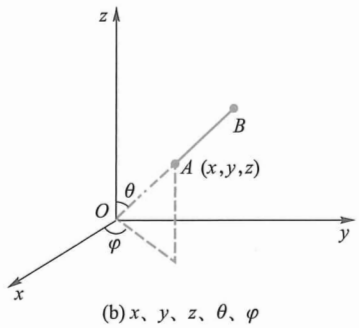
1. 自由度

确定一个物体在空间的位置所需要的独立坐标数称为该物体的自由度(degree of freedom)。确定一个质点的空间位置

需要三个独立坐标，所以在空间自由运动的质点有三个自由度，它们都是平动自由度。确定一个刚体的空间位置一般需要六个自由度，其中三个平动自由度，三个转动自由度。如图 10-3(a)所示，确定刚体中 A 点的位置，需要三个独立坐标 x、y 和 z，对应三个平动自由度。A 点位置确定后，整个刚体仍可绕 A 点转动，再用两个角坐标 θ、φ 可确定刚体中直线 AB 的位置，这时整个刚体还可以绕 AB 轴旋转，因此还需要用角坐标 ψ 来确定刚体绕 AB 轴转动的角位置。上述三个独立的角坐标对应三个转动自由度。因此，一般情况下刚体有三个平动自由度和三个转动自由度。如果刚体由一根刚性轻杆连接的两个质点组成，如图 10-3(b)中的 AB 所示，则确定该刚体的位置只需五个独立坐标 x、y、z、θ、φ，对应五个自由度，其中三个平动自由度、两个转动自由度。



(a) x、y、z、θ、φ、ψ



(b) x、y、z、θ、φ

图 10-3 刚体的自由度

本书采用刚性分子模型，即将原子看成质点，将分子看成刚体，则单原子分子(如氩、氖、氦等)有三个平动自由度；双原子分子(如氢、氧、氮、一氧化碳等)有三个平动自由度，两个转动自由度，共五个自由度；多原子分子(三个或三个以上原子组成的分子，如水蒸气、甲烷、乙醇等)有三个平动自由度、三个转动自由度，共六个自由度。

如果双原子分子中两个原子沿连线方向作微振动，则双原子分子可形象地比拟为用一根轻弹簧连接的两个质点，这种弹性双原子分子有六个自由度，其中三个平动自由度、两个转动自由度、一个振动自动度。对于弹性多原子分子的振动自由度，需要对分子结构作具体分析才能确定。

NOTE

2. 能量均分定理

由温度公式(10-6)式和(10-4)式得

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}=\frac{1}{2}m\overline{v_y^2}=\frac{1}{2}m\overline{v_z^2}=\frac{1}{2}kT \qquad (10\text{-}8)$$

上式指出，气体分子在 x、y、z 每个自由度运动的平均平动动能都等于 $kT/2$，即分子的平均平动动能 $\overline{\varepsilon_t}$ 按自由度均匀分配，每一个平动自由度都具有相同的平均动能。

这个结论还可以推广到转动和振动中去。经典统计物理学可以证明：当物质处于平衡态时，其分子的每一个平动或转动自由度都具有相同的平均动能 $kT/2$；每一个振动自由度都具有相同的平均动能 $kT/2$ 和平均势能 $kT/2$(具有势能)。这一结论称为能量均分定理，有时也称为能量按自由度均分定理。

NOTE

能量均分定理是一条统计规律，反映了大量分子的平均能量的规律性。它是经典统计物理学中的一条定理，很容易通过统计物理导出。

3. 一个气体分子的平均能量

采用刚性分子模型，将自由度记作 i，其中平动自由度记作 t，转动自由度记作 r。根据能量均分定理，气体分子每一个平动或转动自由度具有的平均能量为 $\overline{\varepsilon}_1 = kT/2$，气体分子的平均能量为 $\overline{\varepsilon} = ikT/2$。单原子分子的自由度 $i=3$，其平均能量为 $\overline{\varepsilon} = 3kT/2$；双原子分子的自由度 $i=5$，其平均能量为 $\overline{\varepsilon} = 5kT/2$；多原子分子的自由度 $i=6$，其平均能量为 $\overline{\varepsilon} = 6kT/2 = 3kT$。

4. 理想气体的热力学能

从气体动理论的观点来看，系统的热力学能（内能，internal energy）是组成系统的所有原子、分子和其他微观粒子的热运动的平动动能、转动动能和振动能量，以及由微观粒子之间相互作用产生的分子势能的总和。对于理想气体来说，我们不考虑比分子更微观的结构的自由度所具有的能量（只要温度足够低，这部分能量是一个固定值），也认为分子之间的相互作用力忽略不计，所以理想气体的热力学能是所有分子的平动动能、转动动能和振动能量的总和。采用刚性分子模型时，进一步忽略振动自由度，理想气体的热力学能是所有分子的平动动能和转动动能的总和。根据能量均分定理，1 mol 分子理想气体的热力学能为 $E_m = N_A\overline{\varepsilon} = iRT/2$，故质量为 $m_{气}$ 的理想气体的热力学能为

$$E = \frac{m_{气}}{\mu}\frac{i}{2}RT \tag{10-9}$$

上式表明，理想气体的热力学能是温度的单值函数。

例 1

密闭容器内有 1 mol 分子氧气，温度为 T，问：(1) 氧气分子的平均转动动能是多少？(2) 所有氧气分子的平动动能的总和是多少？(3) 当气体温度升高 1 K 时，其热力学能增加多少？

解 (1) 氧气是双原子分子气体,氧分子有两个转动自由度,所以氧气分子的平均转动动能为 $\overline{\varepsilon}_r = 2\overline{\varepsilon}_t = kT$。

(2) 所有氧气分子的总平动动能为

$$E_t = N_A \overline{\varepsilon}_t = N_A \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}RT$$

(3)温度升高 1 K 时,氧气的热力学能增量为

$$\Delta E_m = \frac{i}{2}R\Delta T = \frac{5}{2}\times 8.31\times 1\ \text{J} = 20.8\ \text{J}$$

例 2

储有氢气的容器以匀速 $v = 100$ m/s 运动,容器壁四周绝热。令该容器突然停止,问容器中氢气的温度上升多少(单位:K)?

解 由于容器壁绝热,氧气与外界无热量交换。当容器突然停止时,通过分子与分子之间、分子与器壁之间的碰撞,定向运动动能转化为热运动能量,即转化为热力学能,从而使气体温度升高。根据能量守恒定律,有 $\frac{1}{2}m_{气}v^2 = \frac{m_{气}}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$,由此可解出温度增量为

$$\Delta T = \frac{\mu v^2}{iR} = \frac{2\times 10^{-3}\times 100^2}{5\times 8.31}\ \text{K} = 0.481\ \text{K}$$

10-4 麦克斯韦速率分布律

NOTE

在 10-1 小节,我们利用简单的统计假设获得了理想气体速率平方的平均值。但这只是很粗略的统计结论,我们并不了解气体速率更具体的分布。下面我们介绍普适的速率分布函数以及适合理想气体的麦克斯韦速率分布律,对气体速率作出更精确的描述,通过速率分布函数我们可以获得和速率相关的任何物理量的统计平均值。

1. 速率分布函数和速率分布律

气体中每个分子的热运动速率是千变万化的,分子之间的频繁碰撞使得分子速率不断发生变化,因此在某一特定时刻,某个分子具有多大速率完全是偶然的。但是,对大量分子整体而言,在一定条件下,分子数按速率的分布服从确定的统计规律。

NOTE

分子数按速率分布是把整个速率区间 0～∞ 分成许多间隔相同的速率小区间 $v\sim v+\mathrm{d}v$，指出各速率小区间内的分子数 $\mathrm{d}N$ 占总分子数 N 的比例。

$\mathrm{d}N/N$ 与速率区间的大小 $\mathrm{d}v$ 有关。当 $\mathrm{d}v$ 足够小时，可认为 $\mathrm{d}N/N$ 与 $\mathrm{d}v$ 成正比；$\mathrm{d}N/N$ 在不同的速率区间有不同的值，因此它与速率 v 的某一函数 $f(v)$ 成正比，故可写作

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=f(v)\,\mathrm{d}v \tag{10-10}$$

上式表明，$f(v)\,\mathrm{d}v$ 表示速率在 $v\sim v+\mathrm{d}v$ 区间内的分子数占总分子数的比率，称为速率分布律；而函数

$$f(v)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v} \tag{10-11}$$

表示速率在 v 附近单位速率区间内的分子数占总分子数的比例，称为速率分布函数。对气体中的某个分子而言，它表示该分子的速率在 v 附近单位速率区间内的概率。

应该指出，速率区间的大小 $\mathrm{d}v$ 是一个宏观上足够小而微观上足够大的量，这样的量称为物理无限小量。为了使速率分布函数 $f(v)$ 精确地反映分子数按速率分布的情况，$\mathrm{d}v$ 应该是宏观上足够小的量；同时由于分子之间的频繁碰撞，不断地有许多分子的速率由区间 $v\sim v+\mathrm{d}v$ 外进入该区间内，也有许多分子的速率由该区间内变为区间外，因此速率在 $v\sim v+\mathrm{d}v$ 区间内的分子数 $\mathrm{d}N$ 是一个统计平均值，只有当 $\mathrm{d}N$ 足够大时才可能有稳定的值，所以 $\mathrm{d}v$ 应该是微观上足够大的量。由此可见，$\mathrm{d}v$ 不能为零，因此说速率为某一确定值的分子数有多少是没有意义的。分子数按速率分布规律给出的是速率区间内的分子数。

由(10-10)式得 $\mathrm{d}N=Nf(v)\,\mathrm{d}v$，因此 $Nf(v)\,\mathrm{d}v$ 表示速率在 $v\sim v+\mathrm{d}v$ 区间内的分子数。上式积分得 $\Delta N=N\int_{v_1}^{v_2}f(v)\,\mathrm{d}v$，$\dfrac{\Delta N}{N}=\int_{v_1}^{v_2}f(v)\,\mathrm{d}v$，所以 $N\int_{v_1}^{v_2}f(v)\,\mathrm{d}v$ 表示速率在 $v_1\sim v_2$ 区间内的分子数；$\int_{v_1}^{v_2}f(v)\,\mathrm{d}v$ 表示速率在 $v_1\sim v_2$ 区间内分子数占总分子数的比例。由于速率在整个速率区间内的分子数为 N，故有 $N=N\int_0^{\infty}f(v)\,\mathrm{d}v$，即

$$\int_0^{\infty}f(v)\,\mathrm{d}v=1 \tag{10-12}$$

称为速率分布函数的归一化条件。它表示速率在整个速率区间内的分子数占总分子数的比例为 100%。或者说，它表示某个分

子的速率在整个速率区间内的概率为100%。

NOTE

2. 麦克斯韦速率分布律和速率分布函数

1895年，麦克斯韦（J.C.Maxwell）从理论上得出：在平衡态下，当气体分子间的相互作用可以忽略时，分布在任意速率区间 $v\sim v+\mathrm{d}v$ 内的分子数 $\mathrm{d}N$ 在总分子数中的占比为

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2\mathrm{d}v \tag{10-13}$$

上式称为麦克斯韦速率分布律（Maxwell's speed distribution law）。式中 m 是分子的质量，k 是玻耳兹曼常量，T 是气体的热力学温度。麦克斯韦速率分布函数为

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2 \tag{10-14}$$

3. 麦克斯韦速率分布曲线

根据麦克斯韦速率分布函数作出的 $f(v)-v$ 曲线，称为麦克斯韦速率分布曲线，如图10-4所示。速率分布曲线形象地表示出气体分子数按速率分布的情况。从（10-14）式中可以看到，麦克斯韦速率分布函数是速率的连续函数。当 $v=0$ 和 $v=\infty$ 时，速率分布函数为零，因此速率分布函数一定有最大值。与速率分布函数 $f(v)$ 的极大值对应的速率称为最概然速率（most probable speed），用 v_p 表示。它的物理意义是：在平衡态下，气体分子速率在 v_p 附近单位速率区间内的分子数占总分子数的比例具有最大值。或者说，分子速率取 v_p 附近的值的概率最大。由于麦克斯韦速率分布函数是可微的，故由函数求极值条件 $\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v}=0$ 求得最概然速率为

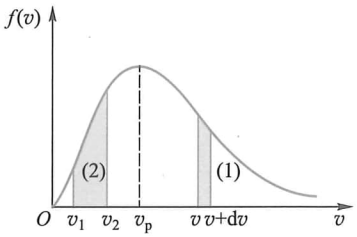
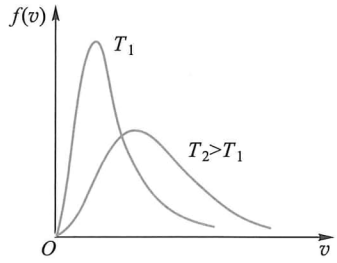


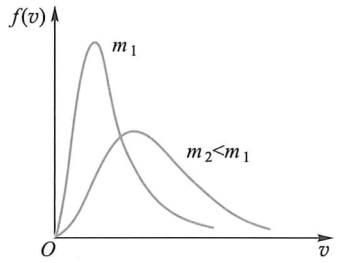
图10-4 麦克斯韦速率分布曲线

$$v_\mathrm{p}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}\approx 1.41\sqrt{\frac{RT}{\mu}} \tag{10-15}$$

如图10-4所示，速率分布曲线下的面积在数值上等于速率在相应区间内的分子数占总分子数的比例：（1）中的阴影面积 $f(v)\mathrm{d}v$ 在数值上等于速率在 $v\sim v+\mathrm{d}v$ 区间的分子数占总分子数的



(a) m一定



(b) T一定

图 10-5 麦克斯韦速率分曲线随 T 或 m 的变化关系

比例;(2)中的阴影面积 $\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,\mathrm{d}v$ 在数值上等于速率在 $v_1 \sim v_2$ 区间内的分子数占总分子数的比例;根据归一化条件,整条速率曲线下的总面积 $\int_0^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v$ 应等于 1。

(10-15)式表明,对某种气体(m 一定),当温度升高时,v_p 变大,速率分布曲线的极大值向右移,这时气体中速率较大的分子数增多,速率较小的分子数减少。因为速率分布曲线下的总面积保持一定,所以速率分布曲线向右移后,曲线变得比较平坦。据此,某种气体在两种不同温度下的两条麦克斯韦速率分布曲线如图 10-5(a)所示,其中 $T_2>T_1$。从(10-15)式还可看出,对不同气体,当温度相等时,分子质量越小,v_p 越大,速率分布曲线的极大值越靠右。相同温度的两种不同气体的麦克斯韦速率分布曲线如图 10-5(b)所示,其中 $m_2<m_1$。

4. 用速率分布律求平均速率

NOTE

设气体中有 N 个分子,其中具有速率为 v_1 的分子有 ΔN_1 个,速率为 v_2 的分子有 ΔN_2 个……速率为 v_n 的分子有 ΔN_n 个,则分子总数为 $N=\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i$。气体中所有分子的平均速率(average speed)定义为

$$\bar{v}=\frac{v_1\Delta N_1+v_2\Delta N_2+\cdots+v_n\Delta N_n}{\Delta N_1+\Delta N_2+\cdots+\Delta N_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i\Delta N_i}{\sum_{i=1}^{n}\Delta N_i} \tag{10-16}$$

由于气体分子的速率 v 是连续取值的,若 $f(v)$ 是可积函数,则上式中求和可以换作积分,即

$$\bar{v}=\frac{\int v\mathrm{d}N}{\int \mathrm{d}N}=\frac{\int_0^{\infty} vNf(v)\,\mathrm{d}v}{\int_0^{\infty} Nf(v)\,\mathrm{d}v}=\frac{\int_0^{\infty} vf(v)\,\mathrm{d}v}{\int_0^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v}=\int_0^{\infty} vf(v)\,\mathrm{d}v \tag{10-17}$$

速率在 $v_1 \sim v_2$ 区间内的分子的平均速率公式为

$$\bar{v}_{12}=\frac{\int_{v_1}^{v_2} vf(v)\,\mathrm{d}v}{\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,\mathrm{d}v}$$

根据(10-17)式和麦克斯韦速率分布律可以计算出平衡态

的气体中所有分子的平均速率。由于计算繁复，这里仅给出结果：

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\approx 1.60\sqrt{\frac{RT}{\mu}} \tag{10-18}$$

至此，我们讨论了平衡态下理想气体分子的三种统计速率，它们是方均根速率$\sqrt{\overline{v^2}}$、最概然速率v_p和平均速率$\bar{v}$，它们的相对大小为

$$\sqrt{\overline{v^2}}:\bar{v}:v_p=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}:\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}:\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}\approx 1.73:1.60:1.41$$

其中$\sqrt{\overline{v^2}}$最大，v_p最小。三种速率各有其用处，如在讨论速率分布时要用到v_p；在计算分子平动动能时要用到$\sqrt{\overline{v^2}}$；在计算分子平均自由程时将用到$\bar{v}$。在室温下，它们的数量级一般为几百米每秒。

5. 麦克斯韦速率分布律的实验验证

由于真空技术和测量技术的限制，测定气体分子速率分布的实验，直到20世纪20年代才实现。1920年施特恩（O. Stern）首先测定了银分子的速率。

我国物理学家葛正权对施特恩所用的方法作了改进，于1934年测定了铋蒸气分子的速率分布。葛正权实验装置如图10-6所示，整个装置放在抽成高真空的容器中。图中O是产生铋蒸气分子的蒸气源，实验时把固体金属铋放在容器中，均匀地加热器壁使金属蒸发。铋分子从狭缝S_1射出，再经狭缝S_2和S_3后成为一束很窄的分子束，投射在圆筒R内的弯曲玻璃板G上。如果圆筒R不动，分子束将沿直线射向G，沉积在P处。当R以一定的角速度ω转动时，分子将不再沉积在P处，而且不同速率的分子将沉积在不同的地方。速率为v的分子从狭缝S_3进入圆筒，经过Δt时间穿越直径D到达玻璃板G上P'处，在这段时间内，R所转过的角度为$\Delta\theta=\omega\cdot\Delta t=\omega\cdot\dfrac{D}{v}$，所以弧$PP'$的长度为

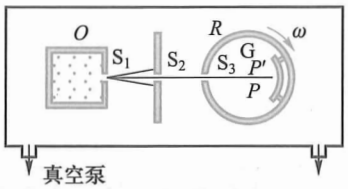


图10-6 葛正权速率分布实验装置图

$$s=\frac{D}{2}\cdot\Delta\theta=\frac{D}{2}\cdot\omega\frac{D}{v}=\frac{D^2\omega}{2v}$$

得到速率v和弧长s的关系式为

$$v=\frac{\omega D^2}{2s}$$

NOTE

式中 ω、D 一定，v 与 s 一一对应。实验时令 R 以角速度 ω 转动较长时间，取下玻璃板 G，用光度计测量 G 上各处沉积的铋层厚度，就可以确定铋分子数按速率分布的规律，实验结果与麦克斯韦速率分布律符合。

6. 涨落现象

速率区间 $v_1 \sim v_2$ 内的分子数 $\Delta N = \int_{v_1}^{v_2} Nf(v)\,\mathrm{d}v$ 是在该速率区间内的平均分子数。实际上该速率区间内的分子数绝不是任何时刻都等于平均分子数，有时可能比它大些，有时可能比它小些，这种围绕统计平均值作无规则的微小变动的现象称为涨落。

用概率论可以证明，ΔN 的涨落幅度，即涨落的最大限度为 $\pm\sqrt{\Delta N}$，相对涨落为 $\sqrt{\Delta N}/N = 1/\sqrt{\Delta N}$。例如，若 $\Delta N = 10^6$，则涨落幅度为 10^3，相对涨落为 10^{-3}；若 $\Delta N = 10^2$，则涨落幅度为 10，相对涨落为 0.1。由此可见，分子数越多，涨落幅度越大，相对涨落越小。只有当分子数很大时，统计平均值才有意义。

涨落理论是统计物理学的一个组成部分，许多自然现象要用涨落理论来解释。涨落现象有两种：一种是围绕平均值的涨落；另一种是布朗运动，这是由于气体或液体中分子的杂乱热运动，使悬浮在其中的微小颗粒或仪器上的活动部件受到分子碰撞而发生的不规则运动。耗散结构理论指出，生命过程、激光、一个城市等耗散结构是通过涨落形成的。

例 3

求气体分子热运动速率在 v_p 到 $v_p + v_p/100$ 之间的分子数占总分子数的比例。

解 该比例为 $\dfrac{\Delta N}{N} = \int_{v_p}^{v_p + v_p/100} f(v)\,\mathrm{d}v$，由于速率区间较小，可近似认为在该速率区间内的速率分布函数为常量，等于 $f(v_p)$，则

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_p}^{v_p + \frac{v_p}{100}} f(v)\,\mathrm{d}v \approx f(v_p)\left[\left(v_p + \frac{v_p}{100}\right) - v_p\right] = f(v_p)\cdot\frac{v_p}{100}$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{mv_p^2}{2kT}} v_p^2 \frac{v_p}{100}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{v_p^3}\mathrm{e}^{-1}\frac{v_p^3}{100} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-1}\frac{1}{100}$$

$$= 0.83\%$$

例 4

已知 N 个粒子的速率分布律为

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\begin{cases}Av^2\mathrm{d}v, & v\leqslant v_\mathrm{F}\\ 0, & v>v_\mathrm{F}\end{cases}$$

(1) 用 v_F 表示常量 A;

(2) 作出速率分布曲线;

(3) 求粒子的平均速率。

解 (1) 根据速率分布函数的归一化条件,有 $\int_0^{v_\mathrm{F}}Av^2\mathrm{d}v=1$,解出 $\frac{1}{3}Av_\mathrm{F}^3=1$,得

$$A=\frac{3}{v_\mathrm{F}^3}$$

(2) 根据题意,速率分布函数为

$$f(v)=\begin{cases}\dfrac{3}{v_\mathrm{F}^3}v^2, & v\leqslant v_\mathrm{F}\\ 0, & v>v_\mathrm{F}\end{cases}$$

速率分布曲线 $f(v)$-v 如图 10-7 所示。

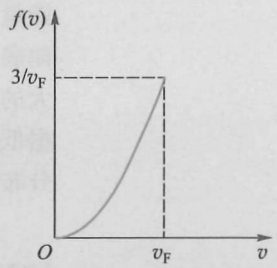


图 10-7 速率分布曲线

(3) 根据平均速率的定义,得

$$\bar{v}=\int_0^{v_\mathrm{F}}vf(v)\mathrm{d}v=\int_0^{v_\mathrm{F}}\frac{3}{v_\mathrm{F}^3}v^3\mathrm{d}v=\frac{3}{4}v_\mathrm{F}=0.75v_\mathrm{F}$$

10-5 玻耳兹曼分布律

NOTE

玻耳兹曼分布律是粒子数按能量分布的规律,它是经典统计物理学中的一条普遍规律,适用于保守力场中任何相互作用可忽略的大量同类粒子的集合。

麦克斯韦速率分布律是气体分子处于无外力场中的平衡状态,且气体分子间的相互作用可以忽略时,气体分子数按速率分布的规律,因而位置对气体分子的速率分布几乎没有影响。当气体分子处在保守外力场中时,分子的能量包括动能和势能。分子的运动状态由位置矢量和速度矢量描述,动能由速度决定,势能由位置决定。因此,分子数按能量分布的规律描述的是在速度区间和位置区间内的分子数。

玻耳兹曼(L.Boltzmann)从理论上导出:在保守力场中,系统

NOTE

处在平衡态，当分子间的相互作用可以忽略时，分布在速度区间 $v_x \sim v_x+\mathrm{d}v_x$，$v_y \sim v_y+\mathrm{d}v_y$，$v_z \sim v_z+\mathrm{d}v_z$ 和位置区间 $x \sim x+\mathrm{d}x$，$y \sim y+\mathrm{d}y$，$z \sim z+\mathrm{d}z$ 内的分子数为

$$\mathrm{d}N=n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{10-19}$$

称为玻耳兹曼分布律。式中 $\varepsilon=\varepsilon_k+u$ 是分子的能量，ε_k 是分子动能，u 是分子在保守外力场中的势能；n_0 是势能 $u=0$ 处的分子数密度。

在同一状态区间 $\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 内的分子具有近似相等的能量 ε，不同状态内的分子一般具有不同的能量。玻耳兹曼分布律表明，当各状态区间相等时，分子数 $\mathrm{d}N$ 与 $\mathrm{e}^{-\varepsilon/kT}$ 成正比，能量较大的分子数较少，能量较小的分子数较多，表明分子总是优先占据低能量状态。$\mathrm{e}^{-\varepsilon/kT}$ 称为玻耳兹曼因子，它是决定分子数按能量分布的重要因素。

玻耳兹曼分布律对所有可能速度积分，就得到在位置区间 $x \sim x+\mathrm{d}x$，$y \sim y+\mathrm{d}y$，$z \sim z+\mathrm{d}z$ 内的分子数 $\mathrm{d}N'$，即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}N' &= \left[n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\right]\mathrm{e}^{-\frac{u}{kT}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= C\mathrm{e}^{-\frac{u}{kT}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

C 代表方括号内的值，它与位置无关。所以势能为 u 的分子数密度为 $n=\dfrac{\mathrm{d}N'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=C\mathrm{e}^{-\frac{u}{kT}}$。因为 $u=0$ 处的分子数密度为 n_0，故由上式得 $n_0=C$，所以势能为 u 的分子数密度为

$$n=n_0\mathrm{e}^{-\frac{u}{kT}} \tag{10-20}$$

这是玻耳兹曼分布律的一种常用形式，是分子数按势能的分布律。

分子在重力场中的势能为 $u=mgh$，根据(10-20)式，高度为 h 处的分子数密度为

$$n=n_0\mathrm{e}^{-\frac{mgh}{kT}} \tag{10-21}$$

n_0 是 $h=0$ 处的分子数密度。上式是分子数在重力场中按高度分布的规律。它指出，在重力场中，理想气体的分子数密度随高度增加按指数减小。热运动促使气体分子在空间均匀分布，重力促使气体分子聚集在地面。达到动态平衡时，分子数按高度分布的规律由(10-21)式表述。温度越高，分子热运动越剧烈，n 随高度增加而减小得越缓慢；分子的质量越大，重力的作用越显著，n 随高度增加而减小得越迅速。

由(10-21)式和 $p=nkT$ 得 $p=(n_0\mathrm{e}^{-\frac{mgh}{kT}})kT$，当 $h=0$ 时，$p_0=$

n_0kT,所以

$$p=p_0e^{-\frac{mgh}{kT}}=p_0e^{-\frac{\mu gh}{RT}} \tag{10-22}$$

这是气体压强随高度变化的规律,称为等温气压公式。

例 5

已知氢原子的基态能量 $E_1=-13.6$ eV,第一激发态的能量 $E_2=-3.4$ eV。设温度 $T=1\ 000$ K,若处于能级 E_1 的氢原子数为 N_1,试用玻耳兹曼分布律计算处于能级 E_2 的氢原子数 N_2。

解 根据玻耳兹曼分布律,有

$$N_1\propto e^{-\frac{E_1}{kT}},\quad N_2\propto e^{-\frac{E_2}{kT}},\quad \frac{N_2}{N_1}=e^{-\frac{E_2-E_1}{kT}}$$

所以

$$\begin{aligned}N_2&=N_1e^{-\frac{E_2-E_1}{kT}}\\&=N_1\exp\left[-\frac{(-3.4+13.6)\times1.6\times10^{-19}}{1.38\times10^{-23}\times1\ 000}\right]\\&=N_1e^{-118}=5.7\times10^{-52}N_1\end{aligned}$$

10-6 气体分子的碰撞频率和平均自由程

NOTE

一个分子在单位时间内与其他分子相碰撞的平均次数称为碰撞频率(collision frequency),用 $\overline{Z}$ 表示。一个分子在与其他分子连续两次碰撞之间所走的路程,称为自由程,其统计平均值称为平均自由程(mean free path),用 $\overline{\lambda}$ 表示。

在 Δt 时间内,一个分子所走过的平均路程是 $\overline{v}\Delta t$,与其他分子的平均碰撞次数是 $\overline{Z}\Delta t$,所以平均自由程、碰撞频率和平均速率三者之间的关系为

$$\overline{\lambda}=\frac{\overline{v}\Delta t}{\overline{Z}\Delta t}=\frac{\overline{v}}{\overline{Z}} \tag{10-23}$$

用麦克斯韦速度分布律可求得平均碰撞频率为

$$\overline{Z}=\sqrt{2}\pi d^2\overline{v}n \tag{10-24}$$

代入(10-23)式,得平均自由程为

$$\overline{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2n} \tag{10-25}$$

上两式中,n 是分子数密度,d 是分子的有效直径。将 $n=\frac{p}{kT}$ 代入上式得

$$\bar{\lambda}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \tag{10-26}$$

上式表明，在一定温度下，平均自由程与压强成反比。但在低气压情况下，若按上式算出的 $\bar{\lambda}$ 大于容器的线度，则气体分子在容器内的实际平均自由程等于容器的线度，因为在这种条件下，气体分子主要与容器器壁碰撞，气体分子之间的碰撞已经很少了。

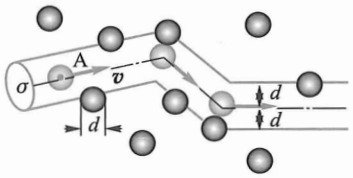


图 10-8 碰撞频率

下面对平均碰撞频率公式(10-24)式作简化说明。设气体分子为刚性小球，直径为 d，其中只有一个分子以平均速率 $\bar{v}$ 运动，其他分子都静止。如图 10-8 所示，分子 A 以速率 $\bar{v}$ 运动，它每碰撞一次就改变一次运动方向，因此 A 分子中心的轨迹是一条折线。以分子 A 中心的运动轨迹为轴线，以分子有效直径 d 为半径作一曲折的圆柱体，该圆柱体的横截面积 $\sigma=\pi d^2$，称为分子的碰撞截面。凡是中心在此圆柱体内的其他分子都将与 A 碰撞。在 Δt 时间内，分子 A 走过的路程为 $\bar{v}\Delta t$，相应的圆柱体的体积为 $\pi d^2\bar{v}\Delta t$，此圆柱体内的分子数为 $n\pi d^2\bar{v}\Delta t$，因此碰撞频率为 $\bar{Z}=\dfrac{n\pi d^2\bar{v}\Delta t}{\Delta t}=n\pi d^2\bar{v}$。实际上，其他分子也在运动，因此分子 A 与其他分子碰撞的平均次数增多。计算表明，上式应乘以修正系数 $\sqrt{2}$，即碰撞频率为 $\bar{Z}=\sqrt{2}n\pi d^2\bar{v}$。

10-7 气体的输运现象

NOTE

当系统各部分的物理性质如流速、温度或密度不均匀时，系统处于非平衡态。系统将自发地向物理性质均匀的平衡态过渡，这种现象称为输运现象。输运现象涉及黏性、热传导和扩散等现象，往往同时出现，情况复杂。为清晰起见，把三种现象分开来讨论。气体、液体、固体中都存在输运现象，本节讨论气体内的输运现象。

1. 黏性现象

气体内各部分流动速度不同时，发生黏性现象。相邻的气体层之间由于速度不同而引起的相互作用力称为黏性力。为了说

明黏性现象的宏观规律，设气体处于两大平板之间，如图 10-9 所示，下面的板 A 静止，上面的板 B 沿 x 方向以速度 $\boldsymbol{u}_0$ 匀速运动，因而两板间气体被带着沿 x 轴方向流动，但平行于板的各层气体的速度不同，它们的流速 u 是 z 的函数。各层流速随 z 的变化情况可以用流速梯度 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$ 表示，这是描述流速不均匀情况的物理量。设想在 $z=z_0$ 处有一分界平面，面积为 $\mathrm{d}S$，则下面流速小的气体层将对上面流速大的气体层产生向后的黏性力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$，上面气体层将对下面气体层产生向前的黏性力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}'$，$\mathrm{d}\boldsymbol{F}'=-\mathrm{d}\boldsymbol{F}$。实验指出，相邻气体层通过 $\mathrm{d}S$ 面相互作用的黏性力的大小 $\mathrm{d}F$ 与该处的流速梯度及面积 $\mathrm{d}S$ 成正比，可写作

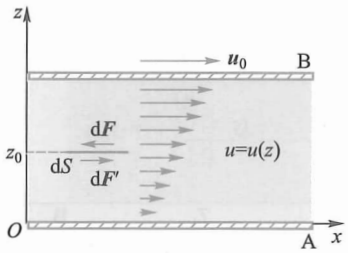


图 10-9 气体的黏性现象

NOTE

$$\mathrm{d}F=\eta\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)_{z_0}\mathrm{d}S \tag{10-27}$$

式中比例系数 η 称为气体的动力黏度，简称黏度，它的数值与气体的性质和状态有关。黏度的国际单位是帕[斯卡]·秒(Pa·s)。

气体的黏性现象和分子热运动有直接的关系。从微观上看，气体的宏观流动是分子在无规则热运动的基础上具有定向运动的表现。如图 10-9 中 $\mathrm{d}S$ 下面的气体分子的定向速度小于上面的气体分子，由于无规则热运动，下面的分子会带着自己较小的定向动量越过 $\mathrm{d}S$ 跑到上面，经过碰撞把它的动量传给上面的分子。同时，上面的分子会带着自己较大的定向动量越过 $\mathrm{d}S$ 跑到下面，经过碰撞把它的动量传给下面的分子。这样交换的结果是，将有净的定向动量由上向下输运，使下面气体分子的定向动量增大，宏观上表现为下面的气体受到向前的作用力；同时上面气体分子的定向动量减小，宏观上表现为上面的气体受到向后的作用力。因此，气体的黏性现象在微观上是分子在热运动中输运定向动量的过程。根据气体动理论可以导出，气体的黏度与分子运动的微观量的统计平均值有下述关系：

$$\eta=\frac{1}{3}nm\bar{v}\bar{\lambda} \tag{10-28}$$

式中，n 为气体的分子数密度，m 为分子的质量，$\bar{v}$ 为平均速率，$\bar{\lambda}$ 为平均自由程。

2. 热传导现象

气体内各部分温度不均匀时，将有热力学能从温度较高处传递到温度较低处，这种现象称为热传导现象，在这种过程中所传递的热力学能称为热量(heat)。为了说明热传导现象的宏观规

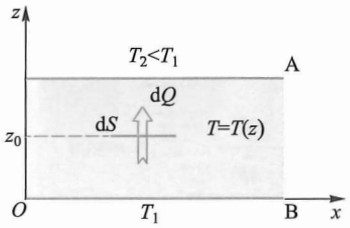


图 10-10 热传导现象

律，设两平板 A 和 B 之间充以某种气体，其温度由下而上逐渐降低，故温度 T 是 z 的函数，如图 10-10 所示。温度随 z 的变化情况可以用温度梯度 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$ 表示，这是描述温度不均匀情况的物理量。设想在 $z=z_0$ 处有一分界平面，面积为 $\mathrm{d}S$，实验指出，在 $\mathrm{d}t$ 时间内通过 $\mathrm{d}S$ 沿 z 轴方向传递的热量为

$$\mathrm{d}Q=-\kappa\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right)_{z_0}\mathrm{d}S\mathrm{d}t \tag{10-29}$$

式中 κ 为热导率。它的数值与气体的种类和状态有关，其国际单位是瓦[特]每米开[尔文][W/(m·K)]。热导率 κ 总取正值，(10-29)式中的负号表示热量总是从温度高的区域向温度低的区域传递。

温度不均匀表明气体内各部分的分子平均热运动能量不同。气体分子在热运动中不断地由上而下和由下而上穿过 $\mathrm{d}S$ 面，$\mathrm{d}S$ 上、下方分子交换热运动能量的结果将有净能量自下向上输运，这就在宏观上表现为热传导现象。因此，气体内的热传导现象在微观上是分子在热运动中输运热运动能量的结果。根据气体动理论可以导出，气体的热导率与分子运动的微观量的统计平均值有下述关系

$$\kappa=\frac{1}{3}n\bar{m}\bar{v}\bar{\lambda}C_V \tag{10-30}$$

式中 C_V 为气体的定容比热容(见 11-2 节)。

3. 扩散现象

如果气体在各处的密度不均匀，密度大处的气体将向密度小处散布，使气体密度趋向均匀，这种现象被称为扩散现象。为了说明扩散现象的宏观规律，考虑最简单的单纯扩散现象，即在扩散现象中既无宏观的气体流动，也无热传导现象的情况。为此，取分子质量相同的两种气体的混合气体，使混合气体的压强和温度处处相等。例如 N_2 和 CO。如图 10-11 所示，一种气体(用小圆圈表示)的密度沿 z 轴方向减小，密度 ρ 是 z 的函数，其不均匀的程度用密度梯度 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}z$ 表示。设想在 $z=z_0$ 处有一分界平面 $\mathrm{d}S$，实验指出，在 $\mathrm{d}t$ 时间内通过 $\mathrm{d}S$ 传递的这种气体的质量为

$$\mathrm{d}m=-D\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}\right)_{z_0}\mathrm{d}S\mathrm{d}t \tag{10-31}$$

式中 D 称为扩散系数，它的数值与物质的性质有关，其国际单位是平方米每秒(m^2/s)。D 总取正值，(10-31)式中的负号说明扩散总是沿 ρ 减小的方向进行。

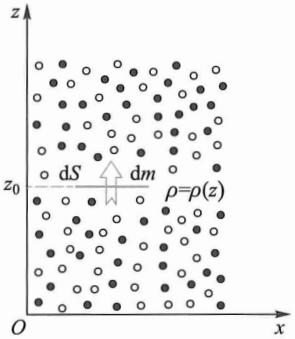


图 10-11 扩散现象

从微观上来说，气体中的扩散现象也和气体分子热运动有直接关系。上述气体在 dS 下面密度大，即单位体积内分子数多；dS 上面密度小，即单位体积内分子数少。由于热运动，在 dt 时间内由下向上穿过 dS 面的分子数比由上向下穿过 dS 面的分子数多，因此有净质量由下向上输运，这在宏观上表现为扩散现象。所以，气体内的扩散现象在微观上是分子热运动中输运质量的过程。由气体动理论可以导出，上述单纯情况下气体的扩散系数与分子运动的微观量的统计平均值有下述关系：

$$D=\frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda} \tag{10-32}$$

综上所述，当气体处于非平衡态时，气体内部存在某种不均匀性，输运现象的方向是消除这种不均匀性，使系统由非平衡态向平衡态过渡。从微观上看，输运现象是靠分子的热运动和分子之间的碰撞来实现的，三种输运系数 η、κ、D 都与热运动的平均速率 $\bar{v}$ 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的乘积成正比，其原因是单位时间内通过接触面交换分子的数量正比于分子的平均速率，而能够通过接触面的分子都在离接触面一个自由程的范围内。

NOTE

10-8 范德瓦耳斯方程

许多实际气体，如氢、氧、氮等在通常的温度和压强下近似地遵从理想气体状态方程，压强越低，近似程度越高。在压强趋于零的极限情况下，一切气体都严格遵从理想气体状态方程；但当压强很高时，实际气体的行为与理想气体状态方程偏离很大。

下面介绍一种形式简单、物理概念清晰的常用的实际气体状态方程，称为范德瓦耳斯方程。在采用理想气体的微观模型时，除碰撞瞬间外忽略了分子间的相互作用力，忽略了分子本身体积对气体体积的影响。范德瓦耳斯(J.D.van der Waals)考虑了分子引力和分子体积的影响，修正了理想气体状态方程，建立了一个更接近实际气体性质的状态方程。

1. 分子体积引起的修正

考虑 1 mol 分子气体。将其按理想气体处理，其状态方程为

$$pV_m=RT \tag{10-33}$$

式中 V_m 是气体的摩尔体积，即 1 mol 分子气体所能达到的空间。按照理想气体的微观模型，它就是容器的容积。考虑到分子本身的体积，1 mol 分子气体所能达到的空间比容器的容积小，应修正为 V_m-b，其中 b 是气体分子本身体积的修正项，其值可由实验测定。于是(10-33)式应修正为

$$p(V_m-b)=RT \tag{10-34}$$

2. 分子引力引起的修正

分子引力是短程力，其有效作用距离为 s，以一个分子的中心为球心，以 s 为半径画一个球，则凡是中心位于该球内的其他分子都对该分子有引力的作用。观察处于气体内部的某一分子 A，如图 10-12 所示。由于平衡态时其他气体分子对 A 呈对称分布，故它们对 A 的引力相互抵消，所以气体内部的分子可视为不受分子引力的作用。但是，对于处于器壁附近厚度为 s 的表面层内的分子，如图 10-12 中的 B 分子，由于对 B 有引力作用的其他气体分子分布不对称，平均来说 B 分子受到一个指向气体内部的合力。气体分子在与器壁碰撞时，必通过该区域，于是这个指向气体内部的合力将减小分子撞击器壁的动量，从而减小它们对器壁作用的冲量。这层气体分子受到的指向气体内部的力所产生的总效果相当于一个指向内部的压强，称为内压强，记作 p_i。于是，(10-34)式中的压强应修正为

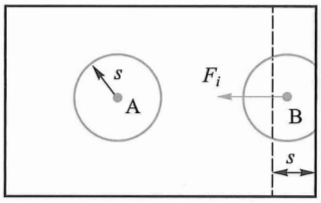


图 10-12 气体内压强的产生

NOTE

$$p=\frac{RT}{V_m-b}-p_i \tag{10-35}$$

由于 p_i 等于表面层内分子受气体内部分子的单位面积的作用力，该力一方面与被吸引的表面层内的分子数密度 n 成正比，另一方面与施加力的那些内部分子的数密度 n 成正比，所以 p_i 与 n^2 成正比，又由于 n 与气体体积 V_m 成反比，所以有

$$p_i=\frac{a}{V_m^2} \tag{10-36}$$

式中 a 是反映分子间引力的一个常量，其值可由实验测定。将(10-36)式代入(10-35)式，得 1 mol 实际气体的范德瓦耳斯方程为

$$\left(p+\frac{a}{V_m^2}\right)(V_m-b)=RT \tag{10-37}$$

对于质量为 $m_{气}$ 的气体，其体积为 $V=\frac{m_{气}}{\mu}V_m$，将 $V_m=\frac{\mu}{m_{气}}V$ 代入

(10-37)式,得质量为 $m_{气}$ 的气体的范德瓦耳斯方程为

$$\left(p+\frac{m_{气}^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m_{气}}{\mu}b\right)=\frac{m_{气}}{\mu}RT \qquad (10-38)$$

实验发现,范德瓦耳斯修正量 a 和 b 不仅与气体种类有关,而且与温度和压强有关。

10-9 电路中的热噪声

NOTE

根据产生机理的不同,电路中的噪声大致可以分为五大类:热噪声(thermal noise)、散粒噪声(shot noise)、闪烁噪声(flicker noise)、等离子体噪声(plasma noise)、量子噪声(quantum noise)。

在导体中,电子的无规则热运动叠加在电子的有规则运动上,从而引起电流偏离平均值而涨落,称为热噪声。这个现象是约翰孙(Johnson)于 1928 年发现的,热噪声也称为约翰孙噪声。在晶体管及电子线路的应用中,热噪声有可能对正常的信号传输和处理产生干扰,有时甚至会对电路的正常工作产生不良的反应。电子管阴极发射电子数的涨落现象是肖特基(Schottky)于 1918 年发现的,称为散粒效应或称肖特基效应,这是高放大倍数信号处理电路中背景噪声的一个重要来源。

电阻、电感、电容、半导体器件等电子元器件,都存在着金属导线或金属电极,即使没有电源,其中也存在大量作随机热运动的自由电子(电子气)。因为电子的热运动,在元器件的每一个局部区域中,自由电子数密度和合动量必然存在涨落,进而影响回路中的电流。例如,导体中某一局部区域中的自由电子数密度升高(或降低),则在该区域中聚集的负电荷将升高(或降低),该区域中附加的负电荷将产生附加的电场和电势。在电路中这种随机起伏的电场和电势就会导致随机起伏的电流。不难想象,约翰孙噪声来源于自由电子的随机热运动,因而也可称为热噪声。电子线路设计时,需要定量估计电路中的热噪声。

将电感、电容和电阻组成的宏观电磁振子与宏观机械振子作类比。宏观机械振子的能量由振子的动能和弹簧的弹性势能所组成;电磁振子的能量,由电感储存的磁能和电容储存的电能所组成。若把自由电子作随机运动产生宏观电流的作用机理,比拟为气体分子对宏观机械振子的碰撞,则电路中由电子热运动产生的磁能和电能的统计平均值皆应等于 $kT/2$,即

$$\frac{1}{2}L\overline{I^2}=\frac{1}{2}\frac{\overline{q^2}}{C}=\frac{1}{2}kT$$

其中 q 是电容上存储的噪声电荷量，I 是电路中的噪声电流。这表明电路中的电能与磁能之和的统计平均值应为 kT。这个结果与实验结果符合得很好。

通过电子运动的涨落，可把随机热运动的能量转化为电路中的磁能和电能。反之，电路中的噪声电流通过电阻，将损耗磁能和电能，使它们转化为热能。当两种能量的转化过程达到平衡时，系统也就达到热平衡状态。因此，热噪声是电路受电子热运动的涨落冲击而产生的电磁振动。

由于电路中储存的电磁能统计平均值等于 kT，若噪声电流为 I，则电阻上耗损的噪声功率（统计平均值）为 $\overline{I^2}R$。设电路振动的固有频率为 f_0，则一个周期内电阻中耗损的噪声能量为 $\overline{I^2}Rf_0^{-1}$。按照 LC 电路（图 10-13）中品质因素 Q 值的定义，可得

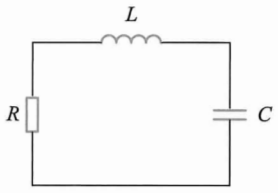


图 10-13

$$Q=2\pi\frac{kT}{\overline{I^2}Rf_0^{-1}}=\frac{f_0}{\Delta f}$$

其中 Δf 是电路的通频带，于是

$$\overline{I^2}R=2\pi kT\Delta f$$

由于电路中的噪声电流（电压）都是随机变量，可视为具有随机振幅和随机初相的振动，不是通常意义的简谐振动电流（电压）。基于傅里叶分析的频谱分析表明，任何电流（或电压）总可以分解为若干（有限或无限）简谐电流（或电压）之和。如上式所述，电路中热噪声电流的方均值与电路的通频带宽度 Δf 成正比，这表明热噪声的频谱宽度是均匀的。设噪声电流的频谱密度为 $i(f)$，则在 Δf 带宽内电阻上耗损的噪声功率为

$$\overline{I^2}R=\frac{1}{2}\overline{i^2}(f)R\Delta f$$

可得

$$\overline{i^2}(f)R=4\pi kT$$

设 $u(f)$ 为电阻上噪声电压的频谱密度，显然

$$u(f)=i(f)R$$

故

$$\overline{u^2}(f)=4\pi RkT$$

该结果与实验观测结果符合得很好。上式由奈奎斯特（Nyquist）首先导出，在电子线路的分析与设计中得到了广泛的应用。

本章摘要

NOTE

1. 热力学系统的平衡态

在不受外界影响下，系统的宏观性质不随时间改变的状态。

2. 理想气体状态方程

$$pV=\frac{m_{气}}{\mu}RT=\nu RT,\quad p=nkT$$

3. 理想气体压强公式

$$p=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}=\frac{2}{3}n\overline{\varepsilon}_t$$

4. 理想气体温度公式

$$\overline{\varepsilon}_t=\frac{3}{2}kT$$

5. 能量均分定理

理想气体分子每个平动和转动自由度的平均能量：$\overline{\varepsilon}_1=\frac{1}{2}kT$

理想气体分子的平均能量：$\overline{\varepsilon}=\frac{i}{2}kT$

理想气体的内能：$E=\frac{m_{气}}{\mu}\frac{i}{2}RT$

6. 麦克斯韦速率分布律

速率分布函数：$f(v)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}$，归一化条件：$\int_0^\infty f(v)\,\mathrm{d}v=1$

麦克斯韦速率分布律：$\frac{\mathrm{d}N}{N}=f(v)\,\mathrm{d}v=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2\mathrm{d}v$

气体分子的三种统计速率：$v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$，$\overline{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$，$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$

7. 玻耳兹曼分布律

$$\mathrm{d}N=n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad n=n_0\mathrm{e}^{-\frac{u}{kT}}$$

重力场中气体分子数密度按高度分布：$n=n_0\mathrm{e}^{-\frac{mgh}{kT}}$

等温气压公式：$p=p_0\mathrm{e}^{-\frac{mgh}{kT}}=p_0\mathrm{e}^{-\frac{\mu gh}{RT}}$

NOTE

8. 气体分子碰撞频率和平均自由程

$$\overline{Z}=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}n,\quad \overline{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

9. 气体的输运现象

黏滞现象:输运分子定向动量。

热传导现象:输运分子热运动能量。

扩散现象:输运分子质量。

10. 范德瓦耳斯方程

$$\left(p+\frac{m_{气}^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m_{气}}{\mu}b\right)=\frac{m_{气}}{\mu}RT$$

思考题

10-1 何为气体的平衡状态？当气体处于平衡状态时，是否组成气体的分子都已静止不动？气体的平衡状态与力学中的平衡状态有何不同？

10-2 物理量的统计平均值是如何定义的？统计规律与牛顿力学规律有什么不同？统计规律起作用的前提条件是什么？

10-3 一定量的理想气体，若温度 T 不变，则压强 p 随体积 V 的减少而增大；若体积不变，则压强 p 随温度 T 的升高而增大。从宏观上看，同样是使压强 p 增大，那么从微观上看，有什么区别？

10-4 试用气体动理论说明，一定体积的氢气和氧气的混合气体的总压强等于氢气和氧气单独存在于该体积内时所产生的压强之和。

10-5 试指出下列各式的物理意义：

(1) $\frac{1}{2}kT$；　(2) $\frac{i}{2}kT$；

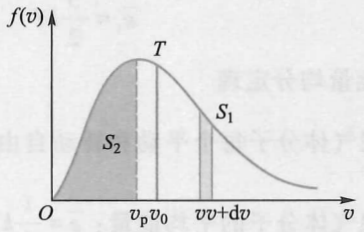
(3) $\frac{i}{2}RT$；　(4) $\frac{m_{气}}{\mu}\frac{i}{2}RT$。

10-6 如图所示为某一温度下气体分子速率的分布曲线，下列各项的物理意义是什么？

(1) v_p；

(2) 图中小矩形(阴影)的面积 S_1；

(3) 图中曲线和直线 v_p 间(阴影)的面积 S_2；



思考题 10-6 图

(4) 过 v_0 作与 v 轴垂直的直线，正好使左右两边面积相等，则 v_0 的意义是什么？

10-7 速率分布函数 $f(v)$ 的物理意义是什么？试说明下列各式的物理意义：

(1) $f(v)\mathrm{d}v$；　(2) $Nf(v)\mathrm{d}v$；

(3) $\int_{v_1}^{v_2}vf(v)\mathrm{d}v$；　(4) $\dfrac{\int_{v_1}^{v_2}vf(v)\mathrm{d}v}{\int_{v_1}^{v_2}f(v)\mathrm{d}v}$；

(5) $\int_0^{\infty}\frac{1}{v}f(v)\mathrm{d}v$。

10-8 从麦克斯韦速率分布函数可以求得三种特征速率 $\bar{v}$、v_p、$\sqrt{\overline{v^2}}$。这三种速率有何异同？它们各有什么用处？

10-9 常温下，气体分子的平均速率可达几百米每秒，为什么气味的传播比它慢得多？

10-10 三种输运过程的宏观规律和微观本质是什么？

10-11 试说明分子模型在分子运动中用于压强公式、热力学能公式、分子平均碰撞频率、范德瓦耳斯方程等问题的讨论时，有何不同？

习题

10-1 一个篮球在温度为0℃时打入空气，直到球内的压强达到 1.5×10^5 Pa。

(1) 在篮球比赛时，受到拍打后篮球的内部温度升高到30℃，问这时球内的压强多大？

(2) 在篮球比赛过程中，球被刺破一小孔而漏气，问当球赛结束后，篮球的温度又恢复到0℃时，最终漏掉的空气是球内原有空气的百分之几？

10-2 设想每秒有 $n=10^{23}$ 个氧分子以速率 $v=500$ m/s 沿着与器壁法线成 $\theta=45°$ 角的方向，撞在面积为 $S=2\times10^{-4}$ m^2 的器壁上，求这群分子作用在面积 S 上的压强。

10-3 容器内装有压强 $p=1.0\times10^5$ Pa、温度 $t=27$℃的氮气，求：

(1) 单位体积内的分子数；

(2) 分子的质量；

(3) 气体的密度；

(4) 分子的方均根速率；

(5) 分子的平均平动动能。

10-4 设空气(气体的摩尔质量为 28.9×10^{-3} kg/mol)的温度为0℃，求：

(1) 空气分子的平均平动动能和平均转动动能；

(2) 10 g 空气的内能。

10-5 容积为0.01 m^3 的盒子以速率 $v=200$ m/s 匀速运动，盒内装有质量为0.05 kg 的氧气。若盒子突然停止，假定全部定向运动的能量都转化为分子的内能，求盒内气体达到平衡后，压强增加多少？

10-6 有下列一群粒子(n_i表示速度为 v_i 的粒子数)

习题 10-6 表

n_i	v_i/(km/s)
2	1
4	2
6	3
8	4
2	5

试计算：(1) 平均速率 $\bar{v}$；

(2) 方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$；

(3) 在上述的速率分布中，这群粒子的最概然速率 v_p。

10-7 某恒星的温度达到 10^8 K，在此温度下，物质已不以原子形式存在，只有质子存在，试求：

(1) 质子的平均动能是多少(单位：电子伏)？

(2) 质子的方均根速率为多大？(质子质量 $m=1.67\times10^{-27}$ kg)

10-8 若能量为 10^{12} eV 的宇宙射线粒子射入一氖管，其能量全部被氖气分子所吸收。现知氖管中有氖气0.01 mol，如果有 10^4 个宇宙粒子射入氖管，问氖气的温度升高多少？

10-9 设想太阳是由氢原子组成的密度均匀的理想气体系统。若已知太阳中心的压强为 $p=1.35\times10^{14}$ Pa，试估计太阳中心温度和此状态下氢原子的方均根速率。已知太阳质量 $m_E=1.99\times10^{30}$ kg，太阳半径 $R_E=6.96\times10^8$ m，氢原子质量 $m=1.67\times10^{-27}$ kg。

10-10 一容器内储有1 mol 的某种气体，今自外界输入209 J 的热量后，测得其温度升高了10 K，求该气体分子的自由度。

10-11 现有氢气、氦气和氨气各 1 mol，求它们在温度为 27℃ 时各自具有的内能。当温度升高 1℃ 时，其内能各增加多少？（双原子或多原子分子均视为刚性分子）

10-12 设某房间充满着双原子分子理想气体，房间体积为 V，冬天室温为 T_1，压强为 p_0。现用取暖器将室温提高到 T_2，因房间不是封闭的，室内压强仍为 p_0。试证明室温由 T_1 升高到 T_2 过程中房间内气体的内能不变，并说明取暖器加热的作用。

10-13 已知某氢气系统处在平衡态，其分子的最概然速率为 1 000 m/s。试问系统的温度是多少？并求出此温度时氢气分子的平均速率和方均根速率。

10-14 设氢气的温度为 300 K，求速率在 3 000 m·s^{-1} 到 3 010 m·s^{-1} 之间的分子数 ΔN_1 与速率在 1 500 m·s^{-1} 到 1 510 m·s^{-1} 之间的分子数 ΔN_2 之比。

10-15 设由 N 个气体分子组成一热力学系统，其速率分布函数为

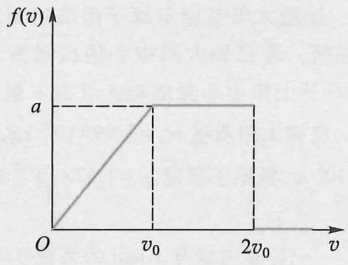
$$f(v)=\begin{cases}-k(v-v_0)v, & 0\leqslant v<v_0, \quad k\text{ 常量}\\ 0, & v\geqslant v_0\end{cases}$$

（1）作出速率分布曲线；

（2）用 v_0 定出常量 k；

（3）求出分子的 v_p、$\bar{v}$、$\sqrt{\overline{v^2}}$。

10-16 有 N 个气体分子，分子质量为 m，速率分布曲线如图所示。试求：



习题 10-16 图

（1）速率分布函数；

（2）a 值；

（3）速率在 $0.5v_0$ 到 $1.5v_0$ 区间的分子数；

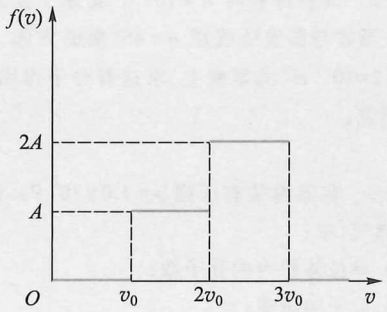
（4）分子的平均速率；

（5）分子的平均平动动能。

10-17 某一气体系统的总分子数为 N，其速率分布曲线如图所示。设图中的 v_0 为已知量，由图可知，分子速率大小从 0 到 v_0 的范围内速率分布函数为 0，分子速率大小从 v_0 到 $2v_0$ 的范围内速率分布函数为 A，分子速率大小从 $2v_0$ 到 $3v_0$ 的范围内速率分布函数为 $2A$，分子速率大于 $3v_0$ 的速率分布函数为 0。试求：

（1）分子速率在 v_0 到 $2v_0$ 之间的分子数占总分子数的百分比；

（2）所有分子的平均速率。



习题 10-17 图

10-18 设空气的温度均为 0℃，问飞机上升到多高处大气压强降为地面的 75%？（空气的摩尔质量为 0.028 9 kg·mol^{-1}）

10-19 在质子回旋加速器中，要使质子在 10^5 km 的路径上不和空气分子碰撞，真空室内的压强应为多大？设真空室温度为 300 K，质子的有效直径比空气分子的有效直径小得多，可以忽略不计，空气分子可认为静止不动。（设空气分子直径为 $d=3\times10^{-10}$ m）

10-20 在室温（$t=27$℃）和标准大气压（$p=1.013\times10^5$ Pa）情况下，试计算氢气分子的平均自由程和平均碰撞频率。（H_2 分子有效直径 $d=2.3\times10^{-10}$ m）

10-21 一定量的理想气体储存于固定体积的容器中，初态温度为 T_0，平均速率为 $\bar{v}_0$，平均碰撞频率为 $\bar{Z}_0$，平均自由程为 $\bar{\lambda}_0$。若温度升高为 $4T_0$，求 $\bar{v}$、$\bar{Z}$、$\bar{\lambda}$ 各变为多少。

10-22 假设地面上的风速为 60 km/h，考虑此风中的一氮气分子，它的热运动平均速率约为 500 m/s。该分子连续两次与其他分子碰撞之间的自由飞行时间平均为 10^{-10} s。则当此分子顺风移动 1 cm 时，它经历了多少个平均自由程？总共运动了多长的路程？

10-23 用 $\varepsilon_k = \frac{1}{2}mv^2$ 表示气体分子的动能，试根据关系式 $\frac{dN}{N} = f(v)\,dv = f(\varepsilon_k)\,d\varepsilon_k$ 确定遵从麦克斯韦速率分布律的空气分子按动能分布的分布函数 $f(\varepsilon_k)$ 和最概然动能。

10-24 飞机在高空中以 360 km/h 的航速飞行，由于空气的黏性作用，机翼能带动 4 cm 厚的空气层。求作用在机翼表面积 1 m^2 的切向阻力。已知空气的黏度为 $\eta = 0.18\times10^{-4}$ N · s/m^2。

10-25 现有 20 mol 的 N_2，将其不断压缩至极限，试求：

(1)它最终所能接近的体积；

(2)此时由于分子间引力而产生的附加压强。

(设 N_2 遵循范德瓦耳斯方程，其中范德瓦耳斯参量为 $a = 0.141$ Pa · m^6/mol^2，$b = 3.9\times10^{-5}$ m^3/mol)

习题答案

第十一章　热力学基础



本章补充资源

NOTE

热力学第一定律和热力学第二定律是两条基本定律。热力学第一定律反映了状态变化过程中，热量、功和内能三者之间相互转化的定量关系。热力学第一定律在理想气体准静态过程中的应用是本章讨论的一个重要内容。热力学第二定律和熵是本章讨论的另一个重点和难点，它反映了自发过程的方向性。在理想气体自由膨胀过程的特例中我们简化了一些问题的阐述和证明，尤其是利用它概要地论证了玻耳兹曼关系 $S=k\ln \Omega$，即系统的熵正比于系统的热力学概率 Ω 的自然对数，比例常量是玻耳兹曼常量 k；而在传统教材中，玻耳兹曼关系表示为 $S=k\ln W$，即熵正比于宏观态的热力学概率 W 的自然对数。

11-1　热力学第一定律

1. 准静态过程

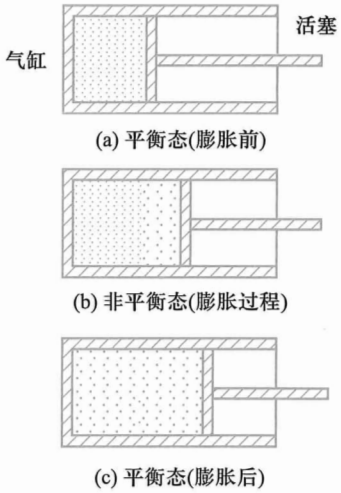


图 11-1　气体膨胀过程

系统从某一状态变化到另一状态，称为该系统经历了一个过程。在过程进行中，系统的状态不断地发生变化，若所经历的中间状态都是非平衡态，则该状态称为非静态过程。例如，气缸内的气体处于平衡态(a)，经膨胀过程到达平衡态(c)，如图 11-1 所示。在膨胀过程中，一方面气体内部各处分子数密度和压强并不相等，靠近活塞处较低，中间状态是非平衡态；另一方面，由于分子间的碰撞和分子热运动，非平衡态将趋于平衡态，气体内部各处分子数密度和压强将趋于均匀一致。平衡态被破坏后，需要经过一段时间才能达到新的平衡态，这段时间称为弛豫时间。如果过程进行得足够缓慢，过程经历的时间大于弛豫时间，可近似地认为过程经历的一切中间状态都接近于平衡态。例如，内燃机气缸内活塞的运动速率约为 10 m/s，而汽缸内压强由不均匀趋于均匀的速率约等于声速，即 300 m/s，活塞运动的时间是弛豫时间

的数十倍，活塞运动可认为足够缓慢，过程经历的中间状态可近似地按平衡态处理。这样，就能利用系统处于平衡态时的性质来研究过程的规律。理论上，引入一种理想的极限过程——准静态过程，该过程所经历的一切中间状态都无限接近于平衡态。显然，准静态过程只有在过程进行得无限缓慢的条件下才能实现。

理想气体的一个平衡态可以用 $p-V$ 图上的一点来表示。所以，理想气体的一个准静态过程可以用 $p-V$ 图上的一条曲线来表示，该曲线称为过程曲线。过程进行的方向，可用过程曲线上的箭头表示。对于非平衡态和非静态过程，气体是非均质的，无法用单值的压强和温度来描述，因此也无法显示在状态图上。

NOTE

2. 准静态过程中气体所做的功

利用力学中功的定义式，以气缸内气体的膨胀过程为例，可以导出准静态过程中气体体积变化时气体对外界所做的功。设气缸活塞的面积为 S，气体的压强为 p，则气体对活塞的压力为 pS，当活塞移动一微小位移 $\mathrm{d}l$ 时，气体所做的元功为

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=F\mathrm{d}l=pS\mathrm{d}l=p\mathrm{d}V \tag{11-1}$$

$\mathrm{d}V$ 是元过程中气体体积的增量。因为压强 p 总大于零，故当气体膨胀时，$\mathrm{d}V>0$，$\mathrm{d}W>0$，气体对外界做正功；当气体被压缩时，$\mathrm{d}V<0$，$\mathrm{d}W<0$，气体对外界做负功，即外界对系统做正功。气体经历了一个有限的准静态过程，体积由 V_1 变化到 V_2，气体在整个过程中对外界所做的功为

$$W=\int_{V_1}^{V_2}p\mathrm{d}V \tag{11-2}$$

虽然(11-1)式和(11-2)式是通过特例导出的，但可以证明这是准静态过程中气体对外界做功的一般计算公式。应该指出，气体体积变化导致的做功仍然是力的功，它是力的功用气体状态参量 p 和 V 表示的一种形式，用这种形式计算气体做的功比较方便。可见，气体做功不是功的新概念。

由定积分的几何意义知，用(11-2)式计算的功的数值等于 $p-V$ 图上过程曲线下的面积，即由过程曲线、过始末状态点所作的两条等容线和 V 轴所包围的面积的量值。膨胀时面积取正值，压缩时面积取负值。如图 11-2(a)所示，过程 acb 中气体做功的数值等于面积 $acbV_bV_aa$ 的大小。对于过程 bca，气体做功数值等于该面积大小的负值。

过程曲线与等容线的切点是过程做功正负的转折点，图 11-2

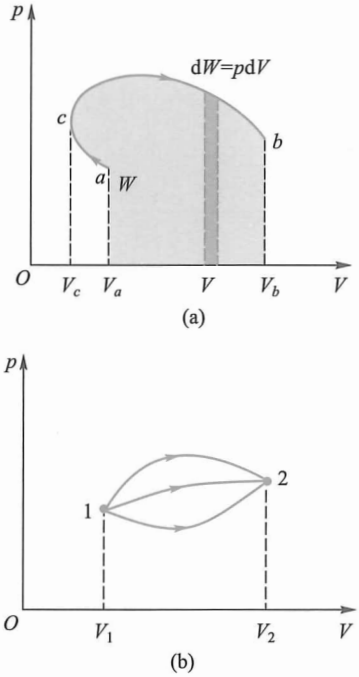


图 11-2 功的图示

NOTE

(a)中，该切点是 c 点，ac 段是压缩过程，气体做负功；cb 段是膨胀过程，气体做正功；通过 c 点的元过程中，$dV=0$，$dW=0$，气体不做功。

功是过程量，其大小不仅与始末状态有关，而且与过程有关。这从图 11-2(b)中可以看出。从状态 1 到状态 2 可以有不同的路径，路径下面围出的面积随着路径的不同而不同。

3. 热量

力学中已指出，能量是状态的单值函数，功是能量改变的一种量度，系统对外界做功将改变系统的状态和能量。实验表明，传递热量也能改变系统的状态和能量。例如一壶冷水放在火炉上，由于温度不同，火炉向冷水传递热量，水温逐渐升高，改变了水的状态和能量。热量也是能量改变的一种量度，它是过程量，其大小不仅与始末状态有关，而且与状态变化过程有关。

传递热量和做功虽然都可改变系统的状态和能量，但它们是改变系统能量的两种不同实现方式，做功是通过物体的宏观位移来实现的，传递热量是由于系统与外界温度不同而发生的。从本质上说，传递热量是分子之间相互作用的结果。这种相互作用，在我们现在考虑的层次，基本上是电磁相互作用。电磁相互作用在量子水平就是交换光子(见相对论相关章节)。可以是比较近距离的交换光子，例如两个分子碰撞其实就是一个分子向另外一个分子短距离发射一个光子。光子携带着动量和能量。另外一个分子接收到这个光子，就相当于它们之间发生能量和动量的转移。也可以是远距离交换光子，比如热辐射。太阳向地球发出光，包括可见光和不可见光。我们人体能够感到温暖是因为其中的红外线。炉膛也发射出红外线让我们感觉到温暖。当然宏观做功其实也是电磁相互作用的结果，宏观的力也来源于电磁相互作用。宏观做功与热交换的区别是：宏观的功是有序的，各分子统一向一个方向运动，而热交换是在无序热运动的分子之间发生的能量交换。

4. 热力学能

实验发现，在热力学系统由某一状态变化到另一状态的过程中，虽然做功与热量传递都与过程有关，但做的功与传递的热量

之和却与过程无关，只取决于初态和末态。因此，可以用状态变化过程中外界对系统所做的功和传递的热量之和来定义热力学系统的能量，如同力学中根据保守力做功与过程无关定义势能一样，该能量称为系统的热力学能或内能。

NOTE

用 E_1 表示系统初态的热力学能，用 E_2 表示系统末态的热力学能，用 Q 表示系统从初态变化到末态的过程中外界对系统传递的热量，用 W' 表示该过程中外界对系统所做的功，则有

$$Q+W'=E_2-E_1 \tag{11-3}$$

这就是热力学中热力学能的定义式。实际上只定义了两状态的热力学能之差。实用中，系统处于某一状态的热力学能数值到底等于多少并不重要，重要的是热力学能的变化。

从微观上看，(11-3)式定义的热力学能应包括系统中所有分子的热运动平动动能、转动动能、振动能量和与分子之间相互作用力对应的分子势能，以及原子和原子核内部的能量等。但在热力学系统经历的过程中，并非上述所有能量都发生变化，如在一般情况下，热力学过程中不涉及原子和原子核内部能量的变化。根据热力学能定义式(11-3)式，热力学能中可不包括那些在过程中不发生变化的能量，因此在气体分子动理论中，热力学能定义为系统中所有分子的热运动平动动能、转动动能、振动能量和分子势能的总和。因为在温度不太高的情况下，气体分子的振动能量不发生变化，所以把理想气体分子看成是刚性的，只有平动和转动，理想气体热力学能只包括所有分子的平动动能和转动动能。

5. 热力学第一定律

习惯上，Q 表示外界对系统传递的热量，W 表示系统对外界所做的功，E_2-E_1 表示热力学能增量，则由(11-3)式和 $W=-W'$ 得

$$Q=E_2-E_1+W \tag{11-4}$$

这就是热力学第一定律的数学表达式。它是能量守恒定律在热现象中的具体表达形式。式中 Q，E_2-E_1，W 都是代数量，可以取正值，也可以取负值。系统从外界吸收热量时 Q 为正，系统向外界放出热量时 Q 为负；系统对外界做正功时 W 为正，外界对系统做正功时 W 为负；系统热力学能增加时 E_2-E_1 为正，系统热力学能减少时 E_2-E_1 为负。元过程中，热力学第一定律(first law of thermodynamics)的数学表达式为

$$\mathrm{d}Q=\mathrm{d}E+\mathrm{d}W \tag{11-5}$$

在热力学第一定律建立以前，有人试图设计一种循环工作的

机器，使系统经历状态变化后又回到原来状态，但在一个循环中对外所做的功大于它所消耗的能量。这种机器称为第一类永动机。热力学第一定律建立后，人们知道这是违背能量守恒定律的，是不可能制成的。因为这种机器做功后又回到原来的状态，热力学能不改变。根据热力学第一定律，有 $Q=W$，即一个循环中系统对外做的功不可能大于它所消耗的能量。所以，热力学第一定律的另一种表述为：第一种永动机不可能造成。

11-2 热容

1. 热容、比热容、摩尔热容

NOTE

物质温度升高 1 K 所吸收的热量称为该物质的热容，简称热容(heat capacity)。其定义式为

$$C=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T} \tag{11-6}$$

其单位是焦[耳]每开[尔文](J/K)。在元过程中，当热量 $\mathrm{d}Q$ 与温度增量 $\mathrm{d}T$ 同号时，$C>0$；$\mathrm{d}Q$ 与 $\mathrm{d}T$ 异号时，$C<0$。

单位质量的热容称为该物质的比热容(specific heat capacity)，用小写字母 c 表示，其定义式为

$$c=\frac{C}{m}=\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T} \tag{11-7}$$

式中 m 是物质的质量。比热容的单位是焦[耳]每千克开[尔文][J/(kg·K)]。

1 mol 物质温度升高 1 K 所吸收的热量称为该物质的摩尔热容(molar heat capacity)，用 C_{m} 表示，其定义式为

$$C_{\mathrm{m}}=\frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T} \tag{11-8}$$

式中 ν 为物质的量。容易得出 $C_{\mathrm{m}}=\frac{C}{\nu}=\frac{mc}{\nu}=\mu c$。摩尔热容的单位是焦[耳]每摩[尔]开[尔文][J/(mol·K)]。

在某一过程中，温度从 T_1 变到 T_2，物质吸收的热量为

$$Q=\int_{T_1}^{T_2}\mathrm{d}Q=\int_{T_1}^{T_2}\frac{m}{\mu}C_{\mathrm{m}}\mathrm{d}T \tag{11-9}$$

该过程中，当摩尔热容是常量时，由上式得该过程中物质吸收的热量为

NOTE

$$Q=\frac{m}{\mu}C_{\mathrm{m}}(T_2-T_1) \tag{11-10}$$

因为热量 Q 与过程有关，故由上式可以看出，摩尔热容 C_{m} 也与过程有关。热力学中最常用的摩尔热容是摩尔定容热容和摩尔定压热容。

2. 摩尔定容热容

1 mol 物质在体积保持不变的条件下，温度升高 1 K 所吸收的热量称为摩尔定容热容(molar heat capacity at constant volume)，用符号 $C_{V,\mathrm{m}}$ 表示。对于等容过程，$\mathrm{d}W_V=p\mathrm{d}V=0$，根据热力学第一定律有 $\mathrm{d}Q_V=\mathrm{d}E$，故由(11-8)式得理想气体的摩尔定容热容为

$$C_{V,\mathrm{m}}=\frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{d}Q_V}{\mathrm{d}T}=\frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T}=\frac{1}{\nu}\frac{\nu\frac{i}{2}R\mathrm{d}T}{\mathrm{d}T}=\frac{i}{2}R \tag{11-11}$$

上式指出，理想气体的摩尔定容热容只与分子的自由度 i 有关，与气体温度无关。对单原子分子理想气体，$i=3$，$C_{V,\mathrm{m}}=12.5$ J/(mol·K)；对双原子分子理想气体，$i=5$，$C_{V,\mathrm{m}}=20.8$ J/(mol·K)；对多原子分子理想气体，$i=6$，$C_{V,\mathrm{m}}=24.9$ J/(mol·K)。

理想气体热力学能公式可用 $C_{V,\mathrm{m}}$ 表示为

$$E=\frac{m}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}T \tag{11-12}$$

热力学能增量可表示为

$$\mathrm{d}E=\frac{m}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}\mathrm{d}T,\quad E_2-E_1=\frac{m}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1) \tag{11-13}$$

上面两式对理想气体的任何过程都适用。

3. 摩尔定压热容

1 mol 物质在压强不变的情况下，温度升高 1 K 所吸收的热量称为摩尔定压热容(molar heat capacity at constant pressure)，用符号 $C_{p,\mathrm{m}}$ 表示。根据热力学第一定律，对于等压过程，有 $\mathrm{d}Q_p=\mathrm{d}E+p\mathrm{d}V=\mathrm{d}E+\nu R\mathrm{d}T$，故由(11-8)式得理想气体的摩尔定压热容为

$$C_{p,\mathrm{m}}=\frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{d}Q_p}{\mathrm{d}T}=\frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T}+\frac{1}{\nu}\frac{\nu R\mathrm{d}T}{\mathrm{d}T}=\frac{i}{2}R+R=\frac{i+2}{2}R \tag{11-14}$$

NOTE

上式与(11-11)式联立得

$$C_{p,m}-C_{V,m}=R \tag{11-15}$$

称为迈耶(Mayer)公式。理想气体摩尔定压热容也只与分子的自由度有关,与气体温度无关。对单原子分子理想气体,$i=3$,$C_{p,m}=20.8\ \text{J/(mol·K)}$;双原子分子理想气体,$i=5$,$C_{p,m}=29.1\ \text{J/(mol·K)}$;多原子分子理想气体,$i=6$,$C_{p,m}=33.2\ \text{J/(mol·K)}$。迈耶公式指出,1 mol 分子理想气体温度升高 1 K 时,等压过程要比等容过程多吸收 8.31 J 的热量。这是因为,在等容升温过程中气体不做功,而在等压升温过程中气体因体积膨胀要对外做功,所以气体要多吸收一部分热量来补偿因对外做功而损失的热力学能。

一般来讲,系统的 $C_{V,m}$ 和 $C_{p,m}$ 是不相等的。对于气体,二者差值不可忽略;对于液体和固体,由于它们的体积随温度的变化很小,所以 $C_{V,m}$ 和 $C_{p,m}$ 相差很小,一般可不加区别。

摩尔定压热容 $C_{p,m}$ 与摩尔定容热容 $C_{V,m}$ 的比值称为比热容比(heat capacity ratio),用 γ 表示,即

$$\gamma=\frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} \tag{11-16}$$

将(11-11)式和(11-14)式代入上式,得理想气体的比热容比为

$$\gamma=\frac{i+2}{i} \tag{11-17}$$

由上式可见,理想气体的比热容比大于 1。对单原子分子理想气体,$\gamma=\frac{5}{3}=1.67$;对双原子分子理想气体,$\gamma=\frac{7}{5}=1.4$;对多原子分子理想气体,$\gamma=\frac{8}{6}=1.33$。γ 也只与分子的自由度有关,而与理想气体温度无关。

11-3 热力学第一定律在理想气体准静态过程中的应用

1. 等容过程

系统体积保持不变的过程称为等容过程(isochoric process)。

过程特征为 V 等于常量。由理想气体状态方程，得过程方程为 $\frac{p}{T}=$常量。

根据功的计算式，等容过程中气体做的功为零，即

$$\mathrm{d}W_V=0,\quad W_V=0 \tag{11-18}$$

如图 11-3 所示，$p-V$ 图上的等容过程曲线是垂直于 V 轴的直线，称为等容线。显然，等容线下的面积为零。热力学能增量为

$$\Delta E_V=E_2-E_1=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R(T_2-T_1)=\frac{m}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1) \tag{11-19}$$

根据(11-10)式，热量为

$$Q_V=\frac{m}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R(T_2-T_1) \tag{11-20}$$

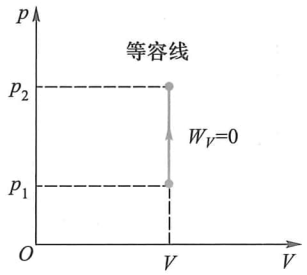


图 11-3 等容过程

NOTE

2. 等压过程

系统压强保持不变的过程称为等压过程(isobaric process)。过程特征为 p 等于常量。由理想气体状态方程，得过程方程为 $\frac{V}{T}=$常量。

等压过程中气体对外做的功为

$$W_p=\int_{V_1}^{V_2}p\mathrm{d}V=p(V_2-V_1)=\frac{m}{\mu}R(T_2-T_1) \tag{11-21}$$

如图 11-4 所示，$p-V$ 图上的等压线是平行于 V 轴的直线，等压线下的矩形面积为 $p(V_2-V_1)$。理想气体的热力学能增量为

$$\Delta E_p=E_2-E_1=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R(T_2-T_1)=\frac{m}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1) \tag{11-22}$$

根据(11-10)式，热量为

$$Q_p=\frac{m}{\mu}C_{p,\mathrm{m}}(T_2-T_1)=\frac{m}{\mu}\frac{i+2}{2}R(T_2-T_1) \tag{11-23}$$

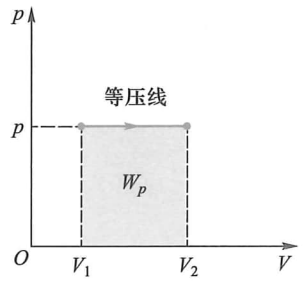


图 11-4 等压过程

3. 等温过程

系统温度保持不变的过程称为等温过程(isothermal process)。过程特征为 T 等于常量。过程方程为 $pV=$常量。对上

式微分得 $p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p=0$，所以 $p-V$ 图上等温线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}=-\frac{p}{V} \tag{11-24}$$

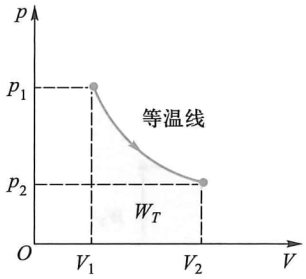


图 11-5 等温过程

如图 11-5 所示，$p-V$ 图上的等温线是双曲线。等温过程中气体对外做的功为

$$W_T=\int_{V_1}^{V_2}p\mathrm{d}V=\int_{V_1}^{V_2}\frac{m}{\mu}RT\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}=\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{p_1}{p_2} \tag{11-25}$$

因为理想气体的热力学能是温度的单值函数，所以等温过程中理想气体的热力学能保持不变，热力学能增量为零，即

$$\Delta E_T=E_2-E_1=0 \tag{11-26}$$

根据热力学第一定律，热量为

$$Q_T=W_T=\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}=\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{p_1}{p_2} \tag{11-27}$$

根据(11-6)式，等温过程气体的热容 $C_T=\pm\infty$ 。

4. 绝热过程

系统在与外界没有热量交换的情况下进行的过程称为绝热过程(adiabatic process)。被良好的绝热材料封闭的系统进行的状态变化过程，或者过程进行得较快，以至系统来不及和外界进行显著的热量交换的过程，都可近似地视为绝热过程。绝热过程的特征是 $\mathrm{d}Q=0$。现从热力学第一定律、绝热过程特征和理想气体状态方程导出理想气体的准静态绝热过程方程。根据热力学第一定律和 $\mathrm{d}Q=0$，有 $\mathrm{d}W=-\mathrm{d}E$，即

$$p\mathrm{d}V=-\frac{m}{\mu}C_{V,m}\mathrm{d}T$$

对理想气体状态方程 $pV=\frac{m}{\mu}RT$ 微分得

$$p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p=\frac{m}{\mu}R\mathrm{d}T$$

由上两式消去 $\mathrm{d}T$ 得

$$C_{V,m}(p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p)=-Rp\mathrm{d}V=-(C_{p,m}-C_{V,m})p\mathrm{d}V$$

解出

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}+\frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}\frac{\mathrm{d}V}{V}=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}+\gamma\frac{\mathrm{d}V}{V}=0$$

若 γ 是常量，则由上式积分得 $\ln(pV^{\gamma})=$ 常量，有

$$pV^{\gamma}=\text{常量} \tag{11-28}$$

上式称为理想气体的准静态绝热过程方程，简称绝热过程方程，亦称泊松(Poisson)方程。将上式与 $\frac{pV}{T}=$ 常量联立，可导出绝热过程方程的另外两种表示形式：

$$TV^{\gamma-1}=\text{常量},\quad p^{\gamma-1}T^{-\gamma}=\text{常量} \tag{11-29}$$

显然，三个绝热过程方程中的三个常量各不相同。

根据热力学第一定律，在理想气体的准静态绝热过程中，气体做的功为

$$W_Q=-(E_2-E_1)=-\frac{m}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)=\frac{m}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}(T_1-T_2) \tag{11-30}$$

由 $\gamma-1=\frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}}-1=\frac{C_{p,\mathrm{m}}-C_{V,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}}=\frac{R}{C_{V,\mathrm{m}}}$ 得

$$C_{V,\mathrm{m}}=\frac{R}{\gamma-1} \tag{11-31}$$

代入(11-30)式，得

$$W_Q=\frac{m}{\mu}\frac{R}{\gamma-1}(T_1-T_2)=\frac{1}{\gamma-1}(p_1V_1-p_2V_2) \tag{11-32}$$

对泊松方程取微分得 $p\gamma V^{\gamma-1}\mathrm{d}V+V^{\gamma}\mathrm{d}p=0$，由此可解出 $p-V$ 图上绝热线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}=-\gamma\frac{p}{V} \tag{11-33}$$

比较(11-24)式和(11-33)式，因为 $\gamma>1$，所以绝热线比等温线更陡些。如图 11-6 所示，从状态 A 出发，分别经绝热过程 AB 和等温过程 AC，使气体体积膨胀 ΔV，绝热过程压强减小量 p_A-p_B 比等温过程压强减小量 p_A-p_C 多些，原因如下：根据 $p=nkT$，压强由分子数密度 n 和温度 T 两个因素决定，等温膨胀过程中压强的降低完全是由于 n 的减少引起的，而绝热膨胀过程中，若 n 减少相同数值，除压强降低外，温度也要降低，所以体积膨胀相同数值时，绝热过程比等温过程压强降低得更多。根据(11-6)式，绝热过程气体的热容量 $C_Q=0$。

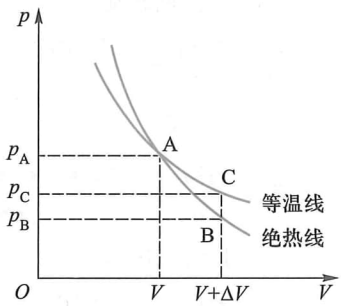


图 11-6 绝热线与等温线比较

至此，我们讨论了热力学第一定律对理想气体四种准静态过程的应用，现将有关公式列于表 11-1，供参考。

表 11-1 理想气体准静态过程公式表

过程	特征	过程方程	能量转化关系	热力学能增量 E_2-E_1	功 W	热量 Q
等容	$V=C$	$\frac{p}{T}=C$	$Q=E_2-E_1$	$\frac{m}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)$	0	$\frac{m}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)$
等压	$p=C$	$\frac{V}{T}=C$	$Q=E_2-E_1+W$	$\frac{m}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)$	$p(V_2-V_1)$ $\frac{m}{\mu}R(T_2-T_1)$	$\frac{m}{\mu}C_{p,m}(T_2-T_1)$
等温	$T=C$	$pV=C$	$Q=W$	0	$\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$ $\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{p_1}{p_2}$	$\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$ $\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{p_1}{p_2}$
绝热	$dQ=0$	$pV^{\gamma}=C$ $TV^{\gamma-1}=C$ $p^{\gamma-1}T^{-\gamma}=C$	$E_2-E_1=-W$	$\frac{m}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)$	$-\frac{m}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)$ $\frac{1}{\gamma-1}(p_1V_1-p_2V_2)$	0

例 1

1 mol 双原子分子理想气体经历如图 11-7 所示的过程 abca。已知 $V_1=1.0\times10^4\ \text{cm}^3$，$V_2=3.0\times10^4\ \text{cm}^3$，$p_1=2.0\times10^5\ \text{Pa}$，$p_2=4.0\times10^5\ \text{Pa}$，求：(1) T_a、T_b、T_c；(2) 过程 ab 中气体做的功、吸收的热量和热力学能增量；(3) 过程 bc、ca 中气体做功、吸热、热力学能增量的正、负或零。

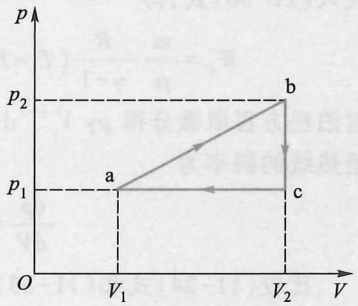


图 11-7 W、Q、ΔE 的计算和正负判断

解 (1) 根据理想气体状态方程，得

$$T_a=\frac{p_1V_1}{VR}=\frac{2.0\times10^5\times1.0\times10^4\times10^{-6}}{1\times8.31}\text{K}=241\ \text{K}$$

$$T_b=\frac{p_2V_2}{VR}=\frac{4.0\times10^5\times3.0\times10^4\times10^{-6}}{1\times8.31}\text{K}=1.44\times10^3\ \text{K}$$

$$T_c=\frac{p_1V_2}{VR}=\frac{2.0\times10^5\times3.0\times10^4\times10^{-6}}{1\times8.31}\text{K}=722\ \text{K}$$

(2) 如图 11-7 所示，过程 ab 中气体做功的大小等于梯形 abV_2V_1a 的面积值，即

$$W_{ab}=\frac{(p_1+p_2)(V_2-V_1)}{2}=\frac{(2.0\times10^5+4.0\times10^5)(3.0\times10^4-1.0\times10^4)\times10^{-6}}{2}\text{K}=6.0\times10^3\ \text{K}$$

根据理想气体的热力学能公式，气体热力学能增量为

$$\Delta E = V\frac{i}{2}R(T_b - T_a)$$

$$= 1\times\frac{5}{2}\times 8.31\times(1.44\times10^3 - 241)\ \text{J}$$

$$= 2.49\times10^4\ \text{J}$$

根据热力学第一定律，气体吸热为

$$Q_{ab} = E_b - E_a + W_{ab} = 2.49\times10^4 + 6.0\times10^3\ \text{J}$$

$$= 3.09\times10^4\ \text{J}$$

(3) 过程 bc 是等容降压过程。因等体，故 $W_{bc}=0$；因降压，由过程方程知气体温度降低，所以 $\Delta E<0$。根据热力学第一定律，$Q_{bc}=\Delta E<0$。

过程 ca 是等压压缩过程，故 $W_{ca}<0$。由过程方程知气体温度降低，所以 $\Delta E<0$。由热力学第一定律知 $Q_{ca}=\Delta E+W_{ca}<0$。

例 2

1 mol 氧气分子经历过程 ab，过程曲线是 $p-V$ 图上斜率为负的直线，如图 11-8 所示。已知 $p_1=2\times10^5$ Pa，$V_1=1\times10^{-2}$ m^3，$p_2=1\times10^5$ Pa，$V_2=3\times10^{-2}$ m^3，求过程中的最高温度。

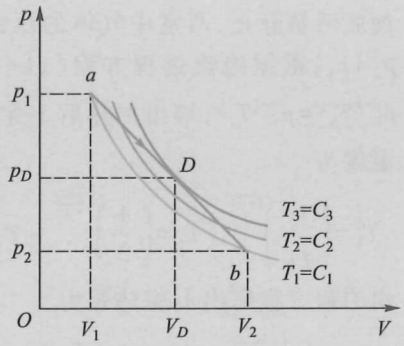


图 11-8 升、降温转折点

解 $p-V$ 图上，等温线是双曲线，其斜率为 $-\frac{p}{V}$。根据理想气体状态方程，$p-V$ 图上一定质量的理想气体的一组等温线中，位于右上方的等温线的温度较高，位于左下方的等温线的温度较低。如图 11-8 所示，C_1、C_2、C_3 为常量。与负斜率直线 ab 相交的等温线都位于与 ab 相切的等温线的左下方，表明切点 D 的温度 T_3 最高。

设直线 ab 的方程式为 $p=kV+b$，其中

$$k = \frac{p_2-p_1}{V_2-V_1} = \frac{1\times10^5 - 2\times10^5}{3\times10^{-2} - 1\times10^{-2}}\ \text{Pa/m}^3$$

$$= -5\times10^6\ \text{Pa/m}^3$$

$$b = p_1 - kV_1 = 2\times10^5 + 5\times10^6\times1\times10^{-2}\ \text{Pa}$$

$$= 2.5\times10^5\ \text{Pa}$$

D 点是直线 ab 与等温线 $T_3=C$ 的切点，由两线斜率相等，即 $k=-\frac{p_D}{V_D}$，将其和 $p_D=kV_D+b$ 联立，解出 D 点的压强和体积分别为 $p_D=\frac{b}{2}$，$V_D=-\frac{b}{2k}$。由理想气体状态方程得 D 点的温度为

$$T_3 = \frac{p_D V_D}{R} = -\frac{b^2}{4kR}$$

$$= -\frac{(2.5\times10^5)^2}{4\times(-5\times10^6)\times8.31}\ \text{K} = 376\ \text{K}$$

例 3

用绝热壁包围的气缸，被一绝热的活塞分成 a、b 两室，活塞在气缸内可以无摩擦地自由滑动，两室中各有1 mol 双原子分子理想气体，如图 11-9 所示。开始时，气体都处于平衡状态，它们的压强都是 p_1，体积都是 V_1，温度都是 T_1。a 室中有一电加热器，现通过电加热器对 a 室中的气体徐徐加热，直到 a 室内的气体压强变为 $p_a=2p_1$，问：(1)加热后，a 和 b 两室内气体的温度各为多少？(2)在这个过程中 a 室内气体做了多少功？(3)加热器传给 a 室内气体的热量是多少？

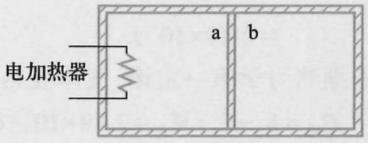


图 11-9 热力学第一定律在绝热过程中的应用

解 (1) b 室中气体经历绝热压缩过程，平衡后活塞静止，两室中气体的压强相等，即 $p_a=p_b$，根据绝热过程方程(11-29)式，有 $p_b^{\gamma-1}T_b^{-\gamma}=p_1^{\gamma-1}T_1^{-\gamma}$，解出加热后 b 室内气体的温度为

$$T_b=\left(\frac{p_1}{p_b}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\cdot T_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-1.4}{1.4}}\cdot T_1=1.22T_1$$

由泊松方程解出 b 室体积为

$$V_b=\left(\frac{p_1}{p_b}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\cdot V_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1.4}}\cdot V_1=0.61V_1$$

因此 a 室体积为

$$V_a=2V_1-V_b=1.39V_1$$

根据理想气体状态方程，a 室内气体的温度为

$$T_a=\frac{p_aV_a}{p_1V_1}T_1=2\times1.39T_1=2.78T_1$$

(2) a 室气体膨胀时对 b 室气体所做的功完全转化为 b 室气体的热力学能，因此 a 室气体做的功为

$$W=\frac{m}{\mu}C_{V,m}(T_b-T_1)=1\times\frac{5}{2}(1.22-1)RT_1$$
$$=0.55RT_1$$

(3) 根据热力学第一定律，a 室气体吸收的热量为

$$Q=W+\Delta E=W+\frac{m}{\mu}C_{V,m}(T_a-T_1)$$
$$=0.55RT_1+1\times\frac{5}{2}(2.78-1)RT_1=5RT_1$$

11-4 循环过程 卡诺循环

1. 循环过程

一个系统由某一状态出发，经历一系列状态变化后又回到原来的状态，这样周而复始的变化过程称为循环过程(cyclic

process)，简称循环。实际的热机(heat engine)和致冷机(refrigerator)都可以理想化为一定质量工作物质周而复始地进行某种循环。研究循环过程的规律在实践和理论上都有重要的意义。

$p-V$ 图上，理想气体的准静态循环过程曲线是一条闭合线。如图 11-10 所示，(a)为沿顺时针方向进行的循环，称为正循环；(b)为沿逆时针方向进行的循环，称为逆循环。循环的特征是系统完成一次完整的循环后，其热力学能增量为零，即 $\Delta E=0$。

(1) 正循环

如图 11-10(a)所示，在一次正循环中，气体膨胀时对外界所做的正功 W_1 大于气体压缩时外界对气体做的功 W_2，两者之差 $W=W_1-W_2$ 称为气体对外界做的净功，其量值等于 $p-V$ 图上循环过程曲线所包围的面积。一次完整的正循环中，由于系统热力学能不变，所以系统从外界吸收的热量总和 Q_1 必然大于放出热量总和的绝对值 Q_2(Q_1 和 Q_2 都取正值)。根据热力学第一定律，一次正循环中，系统对外界做的净功等于系统吸收的净热量，即

$$W=Q_1-Q_2 \tag{11-34}$$

这是正循环过程中的能量转化关系。

热机中进行的循环是正循环。热机中的系统称为工作物质，简称工质。热机循环中，工质从高温热源吸收热量，对外做净功，又向低温热源放出热量。热机是利用热来做功的机器，其效能用一次循环中工质所吸收的热量有多少转化为有用的功来衡量，称为热机的效率(efficiency)，用符号 η 表示，其定义式为

$$\eta=\frac{W}{Q_1} \tag{11-35}$$

利用(11-34)式，可得

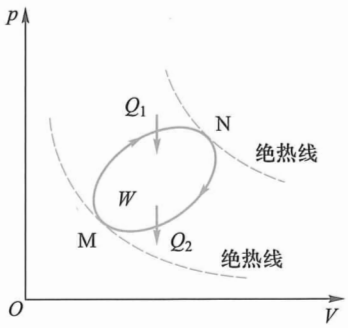
$$\eta=1-\frac{Q_2}{Q_1} \tag{11-36}$$

(2) 逆循环

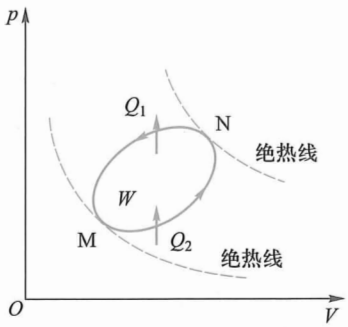
如图 11-10(b)所示，在一次逆循环中，系统热力学能仍不变，因此系统从向外界放出热量总和的绝对值 Q_1 必然大于吸收的热量总和 Q_2(Q_1 和 Q_2 仍都取正值)。因此在整个循环中，外界对系统做正功，外界对系统做的净功 W 的量值等于循环过程曲线所包围的面积。根据热力学第一定律，一次逆循环中外界对系统所做的净功等于系统放出的净热量，即

$$W=Q_1-Q_2 \tag{11-37}$$

上式与(11-34)式形式相同，两式中，Q_1 都表示系统与高温热源交换的热量，Q_2 都表示系统与低温热源交换的热量，W 分别表示



(a) 正循环



(b) 逆循环

图 11-10 循环过程

NOTE

NOTE

系统或外界做的净功。

要使工作物质从低温热源吸收热量并向高温热源放出热量，外界必须对工作物质做功。致冷机的效能用工作物质在一次循环中从低温热源吸收的热量 Q_2 与外界对工作物质所做的净功 W 之比来表示，即

$$w=\frac{Q_2}{W} \tag{11-38}$$

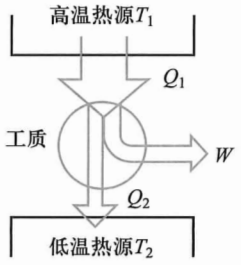
w 称为致冷系数。利用(11-37)式，得

$$w=\frac{Q_2}{Q_1-Q_2} \tag{11-39}$$

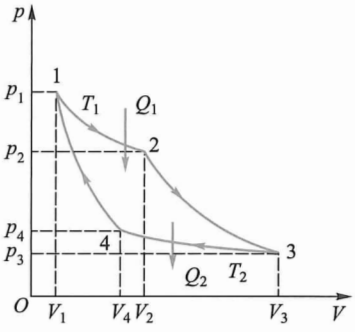
2. 卡诺循环

为了提高热机的效率，1824 年法国年轻的工程师卡诺(S. Carnot)提出了一种理想的最简单的循环过程，称为卡诺循环。卡诺循环中，工作物质只与两个恒温热源交换热量，整个循环由两个等温过程和两个绝热过程组成。

卡诺热机(Carnot heat engine)的能流图如图 11-11(a)所示，在与高温热源接触的过程中，工作物质经历一个等温吸热过程，从高温热源吸收热量 Q_1；与低温热源接触的过程中，工作物质经历一个等温放热过程，向低温热源放出热量 Q_2；这两个热量的差值 Q_1-Q_2 转变为对外界做的净功。



(a) 卡诺热机能流图



(b) 理想气体准静态卡诺正循环

图 11-11 卡诺热机循环

以理想气体为工质的准静态卡诺循环如图 11-11(b)所示，它由四个分过程组成：过程 1→2 和 3→4 是等温过程，过程 2→3 和 4→1 是绝热过程。

在过程 1→2 中，理想气体从高温热源吸收的热量为

$$Q_1=\frac{m}{\mu}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}$$

T_1 是高温热源的温度。在过程 3→4 中，理想气体向低温热源放出的热量为

$$Q_2=\left|\frac{m}{\mu}RT_2\ln\frac{V_4}{V_3}\right|=\frac{m}{\mu}RT_2\ln\frac{V_3}{V_4}$$

T_2 是低温热源的温度。根据(11-36)式，卡诺循环的效率为

$$\eta_{卡}=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_2\ln\dfrac{V_3}{V_4}}{T_1\ln\dfrac{V_2}{V_1}}$$

对两个绝热过程 2→3 和 4→1 分别应用绝热过程方程，得

$$T_1V_2^{\gamma-1}=T_2V_3^{\gamma-1}$$

$$T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_4^{\gamma-1}$$

上两式相除，得$\frac{V_2}{V_1}=\frac{V_3}{V_4}$，因此卡诺循环效率公式为

$$\eta_{卡}=1-\frac{T_2}{T_1} \tag{11-40}$$

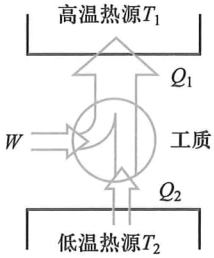
上式表明，卡诺循环的效率只与两个恒温热源的温度有关。高温热源的温度 T_1 越高，低温热源的温度 T_2 越低，卡诺循环的效率越高。要使 $\eta_{卡}=1$，必须有 $T_2=0$，但绝对零度是不能达到的，所以卡诺循环的效率必小于 1。

卡诺致冷机（Carnot refrigerator）的能流图如图 11-12（a）所示，外界对系统做净功 W，系统从低温热源吸收热量 Q_2，向高温热源放出热量 Q_1。根据（11-37）式，有 $Q_1=W+Q_2$。

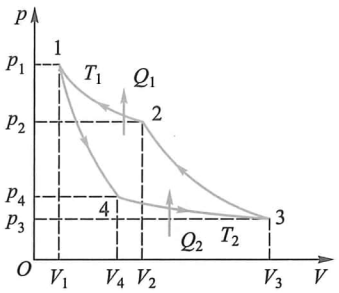
以理想气体为工质的准静态卡诺逆循环如图 11-12（b）所示，其致冷系数为

$$w_{卡}=\frac{Q_2}{Q_1-Q_2}=\frac{\frac{m}{\mu}RT_2\ln\frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}-\frac{m}{\mu}RT_2\ln\frac{V_3}{V_4}}=\frac{T_2}{T_1-T_2} \tag{11-41}$$

可以看出，T_2 越小，$w_{卡}$越小；T_1-T_2 越大，$w_{卡}$越小。这说明，低温热源温度越低，或两热源的温度差越大，从低温热源吸取同样的热量所消耗的功就越大，卡诺致冷机的效能越差。



(a) 卡诺致冷机能流图



(b) 理想气体准静态卡诺逆循环

图 11-12 卡诺致冷机循环

例 4

一电冰箱在气温为 40℃的房间内工作，保持结冰室内的温度为 -10 ℃。由于冰箱壁的绝热层不是理想的，结冰室每小时自房间内吸收热量 3×10^5 J。假设冷冻装置是卡诺致冷机，问冷冻机的电动机每小时消耗多少能量？

解 为了保持结冰室内的温度，必须将结冰室自房间内吸收的热量及时放出。根据致冷系数公式

$$w=\frac{Q_2}{W},\quad w_{卡}=\frac{T_2}{T_1-T_2}$$

可得电动机每小时消耗的能量为

$$W=Q_2\frac{T_1-T_2}{T_2}$$

$$=3\times10^5\times\frac{(273+40)-(273-10)}{273-10}\ \text{J/h}$$

$$=5.7\times10^4\ \text{J/h}$$

11-5 热力学第二定律

1. 自发过程的方向性

NOTE

热力学第一定律是能量守恒定律在热现象中的具体表述形式，任何热力学过程都必须满足热力学第一定律，但是满足热力学第一定律的热力学过程却不一定都能自动实现。

自然界中，任何宏观自发过程都具有方向性。所谓自发过程是指在不受外界影响的条件下进行的过程。

（1）孤立系统的变化过程是不受外界影响的自发过程。实践表明，孤立系统自发过程进行的方向总是从非平衡态到平衡态，而不可能从平衡态过渡到非平衡态。例如，气体的输运现象。

（2）理想气体自由膨胀

如图 11-13 所示，一个容器中间有一隔板，左室盛有理想气体，右室为真空。当容器中间的隔板被抽去的瞬间，气体都聚集在容器的左室。此后气体向真空自发地迅速膨胀，充满整个容器，最后达到平衡态。这一过程称为理想气体的自由膨胀过程（free expansion）。

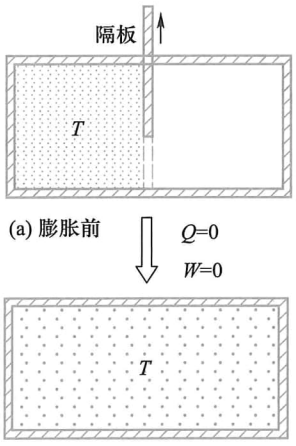


图 11-13 理想气体自由膨胀

因为理想气体向真空膨胀不需要克服外力做功，所以在理想气体自由膨胀的过程中，气体不做功，即 $W=0$。因膨胀迅速，来不及与外界交换热量，可将其看成是绝热过程，有 $Q=0$。根据热力学第一定律，理想气体的内能不变，即 $\Delta E=0$，有 $\Delta T=0$。可见，理想气体自由膨胀的过程不受外界影响，气体的内能不变，但体积增大。既然体积增大了，根据（11-2）式，理想气体应该做功，可为什么 $W=0$？这是因为上式只适用于理想气体的准静态过程，而理想气体的自由膨胀过程是非静态过程，故（11-2）式不适用。

相反的过程，即充满整个容器的气体自动地收缩到左半部分、右半部分为真空的过程，是不可能实现的。或者说，相反的过程可以发生，但必须存在外界的影响。如外力做功将气体等温压缩到左半部分，这时气体状态复原了，但外界对系统做了功，系统向外界放出了热量。或者，外力做功将气体绝热压缩至左半部分，这时气体体积复原了，但内能和温度增加了，再令气体进行等容降压过程，气体放出热量，温度降至 T，这时气体状态复原了，但是外界对系统做了功，系统向外界放出了热量。

2. 可逆过程和不可逆过程

NOTE

为了阐述热力学第二定律，物理学中引入了可逆过程（reversible process）与不可逆过程（irreversible process）的概念。从理想气体的自由膨胀过程可以看出：自发过程的相反过程是可以发生的，自发过程的初始状态是可以复原的，但必须有外界的影响，并将引起外界的变化。

一个系统由某一状态 a 出发，经过一过程 L 达到另一状态 b。如果系统从状态 b 出发，沿过程 L 的反方向进行，可以经过和原来一样的那些中间状态，重新回到状态 a，而且消除过程 L 中外界所引起的一切影响，则过程 L 称为可逆过程。反之，如果沿过程 L 的反方向进行，不能使系统和外界完全复原，则过程 L 称为不可逆过程。

根据上述定义，无摩擦的准静态过程是可逆过程。例如，一定量的理想气体从平衡态 a 出发，经过一无摩擦的准静态膨胀过程变化到平衡态 b，中间状态都是平衡态，系统的内能由 E_a 变为 E_b，体积由 V_a 变为 V_b，对外做功为 $W=\int_{V_a}^{V_b} p\mathrm{d}V$，吸收热量 $Q=E_b-E_a+W$；如果该气体从末态 b 出发，沿原过程的反方向回到初态 a，则其经历原过程中的所有中间平衡态，内能由 E_b 变为 E_a，体积由 V_b 变为 V_a，对外做功为 $\int_{V_b}^{V_a} p\mathrm{d}V=-W$，吸收热量为 $E_a-E_b-W=-Q$，显然，这一相反过程消除了原过程中外界所引起的一切影响，系统和外界完全复原。

因为准静态过程和完全无摩擦都是理想情况，所以可逆过程是一种理想过程。有摩擦的准静态过程是不可逆过程，因为反方向过程中摩擦力做功不能抵消原过程中摩擦力做的功，当系统复原时，外界无法复原。通常我们都略去摩擦，称准静态过程为可逆过程。非静态过程一定是不可逆过程。

3. 热力学第二定律的表述

热力学第二定律（the second law of thermodynamics）是关于过程进行的方向的规律，是从大量实践经验中归纳出来的。其实质是指出自然界中一切与热现象有关的实际宏观过程都是不可逆过程，其表述方式是挑选某一不可逆过程，描述不可逆过程的共同特性，即指出该不可逆过程所产生的效果不论利用什么方法也

NOTE

不能完全恢复原状而不引起其他变化。热力学第二定律可以有许多种等效的表述方式,任何一不可逆过程都可描述不可逆过程的不可逆特性。这里介绍两种标准表述方式。

(1) 开尔文(L.Kelvin)表述

不可能从单一热源吸收热量,使之完全变为有用的功,而不产生其他影响。

历史上,人们把可以从单一热源吸收热量,使之完全变为有用的功,而不产生其他影响的机器称为第二类永动机。据此,热力学第二定律的开尔文表述也可说成是:第二类永动机不可能造成。第二类永动机是效率为100%的热机,它并不违背热力学第一定律,而且这种机器是最经济的,因为它可以将空气中、海洋中或土壤中的大量热量转化为功,而不需要消耗燃料。例如,让海水温度降低0.01 K,使这部分热量完全变为有用的功,可使地球上的全部机器工作十几个世纪。开尔文表述中的"单一热源"是指各处温度均匀、一致并且恒定不变的热源;"其他影响"是指除了系统从单一热源吸热和对外做功以外的任何其他变化。如果热源温度不均匀,例如海水的温度随深度而变化,在不同深度的海水之间进行热机循环,吸热做功,这不违背热力学第二定律的开尔文表述,这时海水成为两个热源。如果在产生其他影响的情况下,从单一热源吸热,使之完全变为有用的功是可能的,例如理想气体的等温膨胀过程,除了从单一热源吸热和对外做功以外,气体还发生了体积膨胀。开尔文表述指出了功热转化过程的不可逆性,在不产生其他影响的条件下,功可以完全变为热,而热不能完全变为功。

(2) 克劳修斯(R.Clausius)表述

不可能把热量由低温物体传到高温物体,而不引起其他变化。

克劳修斯表述中的"其他变化"是指除低温物体放热和高温物体吸热以外的任何其他变化。因此,克劳修斯表述也可说成是:热量不能自动地由低温物体传到高温物体。如果在引起其他变化的情况下,热量由低温物体传到高温物体是可能的,例如致冷机循环。克劳修斯表述指出了热传导过程的不可逆性——热量能自动地从高温物体传到低温物体,但不能自动地从低温物体传到高温物体。

4. 卡诺定理

1824年卡诺在其论文"论火的动力"中提出了关于热机效率的定理,称为卡诺定理。历史上卡诺定理是热力学第二定律的出

发点，克劳修斯在分析了卡诺定理的基础上，于1850年发表了关于热力学第二定律的论文。虽然卡诺定理是正确的，但卡诺当时的证明方法却是错误的。后来开尔文和克劳修斯从热力学第二定律出发证明了这一定理。这是一条具有重要实际意义和理论意义的定理。需要指出的是，开尔文、克劳修斯的两种关于热力学第二定律的表述和卡诺定律都是等价的说法，它们可以互相推导，但是都是公理性的命题，只能由实验来验证它们是否正确。

NOTE

卡诺定理讨论的是双热源循环的效率问题。系统只与两个恒温热源交换热量的循环称为双热源循环。双热源可逆循环必定是可逆卡诺循环，因为系统只有在温度 T_1 时与高温热源交换热量，在温度 T_2 时与低温热源交换热量，这必然是两个可逆等温过程，而系统从 T_1 变化到 T_2，再从 T_2 变化到 T_1，必须经历两个与外界不交换热量的可逆绝热过程。所以双热源可逆循环是由两个等温过程和两个绝热过程组成的可逆卡诺循环。双热源循环可以是不可逆循环，也可以是可逆卡诺循环。在可逆卡诺循环中，还可包括各种各样的可逆卡诺循环，它们所用的工作物质不同，可以是气体或液体，也可以是气体、液体、固体的混合物质等。

卡诺定理指出了这些双热源循环中，哪一个的效率最高。该定理有两条：

（1）在相同的高温热源和低温热源之间工作的一切不可逆循环的效率都不可能大于可逆卡诺循环的效率。

（2）在相同的高温热源和低温热源之间工作的一切可逆卡诺循环的效率都相等，与工作物质无关。

证明：（1）设有两个循环C和C′都工作于高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间，如图11-14(a)所示，C为不可逆循环，C′为可逆循环。循环C在一个循环过程中吸热 Q_1，放热 Q_2，对外做功 $W=Q_1-Q_2$。循环C′在一个循环过程中吸热 Q_1'，放热 Q_2'，对外做功 $W'=Q_1'-Q_2'$。调整循环运行情况，使 $Q_2=Q_2'$。令不可逆循环C按正循环方向进行，因为C′是可逆循环，所以可令其进行逆循环，将正循环C和逆循环C′联合起来组成一个联合循环，如图11-14(b)所示，逆循环C′所需的功 W' 由循环C提供，则联合循环对外界所做的净功为

$$W-W'=(Q_1-Q_2)-(Q_1'-Q_2')=Q_1-Q_1'$$

从高温热源吸收的热量为 Q_1-Q_1'，与低温热源交换的热量 Q_2-Q_2' 为零。如果 $W-W'>0$，则联合循环违背热力学第二定律的开尔文表述，故必有 $W-W'\leqslant 0$。因此有

$$Q_1-Q_1'=W-W'\leqslant 0$$

即

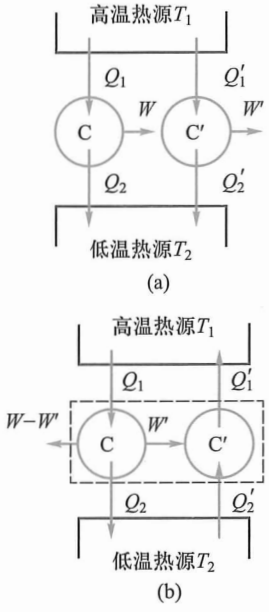


图 11-14 卡诺定理证明

NOTE

$$Q_1 \leqslant Q_1'$$

而 $Q_2 = Q_2'$，所以

$$1-\frac{Q_2}{Q_1} \leqslant 1-\frac{Q_2'}{Q_1'}$$

即 $\eta \leqslant \eta'$，不可逆循环的效率不可能大于可逆卡诺循环的效率。

（2）如果 C 和 C′都是可逆循环，令 C 作正循环，C′作逆循环，并将两者联合起来组成一个联合循环，则根据卡诺定理（1）的证明，有

$$\eta \leqslant \eta'$$

若令 C′作正循环，C 作逆循环，并将两者联合起来组成一个联合循环，则有

$$\eta' \leqslant \eta$$

因此，只有一个可能，即

$$\eta = \eta'$$

上式表明，可逆卡诺循环的效率相等。

既然可逆卡诺循环的效率与工质无关，那么它必然等于以理想气体为工质的可逆卡诺循环的效率 $\eta_{卡} = 1-\frac{T_2}{T_1}$。根据卡诺定理，$\eta_{卡}$是双热源热机效率的最高限。热力学第一定律指出了效率大于 1 的热机是不可能制成的，热力学第二定律指出了效率为 1 的热机也是不可能制成的，卡诺定理指出了热机效率的最高限。

卡诺定理对提高热机效率具有理论上的指导意义，它指出了提高热机效率的途径。就过程来说，应使实际热机尽可能接近可逆卡诺热机，即一方面要尽量减少整个过程中的摩擦、漏气、散热等不可逆因素，另一方面要使循环尽量接近于卡诺循环；就热源来说，要尽量提高高温热源的温度、降低低温热源的温度。但低温热源的温度受大气温度的限制，因此主要是提高高温热源的温度。

11-6 熵 熵增加原理

不可逆过程，无论用简单的直接反向进行，还是用任何曲折复杂的方法，都不可能使系统和外界完全恢复原状。这表明不可逆过程的不可逆性是过程本身所具有的性质，并且不可逆过程的初态和末态之间必定存在着重大差异，正是这种差异决定了自发

过程进行的方向。因此，要判断某一过程是不是可逆过程，不必研究这一过程的详细情况，而只要研究初态和末态的差异就够了。克劳修斯首先引入了态函数熵，用初态和末态熵的差异来判断过程是否可逆，判断自发过程进行的方向。

NOTE

1. 克劳修斯等式

根据卡诺定理，一切可逆卡诺循环的效率都相等，与工作物质无关。因此对可逆卡诺循环，有 $\eta_{卡}=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}$，得 $\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2}{T_2}=0$。上式中，$T_1$ 和 T_2 分别是高温热源和低温热源的温度，Q_1 为系统吸收的热量，Q_2 为放出热量的绝对值。如果仍采用热力学第一定律中的规定，将热量 Q 作为代数量，系统吸热时 Q 为正，系统放热时 Q 为负，则上式改写为

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}=0 \tag{11-42}$$

这是一切可逆卡诺循环都满足的关系。任意可逆循环过程都可看成是由许多可逆卡诺循环组成的。如图 11-15 所示，用一系列绝热线和等温线将可逆循环 $abca$ 分割成许多小可逆卡诺循环。任意两个相邻的小可逆卡诺循环的绝热线的绝大部分都是共同的，但过程进行的方向相反，因此效果互相抵消。因此，所有小可逆卡诺循环的总效果是图中锯齿形折线所表示的循环。当小可逆卡诺循环无限增多时，锯齿形折线所表示的循环就无限接近于可逆循环 $abca$。根据(11-42)式，对于每一个小可逆卡诺循环都有 $\frac{Q_i}{T_i}+\frac{Q_{i+1}}{T_{i+1}}=0$。因此，对 n 个小可逆卡诺循环有

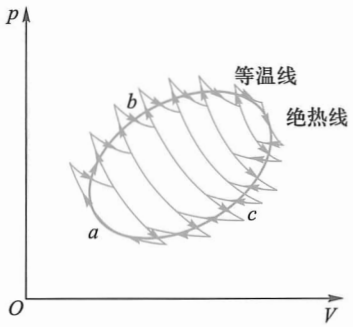


图 11-15 用折线代替光滑曲线

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{Q_i}{T_i}=0$$

当 $n\to\infty$ 时，求和号变为积分号，则对任意可逆循环有

$$\oint_{(可逆循环)}\frac{\mathrm{d}Q}{T}=0 \tag{11-43}$$

上式称为克劳修斯等式。它表示在可逆循环过程中，系统在各温度所吸收的热量 $\mathrm{d}Q$ 与该温度 T 的比值之和为零。顺便指出，从图 11-15 和(11-43)式可以看出：在一个任意可逆循环过程中，系统与无限多个温度不同的热源交换热量。

2. 熵 熵增加原理

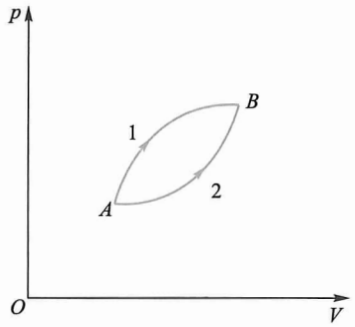


图 11-16 用克劳修斯等式定义熵

NOTE

根据克劳修斯等式，可以证明系统存在一个态函数。设有两个平衡态 A 和 B，如图 11-16 所示，$A1B$ 和 $A2B$ 是两个从状态 A 变化到状态 B 的可逆过程。根据克劳修斯等式，对可逆循环 $A1B2A$，有

$$\oint_{(A1B2A)} \frac{dQ}{T} = 0$$

即

$$\int_{(A1B)} \frac{dQ}{T} + \int_{(B2A)} \frac{dQ}{T} = 0$$

因为过程是可逆的，故有

$$\int_{(A2B)} \frac{dQ}{T} = -\int_{(B2A)} \frac{dQ}{T}$$

代入上式得

$$\int_{(A1B)} \frac{dQ}{T} = \int_{(A2B)} \frac{dQ}{T}$$

上式指出，当系统从平衡态 A 沿可逆过程变化到平衡态 B 的过程中，积分 $\int_{A(\text{可逆过程})}^{B} \frac{dQ}{T}$ 只取决于始末两平衡态，而与从状态 A 到状态 B 的可逆过程如何选择无关。因此，该积分式可定义一个状态函数，称为熵(entropy)，用符号 S 表示，则始末两平衡态 A 和 B 的熵变可定义为

$$S_B - S_A = \int_{A(\text{可逆过程})}^{B} \frac{dQ}{T} \tag{11-44}$$

可逆元过程的熵变为

$$dS = \frac{dQ_r}{T} \tag{11-45}$$

式中 Q_r 表示可逆过程中吸的热，因此 $dQ_r = TdS$。根据热力学第一定律，对于理想气体可逆元过程，有

$$TdS = dE + pdV \tag{11-46}$$

这是理想气体的热力学基本关系式。但它不适用于开放系统。若要确定某一平衡态的熵值，需规定一个基准状态的熵值。例如在热力工程中计算液态水和水蒸气的熵时取 0℃ 时纯水的熵值为零，并把其他温度时的熵值计算出来列成数值表备用。熵的单位是焦[耳]每开[尔文](J/K)。

(1) 熵是系统的状态函数

NOTE

规定了基准状态及其熵值后，系统的每一平衡态都有一确定的熵值。熵是状态的单值函数。始末状态的熵变只取决于始态和末态，而与过程无关，不论过程是可逆的还是不可逆的。于是，有两种计算熵变的方法：一是先把熵变作为状态参量的函数求出来，然后代入状态参量计算熵变，如理想气体的熵变；二是利用(11-44)式计算熵变，要注意积分路径必须是连接始末两态的任意可逆过程，如果系统实际经历的是不可逆过程，那么必须设计一个连接同样始末两态的可逆过程来计算。

(2) 熵具有可加性

熵的可加性是指系统的总熵等于系统中各部分的熵的总和。根据熵的可加性，可定义非平衡态的熵。当系统处在非平衡态时，可把系统分成许多小部分，并认为每一小部分都处于平衡态，称为局域平衡，在这种局域平衡近似适用的条件下，各小部分的熵之和被定义为非平衡态的熵。

(3) 熵增加原理

可以利用卡诺定理证明，对于任意过程有

$$S_B - S_A \geqslant \int_A^B \frac{\mathrm{d}Q}{T}, \quad \mathrm{d}S \geqslant \frac{\mathrm{d}Q}{T} \tag{11-47}$$

式中等号适用于可逆过程，大于号适用于不可逆过程。

类似于从(11-42)式到(11-43)式，将卡诺定理推广到任意循环过程，有

$$\oint_{(A1B2A)} \frac{\mathrm{d}Q}{T} \leqslant 0$$

其中等号对应于可逆循环。我们假定 $B2A$ 是可逆过程。则

$$\int_{(A1B)} \frac{\mathrm{d}Q}{T} \leqslant -\int_{(B2A)} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{(A2B)} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = S_B - S_A$$

这里需要注意，只有在可逆过程中我们才可以把积分颠倒，表示过程逆向进行。对于过程 $A1B$，它可能是不可逆过程，因此无法逆向进行，积分不能颠倒。

当系统经历绝热过程时，$\mathrm{d}Q=0$，由(11-47)式得

$$\mathrm{d}S \geqslant 0 \tag{11-48}$$

式中等号适用于可逆绝热过程，大于号适用于不可逆绝热过程。上式可以表述为：

绝热过程中系统的熵永不减少；可逆绝热过程中熵不变，不可逆绝热过程中熵增加。

这就是熵增加原理。由于孤立系统与外界不发生任何相互作用，所以在孤立系统中进行的过程都是绝热过程，熵增加原理又可表述为：

NOTE

一个孤立系统的熵永不会减少。

如果孤立系统原来处于平衡态，则它将一直处于该平衡态；如果孤立系统原来处于非平衡态，则它将自发地从非平衡态变化到平衡态，这是不可逆过程。因此，孤立系统总是向熵增加的方向发展，达到平衡态时，熵增加到最大值。对于非孤立系统和非绝热系统，熵增加原理不适用。可将该系统与外界重新划分，视为更大的孤立系统或绝热系统，再应用熵增加原理判断过程可逆与否和过程进行的方向。熵增加原理指出了自发过程进行的方向可用熵变来判断（熵增加的方向）。当熵增加到最大值时，孤立系统达到平衡状态，这是过程进行的限度。熵增加原理是热力学第二定律的数学表述。因此我们可以知道，两种热力学第二定律的表述、卡诺定理和熵增加原理都是等价的。

（4）理想气体熵变的计算公式

根据（11-46）式，理想气体元过程的熵变为 $\mathrm{d}S=\dfrac{\mathrm{d}E+p\mathrm{d}V}{T}$。

由理想气体内能的公式得 $\mathrm{d}E=\dfrac{m}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}\mathrm{d}T$，由理想气体状态方程得 $\dfrac{p}{T}=\dfrac{m}{\mu}\cdot\dfrac{R}{V}$，代入 $\mathrm{d}S$ 公式得

$$\mathrm{d}S=\frac{m}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}T}{T}+\frac{m}{\mu}R\frac{\mathrm{d}V}{V} \tag{11-49}$$

对上式积分，得理想气体的熵变公式为

$$S_B-S_A=\int_A^B\mathrm{d}S=\frac{m}{\mu}C_{V,\mathrm{m}}\ln\frac{T_B}{T_A}+\frac{m}{\mu}R\ln\frac{V_B}{V_A} \tag{11-50}$$

只要知道理想气体初态的状态参量 T_A、V_A 和末态的状态参量 T_B、V_B，不论过程是可逆还是不可逆，都可代入上式计算熵变 S_B-S_A。

理想气体熵变公式也可用温度 T 和压强 p 或体积 V 和压强 p 表示。推导如下：由理想气体状态方程 $pV=\dfrac{m}{\mu}RT$ 微分得 $p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p=\dfrac{m}{\mu}R\mathrm{d}T$，再把两等式的左边与右边分别相除，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}T}{T} \tag{11-51}$$

将（11-49）式与（11-51）式联立消去 V，得用 T、p 表示的理想气体熵变微分式

$$\mathrm{d}S=\frac{m}{\mu}C_{p,\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}T}{T}-\frac{m}{\mu}R\frac{\mathrm{d}p}{p} \tag{11-52}$$

对上式积分得用 T、p 表示的理想气体熵变积分式

NOTE

$$S_B - S_A = \frac{m}{\mu} C_{p,\mathrm{m}} \ln \frac{T_B}{T_A} - \frac{m}{\mu} R \ln \frac{p_B}{p_A} \tag{11-53}$$

同理，将(11-49)式与(11-51)式联立消去 T，得到用 V、p 表示的理想气体熵变公式为

$$\mathrm{d}S = \frac{m}{\mu} C_{p,\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}V}{V} + \frac{m}{\mu} C_{V,\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}p}{p} \tag{11-54}$$

$$S_B - S_A = \frac{m}{\mu} C_{p,\mathrm{m}} \ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{m}{\mu} C_{V,\mathrm{m}} \ln \frac{p_B}{p_A} \tag{11-55}$$

例 5

1 mol 双原子分子理想气体，初态体积为 V_1，经自由膨胀，末态体积为 $V_2 = 2V_1$，求该过程的熵变。

解 用理想气体熵变公式计算。如图 11-13 所示，理想气体自由膨胀过程的初末态温度相等，即 $T_2 = T_1$。将初末态的状态参量 T_1、V_1、T_2、V_2 代入理想气体熵变公式(11-50)式，得所求过程熵变为

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \frac{m}{\mu} C_{V,\mathrm{m}} \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} = 1 \times 8.31 \times \ln 2 \ \mathrm{J/K} \\ &= 5.76 \ \mathrm{J/K} \end{aligned}$$

例 6

1 kg 水在 $p = 1.013 \times 10^5$ Pa 的压强下由 0 ℃的水变为 100 ℃的水蒸气，已知水的比热容 $c = 4.18 \times 10^3$ J/(kg · K)，汽化热 $\lambda = 2.25 \times 10^6$ J/kg，求熵变。

解 整个过程的熵变 ΔS 等于由 0 ℃的水变到 100 ℃的水过程的熵变 ΔS_1 加上由 100 ℃的水变到 100 ℃的水蒸气过程的熵变 ΔS_2。

先计算 ΔS_1。设想水的升温过程是一个可逆等压吸热过程，则 $\mathrm{d}Q_r = mc\mathrm{d}T$，熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q_r}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc\mathrm{d}T}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1} \\ &= 1 \times 4.18 \times 10^3 \times \ln \frac{373}{273} \ \mathrm{J/K} \\ &= 1.30 \times 10^3 \ \mathrm{J/K} \end{aligned}$$

再计算 ΔS_2。由于汽化过程温度不变，设想该过程是一个可逆等温过程，熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= \int_2^3 \frac{\mathrm{d}Q_r}{T} = \frac{1}{T_2} \int_2^3 \mathrm{d}Q_r = \frac{m\lambda}{T_2} \\ &= \frac{1 \times 2.25 \times 10^6}{373} \ \mathrm{J/K} \\ &= 6.03 \times 10^3 \ \mathrm{J/K} \end{aligned}$$

所以，整个过程的熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = 1.30 \times 10^3 + 6.03 \times 10^3 \ \mathrm{J/K} \\ &= 7.33 \times 10^3 \ \mathrm{J/K} \end{aligned}$$

例 7

试证明:(1)违背克劳修斯表述的过程熵变小于零;(2)违背开尔文表述的过程熵变小于零。

证 (1) 设有相互接触的两个物体 A 和 B,A 的温度为 T_A,B 的温度为 T_B,$T_A>T_B$。假如热量能自动地由低温物体 B 传向高温物体 A,在元过程中,B 放出热量 dQ,A 吸收热量 dQ($dQ>0$),因为 dQ 很小,可认为 T_A 与 T_B 不变,故可用可逆等温过程计算物体 B 和物体 A 的熵变,分别为

$$dS_B=\frac{-dQ}{T_B},\quad dS_A=\frac{dQ}{T_A}$$

熵具有可加性,系统的熵等于系统各部分的熵之和。所以,元过程中 A 和 B 组成的孤立系统的熵变为

$$dS=dS_A+dS_B=\frac{dQ}{T_A}-\frac{dQ}{T_B}$$

因为 $T_A>T_B$,故 $dS<0$。得证。

(2) 假设有一台热机从单一恒温热源吸热,完全变为有用的功,而不产生其他影响。设恒温热源的温度为 T,热机在一个循环中从该热源吸收的热量为 Q。在一次循环中,热源的熵变为 $\Delta S_1=\frac{-Q}{T}$,热机的熵变为 $\Delta S_2=0$,因此热源和热机组成的绝热系统的熵变为

$$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2=\frac{-Q}{T}<0$$

证毕。

11-7 热力学第二定律的统计意义

NOTE

热力学第二定律的实质是指出自然界中一切与热现象有关的实际宏观过程都是不可逆过程。现以理想气体的自由膨胀为例,从微观上说明热力学第二定律的统计意义。为了简单起见,设气体中只有 4 个分子 a、b、c、d。如图 11-13 所示,抽掉隔板前这些分子只能在左室运动;隔板抽掉后,分子将在整个容器中作无规则运动:一会儿在左室,一会儿在右室。由于左、右两室容积相等,一个分子在左、右两室出现的概率相等,都是 1/2。所以,就单个分子来说,它回到左室的概率是很大的。然而对于气体中所有的 4 个分子,它们都回到左室的概率就小了。若按左、右两室来说明容器中分子位置的分布,则 1 个分子在容器中的分布方式有 2 种,4 个分子在容器中的分布方式有 $2^4=16$ 种,如表 11-2

NOTE

所示。因此，4 个分子全部回到左室的概率是$\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$。当气体中有 N 个分子时，这些分子在左、右两室的分布方式有 2^N 种。N 个分子同时回到左室的概率是 $1/2^N$，而气体中分子总数 N 很大，因此这个概率非常小，实际上这种情况不会发生。由此可见，理想气体自由膨胀过程的不可逆性具有统计意义，即只适用于大量分子的情况。

a、b、c、d 各个分子的具体位置所描述的状态，称为系统的一个微观态(microscopic state)。而左室和右室中分子的数目所描述的状态，称为系统的宏观态，故宏观态由分子分布数目情况决定。如表 11-2 所示，4 个分子自由膨胀后有 16 个微观态、5 个宏观态。统计物理学假设：对于孤立系统，各微观态出现的概率相同。对应于给定宏观态的等概率微观态数目称为该宏观态的热力学概率，用 W 表示。表 11-2 中序号为 1、2、3、4、5 的宏观态的热力学概率分别为 1、4、6、4、1。系统可取的微观态总数称为系统的热力学概率，用 Ω 表示。显然，系统的热力学概率等于其各宏观态的热力学概率之和，即 $\Omega=\sum_i W_i$。如上所述，若按左、右两室来区别分子状态，含 N 个分子的理想气体在自由膨胀过程中，初态位于左室，系统的热力学概率 $\Omega_1=1$；经自由膨胀后，气体充满整个容器，系统的热力学概率 $\Omega_2=2^N$。由此可见，理想气体的自由膨胀过程是由热力学概率小的状态向热力学概率大的状态方向进行的。相反的方向，在外界不发生任何影响的条件下，实际上是不可能发生的。

表 11-2 4 个分子在容器左、右两室的分布情况

微观态	左室	abcd	abc	abd	acd	bcd	ab	ac	ad	bc	bd	ca	a	b	c	d	
	右室		d	c	b	a	cd	bd	bc	ad	ac	ab	bcd	acd	abd	abc	abcd
	序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
宏观态	左室	4	3				2						1				0
	右室	0	1				2						3				4
	序号	1	2				3						4				5
	热力学概率 W	1	4				6						4				1
系统的热力学概率 $\Omega=16$																	

系统处于平衡态时，分子在容器内均匀分布，因此平衡态对应热力学概率最大的宏观态，该宏观态称为最概然宏观态。

NOTE

实际上，由于存在涨落，平衡态应视为对应容器内左、右两室分子数相等或差不多相等的那些宏观态。计算表明，分子总数越多，左、右两室分子数相等或差不多相等的那些宏观态对应的微观态数占系统微观态总数的比例越大。对于分子总数 $N=33$ 的系统，分子数按左、右两室分布的宏观态共有 34 种，表 11-3 列出了其中左室分子数 $n\approx N/2$ 的 6 种宏观态的微观态数，它们所包含的微观态数是系统的微观态总数的 70%。由于实际系统 N 很大，这一比例几乎是 100%。系统由非平衡态向平衡态变化，是由热力学概率小的宏观态向热力学概率大的宏观态变化。

表 11-3 33 个分子的位置分布

系统的热力学概率 $\Omega=2^{33}=8\ 589\ 934\ 592$

宏观状态			宏观态的热力学概率 $W=\dfrac{N!}{n!(N-n)!}$	W/Ω
序号	左(n)	右($N-n$)		
1	14	19	818 809 200	0.095 3
2	15	18	1 037 158 320	0.120 7
3	16	17	1 166 803 110	0.135 8
4	17	16	1 166 803 110	0.135 8
5	18	15	1 037 158 320	0.120 7
6	19	14	818 809 200	0.095 3
$\sum_{i=1}^{6} W_i = 6\ 045\ 541\ 260$				$\dfrac{\sum_{i=1}^{6} W_i}{\Omega} = 0.703\ 8$

1. 玻耳兹曼关系

根据熵增加原理，理想气体自由膨胀过程系统的熵增加。如前所述，理想气体自由膨胀过程系统的热力学概率增大。因此，系统的熵和热力学概率之间必然存在联系。

熵具有可加性，熵分别为 S_1 和 S_2 的两个独立系统组成的联合系统的熵为 $S=S_1+S_2$。热力学概率具有可乘性，热力学概率分别为 Ω_1 和 Ω_2 的两个独立系统组成的合系统的热力学概率为 $\Omega=\Omega_1\Omega_2$。例如，理想气体自由膨胀过程中，4 个分子组成的系

NOTE

统的热力学概率 $\Omega_1=2^4$；5 个分子组成的系统的热力学概率 $\Omega_2=2^5$；这两个系统组成的联合系统有 9 个分子，其热力学概率为 $\Omega=2^9$，即 Ω 具有相乘性：$2^9=2^4\times2^5$。① 由熵的可加性和热力学概率的相乘性可以证明熵与热力学概率的函数形式是自然对数，即

$$S=f(\Omega)=C\ln\Omega$$

现由理想气体自由膨胀的特例，确定上式中的常量 C。例 5 算出，理想气体自由膨胀过程的熵变为 $S_2-S_1=\frac{m}{\mu}R\ln\frac{V_2}{V_1}$，而由熵与热力学概率的对数关系得 $S_2-S_1=C(\ln\Omega_2-\ln\Omega_1)=C\ln\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$，由以上两式得

$$\frac{m}{\mu}R\ln\frac{V_2}{V_1}=C\ln\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

将 $\frac{V_2}{V_1}=2$，$\frac{\Omega_2}{\Omega_1}=2^N$ 代入上式得

$$C=\frac{m}{\mu}\frac{R}{N}=\frac{R}{N_A}=k$$

即该常量等于玻耳兹曼常量。所以，熵与热力学概率的关系式为

$$S=k\ln\Omega \tag{11-56}$$

称为玻耳兹曼关系。上式表明，系统的熵正比于系统的热力学概率的自然对数。

根据玻耳兹曼关系和熵增加原理，在孤立系统或绝热系统中，系统的热力学概率永不减少，不可逆过程热力学概率增加，可逆过程热力学概率不变。这就是热力学第二定律的统计意义。

2. 从有序到无序

如果系统只有一个微观态，即 $\Omega=1$，根据玻耳兹曼关系，系统的熵 $S=0$。这种系统是完全有序的，每个分子的状态能被唯一

① 这里有一个所谓的吉布斯佯谬。比如 4 个分子处于左边，4 个分子处于右边，中间用隔板分开。当两边分子不一样时，这时的熵为零，拉开隔板后，分子扩散到全空域，左边分子熵增为 $4k\ln2$，右边分子熵增为 $4k\ln2$，合计熵增为 $8k\ln2$。当两边分子全同（完全一样，比如都是氧气）时，隔板拉开和没有拉开完全不可分辨，因此拉开后熵增为零，即系统的熵始终是 $8k\ln2$。因此这两堆分子是否为完全独立的子系统还依赖于分子的全同性。吉布斯佯谬的问题是：如果两堆不相同的分子无限趋于全同，熵的变化会有个不连续点，这难以让人接受。这个问题还属于未解之谜。

NOTE

地确定。当系统变化到包含多个微观态时，其 $\Omega>1$，$S>0$，系统中每个分子的状态不可能唯一地确定，这时系统由有序变化到无序。系统所包含的微观状态数越多，系统就越无序，系统的热力学概率和熵也越大，故系统的熵是系统无序性的量度。这就是熵的统计意义。所有从有序到无序的变化过程，随着无序程度的增加，系统的熵值也随之增加。例如功变为热的过程是大量分子的定向有序运动转变为无序的热运动，系统的无序性增加了，熵也增加了。

由玻耳兹曼关系得熵变公式为 $S_2-S_1=k\ln\dfrac{\Omega_2}{\Omega_1}$，上式与(11-50)公式联立得

$$\ln\frac{\Omega_2}{\Omega_1}=\frac{m}{\mu}\frac{R}{k}\left(\frac{i}{2}\ln\frac{T_2}{T_1}+\ln\frac{V_2}{V_1}\right)=N\ln\frac{V_2T_2^{i/2}}{V_1T_1^{i/2}}$$

因此

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1}=\left(\frac{V_2T_2^{i/2}}{V_1T_1^{i/2}}\right)^N \tag{11-57}$$

上式表明，系统体积或温度的增加都能使系统的热力学概率增大，因而系统的无序性增大。当初态和末态温度相同时，由上式得$\dfrac{\Omega_2}{\Omega_1}=\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^N$，这正是理想气体自由膨胀过程因体积增大而使系统所包含的微观态总数增大的定量关系。

11-8 热泵

热泵是一种热回收装置，它的工作原理与致冷机相同，都是利用工作物质的逆循环过程，通过外界做功，从低温热源吸热，在高温热源放出热量。热泵的热功转化情况如图 11-17 所示，如果外界对工作物质所做的功为 W，工质从低温热源吸取热量 Q_2，在高温热源放出热量的数值为 Q_1。则在一次循环过程中，由于工质的热力学能增量为零，根据热力学第一定律，得

$$Q_1=Q_2+W \tag{11-58}$$

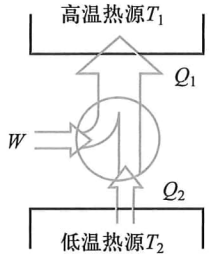


图 11-17 热泵的能流图

虽然热泵和致冷机都工作于逆循环，且热功转化的情况类似，但它们有不同的工作目的，因而它们的效能也不同。致冷机从低温热源吸热，在高温热源放热，其目的是进一步降低低温热源温度。因此，致冷机的效能可用制冷系数 w 来衡量，即工作物

质从低温热源吸取的热量 Q_2 和外界对工质所做的功 W 的比值：

$$w=\frac{Q_2}{W} \tag{11-59}$$

热泵的工作目的是实现工质向高温热源放出热量 Q_1（放热的数值），故热泵的效能用高温热源放出的热量 Q_1 与外界对工质所做的功 W 的比值来衡量，称为制热系数：

$$\varepsilon=\frac{Q_1}{W}=1+\frac{Q_2}{W} \tag{11-60}$$

不难得到 $w=\varepsilon-1$，该结果表明，对同一逆循环过程的装置，用作热泵时的效能比作为致冷机时高。其原因是在一个完整的逆循环过程中，热泵不仅将从低温热源处吸收的热全部转化为高温热源处放出的热，而且外界对工质所做的功也全部转化为高温热源处放出的热。

如果理想热泵利用工作物质进行逆向卡诺循环，高温热源和低温热源的温度分别为 T_1 和 T_2，则热泵的制热系数可表示为

$$\varepsilon=\frac{Q_1}{W}=\frac{T_1}{T_1-T_2}=\frac{1}{\eta_c} \tag{11-61}$$

上式表明，理想热泵的制热系数为卡诺热机效率 η_c 的倒数，它也取决于高温热源的温度 T_1 和低温热源的温度 T_2。如果两热源的温差越小，制热系数就越大。

与致冷机的系统结构类似，压缩式热泵的循环系统如图 11-18 所示，它也由压缩机、冷凝器、节流阀和蒸发器所组成。通过蒸发器，低压低温的液态工作物质从低温热源吸取热量后蒸发变为低压蒸气。然后由压缩机做功，将气态工作物质压缩成高温高压的气体。随即工作物质进入冷凝器中，在高温热源处放出热量，把热量传给高温热源。接着工作物质通过节流阀膨胀后又冷凝成为低压低温的液态工质，最后再次进入低温热源处的蒸发器，开启新一轮的循环过程。

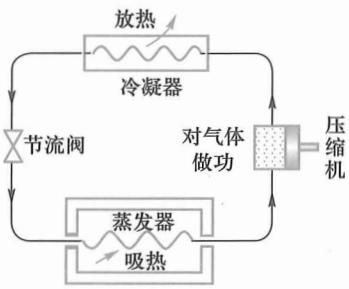


图 11-18 热泵的结构

热泵可以用于制热空调给房间供暖，这时需将蒸发器放置在室外（低温热源），而将冷凝器放置在室内（高温热源）。如果外界空气比室内空气更冷时，通过压缩机的做功，热泵可以从室外的冷空气（即低温热源）中吸收热量，然后把这些热量送入室内（即高温热源）并放出热量。实验表明，在消耗同样能量的情况下，热泵比纯粹使用电热器供暖为室内提供更多的热量；而在为室内提供同样热量的情况下，热泵比电热器供暖消耗更少的能量，达到明显的节能效果。综上所述，热泵通过压缩机的做功实现了热量从低温热源向高温热源的传递，从而提高了能源的有效

利用率，达到节能的目的。

本章摘要

NOTE

1. 准静态过程、可逆过程、不可逆过程

准静态过程：过程进行中的所有中间状态都无限接近于平衡态。

可逆过程：过程产生的系统和外界的变化都可以通过逆过程或其他过程完全复原。

无摩擦的准静态过程是可逆过程。实际的宏观过程都是不可逆过程，如摩擦生热、热传导、气体自由膨胀等。

2. 热力学第一定律

$$dQ=dE+dW,\quad Q=E_2-E_1+W$$

理想气体的内能增量：$E_2-E_1=\frac{m}{\mu}C_{V,m}(T_2-T_1)$

准静态过程中理想气体做的功：$W=\int_{V_1}^{V_2}p\,dV$

热量：$Q=\frac{m}{\mu}C_m(T_2-T_1)$

理想气体的四种准静态过程（表 11-1）。

3. 热容

$$C=\frac{dQ}{dT}$$

比热容：$c=\frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}$

摩尔热容：$C_m=\frac{1}{\nu}\frac{dQ}{dT}$

理想气体摩尔定容热容：$C_{V,m}=\frac{i}{2}R$

理想气体摩尔定压热容：$C_{p,m}=\frac{i+2}{2}R$

迈耶公式：$C_{p,m}-C_{V,m}=R$

比热容比：$\gamma=\frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}=\frac{i+2}{i}$

4. 循环

循环特征：$\Delta E=0,\quad W=Q_1-Q_2$

NOTE

热机效率：$\eta=\dfrac{W}{Q_1}$，　$\eta=1-\dfrac{Q_2}{Q_1}$

致冷机的致冷系数：$w=\dfrac{Q_2}{W}$，　$w=\dfrac{Q_2}{Q_1-Q_2}$

卡诺循环：$\eta_{卡}=1-\dfrac{T_2}{T_1}$

卡诺逆循环：$w_{卡}=\dfrac{T_2}{T_1-T_2}$

5. 热力学第二定律：开尔文表述和克劳修斯表述

热力学第二定律是关于热力学过程进行方向的规律，其实质是指出一切实际的宏观过程都是不可逆过程。

熵增加原理是热力学第二定律的数学表述，在孤立系统或绝热系统中，$dS\geqslant 0$。

热力学第二定律的统计意义是：在孤立系统或绝热系统中，不可逆过程总是由热力学概率小的状态向热力学概率大的状态变化；总是向无序性增加的方向进行。

6. 熵是系统的状态函数

熵变：　$dS=\dfrac{dQ_r}{T}$，　$S_B-S_A=\int_A^B\dfrac{dQ_r}{T}$

理想气体的熵变：$S_B-S_A=\dfrac{m}{\mu}C_{V,m}\ln\dfrac{T_B}{T_A}+\dfrac{m}{\mu}R\ln\dfrac{V_B}{V_A}$

$$S_B-S_A=\frac{m}{\mu}C_{p,m}\ln\frac{T_B}{T_A}-\frac{m}{\mu}R\ln\frac{p_B}{p_A}$$

$$S_B-S_A=\frac{m}{\mu}C_{p,m}\ln\frac{V_B}{V_A}+\frac{m}{\mu}C_{V,m}\ln\frac{p_B}{p_A}$$

玻耳兹曼关系：　$S=k\ln\Omega$

熵是系统无序性的一种量度。

思考题

11-1　热力学第一定律的物理意义是什么？它的数学表达式中各量的正负号是如何规定的？

11-2　为什么要引入可逆过程的概念？准静态过程是否一定是可逆过程？可逆过程是否一定是准静态过程？有人说："凡是有热接触的物体，它们之间进行热交换的过程都是不可逆过程。"这种说法对不对？为什么？

11-3　什么是摩尔热容？摩尔定压热容为什么大于摩尔定容热容？绝热过程的摩尔热容是多少？等温过程的摩尔热容是多少？

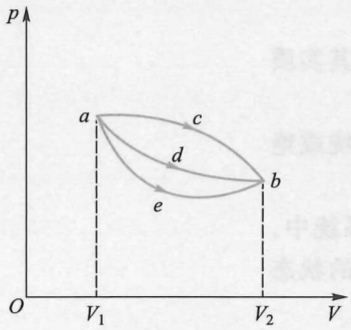
11-4　在 p-V 图上，通过同一点的绝热线的斜率为什么比等温线的大？

11-5　试分析理想气体在如图所示的三个过程

中的 ΔE、W、Q 的正负(或零),其中过程 adb 是绝热过程,将结果填入表格内。

思考题 11-5 表 刚性气体分子自由度

过程	acd	adb	aeb
ΔE			
W			
Q			



思考题 11-5 图

11-6 对于一定量的理想气体,下列过程是否有可能实现?

(1) 恒温下的绝热膨胀;

(2) 体积不变而温度上升,并且是绝热过程;

(3) 吸热而温度不变;

(4) 对外做功,同时放热。

11-7 循环过程的特征是什么?什么是卡诺循环?热效率如何定义?要提高热效率,应从哪些方面考虑?

11-8 解释下列两种现象:

(1) 为什么热空气能上升?

(2) 由于热空气上升,在室内,天花板附近的空气温度最高;但在室外高空处,为什么越高温度越低?

11-9 将一杯热水置于空气中冷却,最后与周围环境达到热平衡。在此过程中,水的熵下降了,这是否违反熵增原理?为什么?

11-10 有人设想制造一部机器,利用海洋表面与底面的温差来对外做功,这部机器是否为永动机?能否实现?

11-11 热力学第二定律的实质是什么?如何用熵来判断过程进行的方向和限度?

11-12 判断下列说法是否正确,并解释为什么。

(1) 由热力学第一定律可以证明任何热机的热效率不可能等于 1;

(2) 由热力学第一定律可以证明任何卡诺循环的热效率都等于 $1-(T_2/T_1)$;

(3) 有规则运动的能量能够转化为无规则运动的能量,但无规则运动的能量不能转化为有规则运动的能量。

11-13 在一个封闭的房间里,有一台电冰箱正在工作。如果打开电冰箱的门,会不会使房间降温?会使房间升温吗?

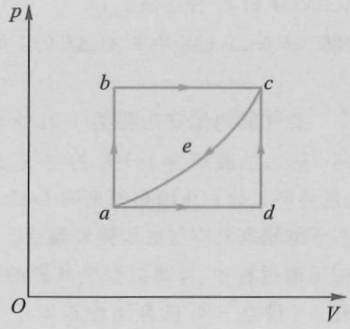
习题

11-1 设 1mol 氮气作极其缓慢的减压膨胀,其压强与体积的关系为 $p=(40-4\,000V)\times10^5$ Pa。开始时,气体的体积 $V_1=1\times10^{-3}\ m^3$;终止时,气体的体积 $V_2=4\times10^{-3}\ m^3$。求该氮气在上述过程中做的功、吸收的热量和内能的增量。

11-2 如图所示,一系统由 a 态出发,沿 abc 到达 c 态,吸收了 400 J 的热量,并对外做功 200 J,问:

(1) 沿 adc 过程,系统对外做功 100 J,吸收多少热量?

(2) 系统由 c 态沿曲线 cea 返回 a 态时,若外界对系统做功 130 J,系统吸热还是放热?热量传递是多少?

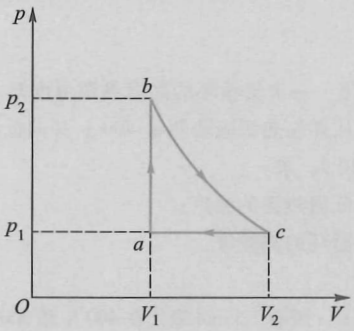


习题 11-2 图

11-3 质量 $m=2.8\times10^{-3}$ kg 的氮气，经历如图所示的 $abca$ 过程。其中，ab 是等容过程，bc 是等温过程，ca 是等压过程。已知 $p_1=1.0\times10^5$ Pa，$p_2=3p_1$，$T_a=300$ K，求：

(1) V_1、V_2、T_b；

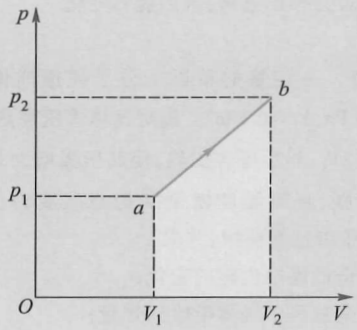
(2) ab、bc、ca 三过程中的 W、ΔE、Q。



习题 11-3 图

11-4 10 mol 单原子分子理想气体在压缩过程中，外力对它做功 209 J，气体温度升高 1 K，求气体内能的增量。在此过程中气体吸收的热量和气体的摩尔热容为多少？

11-5 如图所示，某种双原子分子气体从状态 a 缓慢变化到状态 b。已知 $p_2=2p_1$，$V_2=2V_1$，求该气体的摩尔热容。

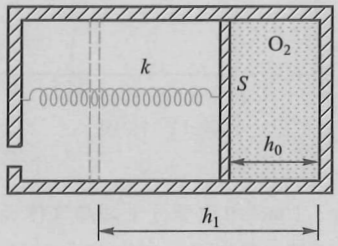


习题 11-5 图

11-6 一圆柱形气缸横截面积为 $S=0.06$ m^2，气缸内活塞用弹性系数为 $k=1.0\times10^4$ N/m 的弹簧与气缸的左端壁相连接，如图所示。不计活塞与气缸壁之间的摩擦。气缸的左室通大气，大气压强为 $p_0=1.0\times10^5$ Pa；右室内盛有 0.1 mol 的氧气。当氧气温度 $T=300$ K 时，活塞处于平衡状态，此时弹簧处于自然伸展状态，活塞离气缸右端壁的距离为 $h_0=0.04$ m。今将氧气慢慢加热，使活塞向左移动到 $h_1=0.1$ m，试问：

(1) 此过程中，氧气对外做的功为多少？

(2) 氧气的内能增加多少？



习题 11-6 图

11-7 1 mol 双原子分子理想气体由同一状态 (p_0,V_0,T_0) 出发，分别经过：(1)等压过程、(2)等温过程、(3)绝热过程，体积都增加到 $2V_0$，求这三个过程中气体的温度变化、对外做的功和吸收的热量。

11-8 今有 0.016 kg 的氧气在标准状况下经过下列过程并吸收 300 J 热量：

(1) 若为等温过程，求终态体积；

(2) 若为等容过程，求终态压强；

（3）若为等压过程，求内能的变化。

11-9 一定量的单原子分子理想气体初态为 $p_1=1\times10^5$ Pa，$V_1=0.1$ m^3。先对气体等压加热，使其体积膨胀为 $2V_1$；然后等容加热，使其压强增大为 $2p_1$；最后绝热膨胀，直到温度恢复到初态温度为止。试在 p-V 图上作出过程曲线，并求：

（1）全过程中内能的变化；

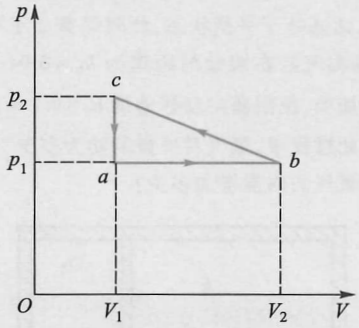
（2）全过程中气体吸收的热量；

（3）全过程中气体所做的功。

11-10 0.1 mol 氦气经历如图所示的 $abca$ 过程。已知 $p_1=1.0\times10^5$ Pa，$p_2=1.5\times10^5$ Pa，$V_1=1.0\times10^{-3}$ m^3，$V_2=3.0\times10^{-3}$ m^3，试求：

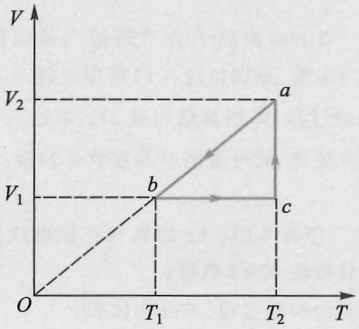
（1）T_a、T_b、T_c；

（2）bc 过程中的 W、ΔE 和 Q。



习题 11-10 图

11-11 1 mol 单原子分子理想气体经历如图所示的 $abca$ 过程。已知 $V_1=2.0\times10^{-2}$ m^3，$T_1=300$ K，$T_2=600$ K，试求：



习题 11-11 图

（1）a 点的体积 V_2 和压强 p_a；

（2）判断 ab、bc、ca 过程中 W、Q、ΔE 的正负（或零）。

11-12 某气缸内储有压强为 1.013×10^5 Pa、体积为 10^{-2} m^3、热力学温度为 283 K 的空气，今将空气绝热压缩，最终空气体积压缩到原来的 1/12。试求：

（1）在压缩结束时空气的压强和温度；

（2）在压缩过程中，外界对空气所做的功及气体内能的变化。（设空气可视为刚性双原子分子理想气体）

11-13 在 1.013×10^5 Pa 压强下，1 mol 水在 100℃时变成水蒸气，问它的内能增加多少？已知在此温度和压强下，水和水蒸气的摩尔体积分别为 $V_{m水}=1.88\times10^{-6}$ m^3/mol，$V_{m气}=3.10\times10^{-2}$ m^3/mol，水的汽化热为 $\lambda=4.06\times10^4$ J/mol。

11-14 证明一条等温线与一条绝热线不能有两个交点。

11-15 一卡诺循环的高温热源温度是 400 K，每一次循环从高温热源吸收热量 400 J，并向低温热源放出热量 320 J。求：

（1）低温热源的温度；

（2）循环的热效率。

11-16 现有 1.5 mol 氧气在 400 K 和 300 K 之间作卡诺循环。已知循环中氧气的最小体积为 1.2×10^{-2} m^3，最大体积为 4.8×10^{-2} m^3。计算该氧气在此循环中所做的功，以及从高温热源吸收的热量和向低温热源放出的热量。

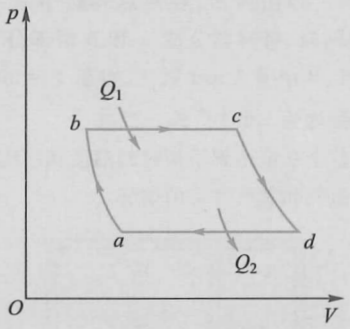
11-17 设想利用表层海水和深层海水的温差来制成热机。已知热带水域表层水温约为 25℃，300 m 深处水温约为 5℃。问：

（1）在这两个温度之间工作的卡诺热机的效率有多大？

（2）如果有一发电站在最大理论效率下工作时获得的机械功率为 1 MW，则该发电站每秒将排出多少废热？

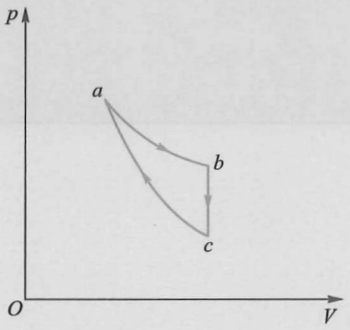
11-18 喷气发动机内的工作循环可近似地用如图所示的循环来表示。其中 ab、cd 分别代表绝热过程，bc、da 分别代表等压过程。试证明当发动机内的工作物质为理想气体时，该循环的热效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_d}{T_c} = 1 - \frac{T_a}{T_b}$$



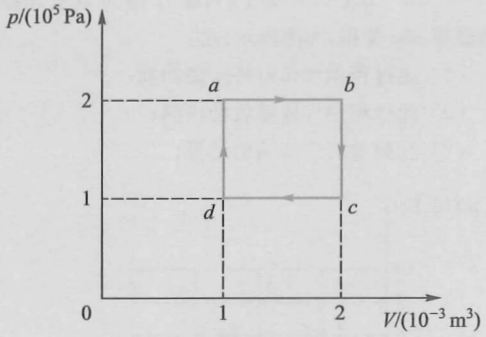
习题 11-18 图

11-19 1 mol 双原子分子理想气体经历如图所示的循环 $abca$，其中 ab 是等温过程，bc 是等容过程，ca 是绝热过程。试求该循环过程的热效率。（已知 $T_a = 500\ \mathrm{K}$，$T_c = 300\ \mathrm{K}$）



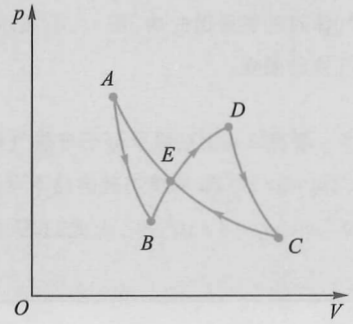
习题 11-19 图

11-20 1 mol 理想气体氦经历如图所示的循环，求该循环的热效率。



习题 11-20 图

11-21 如图所示，AB 和 DC 是绝热过程，CEA 是等温过程，BED 是任意过程，它们组成 $ABEDCEA$ 循环。若 EDC 面积表示的功是 70 J，EAB 面积表示的功为 30 J，CEA 过程中放出热量 100 J，求 Q_{BED} 及循环的热效率 η。



习题 11-21 图

11-22 一台可视为理想卡诺致冷机的家用冰箱处在室温为 27 ℃ 的房间内，设做一盘 -13 ℃ 的冰块需从冷冻室取走 2.09×10^5 J 的热量。

（1）求做一盘冰块所需要的功；

（2）若此冰箱能以 2.09×10^2 J/s 的速率取出热量，求此冰箱所要求的电功率；

（3）求做上述冰块所需的时间。

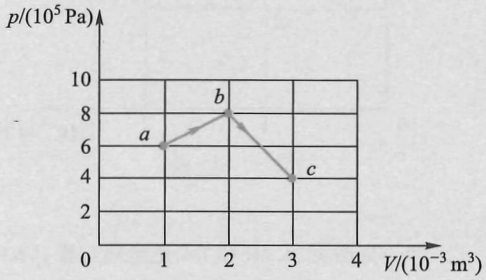
11-23 将温度为 20 ℃ 的 1 kg 水放到 100 ℃ 的炉子上加热，最后水也被加热到 100 ℃，已知水的比热容为 4.18×10^3 J/(kg · K)。试问上述过程中水和炉子的熵分别变化了多少？

11-24 0.1 mol 氧气(可视作刚性分子理想气体)经历 abc 过程,如图所示,求:

(1) 此过程中气体对外所做的功;

(2) 此过程中气体吸收的净热;

(3) 过程前后气体熵的增量。



习题 11-24 图

11-25 1 mol 双原子分子理想气体,体积由 V_0 膨胀到 $4V_0$,过程方程为 pV^2 = 常量,求:

(1) 气体对外界所做的功(用 p_0、V_0 表示);

(2) 气体的熵变。

11-26 现有 2 mol 双原子分子理想气体由 $V_0 = 10\times10^{-3}\ \mathrm{m}^3$,$p_0 = 5\times10^5\ \mathrm{Pa}$ 的状态经绝热不可逆膨胀到 $V_1 = 20\times10^{-3}\ \mathrm{m}^3$,$p_1 = 3\times10^5\ \mathrm{Pa}$,求此过程中气体的熵变。

11-27 已知在 0 ℃,1 mol 的冰熔化为 1 mol 的水需要吸热 6 000 J,求:

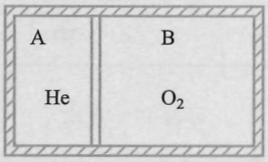
(1) 在 0℃时,这些冰化为水过程中的熵变;

(2) 0℃时这些水的微观状态数与冰的微观状态数之比。

11-28 如图所示,在绝热容器中有一可移动且导热的隔板,将容器分成 A 和 B 两部分。A 中有 1 mol 氦气,B 中有 1 mol 氧气,初态 $T_A = 300\ \mathrm{K}$,$T_B = 600\ \mathrm{K}$,压强均为 $1.0\times10^5\ \mathrm{Pa}$。试求:

(1) 整个系统达到平衡时的温度和压强;

(2) 氦气和氧气各自的熵变。



习题 11-28 图

习题答案

第十二章　静　电　场

从本章开始，我们进入电磁学部分的学习，我们将会看到电磁学与牛顿力学有很大区别，电磁学与牛顿力学等共同构成了经典物理大厦。本章讨论的是真空中的静电场。我们将从库仑定律和电场叠加原理出发，介绍反映静电场基本性质的两条基本原理——高斯定理和静电场环路定理；然后从电荷在静电场中的受力和电荷在静电场中移动时静电力对电荷所做的功两个方面引入描述静电场特性的两个基本物理量——电场强度和电势；最后讨论电场强度和电势的关系。



本章补充资源

12-1　电荷

NOTE

关于自然界中的四种基本相互作用，我们已介绍了万有引力相互作用，现在我们来讨论另一种基本相互作用——电磁相互作用。

如果一个电子和一个质子在相隔距离等于氢原子半径 $R_H = 5.29\times10^{-11}$ m 时，它们之间的万有引力为

$$F = G\frac{m_p m_e}{R_H^2} = 3.63\times10^{-47}\ \text{N}$$

除了万有引力外，电子和质子之间还有另外一种相互作用力，称为静电力，简称电力。在上述同样距离的情况下，电力的大小为 8.23×10^{-8} N，是万有引力的约 2.27×10^{39} 倍。这种比万有引力强得多的力也遵循平方反比律。

众所周知，一般物质都是由电子、质子和中子等微观粒子构成的。如果电子和质子之间以及电子与电子之间的静电力比万有引力大很多个数量级，那么，为什么对一般的巨大物体，我们只观察到它们之间的万有引力呢？这是因为自然界有两种电荷：正电荷和负电荷。两种同号电荷之间互相排斥，两种异性电荷互相吸引。所以异性电荷之间由于吸引而聚集在一起。而这个世界

NOTE

中正负电荷数目相等，因此通常情况下物质都保持电中性，在较远的距离处，互相之间感受不到静电力（中性原子、分子靠得很近时还是会感受到静电力的）。

万有引力的力源是质量，而静电力的力源是电荷。电荷同质量一样，是粒子的属性，电荷和质量分别表示粒子在相互作用中所受到的静电力和万有引力的强度。这两种力是互不相关的。因此，在物体的质量与电荷之间不存在固定的关系。质量是正的，所以物质之间只有相互吸引的引力，而不存在“万有斥力”。①

电荷之间的排斥力很容易显现出来，只要用一块毛织物摩擦两个气球。因为羊毛原子上的外层电子摩擦时被气球俘获，所以两个气球都带负电。这时，如果把一个气球移到另一个气球附近，则在两个气球尚未接触时，一个气球就将另一个气球推开了。

电荷的正负目前仍沿用富兰克林（B.Franklin）的命名方法，即在被丝绸摩擦过的玻璃棒上产生的电荷称为正电荷，在被毛皮摩擦过的硬橡胶上产生的电荷称为负电荷，这种命名完全是历史的偶然性造成的。

实验表明，在自然界中，任何带电粒子所带的电荷不可能少于一个电子所带的电荷，也就是说，一个电子所带的电荷为电荷的基本单位，它等于 1.60×10^{-19} C，通常用符号 e 表示，称为元电荷。正电子和质子所带的正电荷量与电子带的负电荷量完全相等。最新的实验得出结论：电子与质子电荷相等的精度达到 $1/10^{20}$。这是对电荷守恒的高精度验证。电荷这种有最小单元的性质，称为电荷量子化。它表明电荷的改变不是连续的。电荷量子化的原因是自然界都是由“基本粒子”构成的，“基本粒子”所带的电荷即为电荷的基本单元。需要说明的是，现代粒子物理研究表明，最小的电荷单位由组成质子的夸克携带，不同类型的夸克所携带电荷量分别为 $\pm e/3$、$\pm 2e/3$。这只能说明最小单元变小了，并不改变量子化的本质。

电荷可以消失，也可以重新产生，但符号不同的两种电荷总是同时产生或同时消失的。例如，电子和正电子在相遇时将湮没，转变为中性的 γ 光子。在这种情况下，电荷 $-e$ 和 $+e$ 都消失了。在电子偶的产生过程中②，坠入原子核场中的 γ 光子转变为一对粒子，即电子和正电子。在这种情况下，电荷 $-e$ 和 $+e$ 产生了。

由此可见：

① 现在的宇宙学研究表明，宇宙中似乎存在一种互相排斥的物质，称为暗能量。

② 电子偶是由一个电子和一个正电子组成的。这个“奇异”的原子能够存在 1/10 μs 左右的时间。

对于任何一个物理过程，总电荷是不变的，因此一个封闭系统，总电荷也是不会改变的。

这个结论称为电荷守恒定律，这是物理学最基本的定律之一。电荷守恒定律已被很多精确的实验所证实，包括前面所说的对电子电荷和质子电荷绝对值恒等的高精度验证。我们注意到电荷守恒与粒子的运动状态无关，因为最初的粒子和末态粒子的速度不一样，而且可以变换参考系进行观测。因此粒子电荷的大小与粒子的运动状态无关，是相对论不变量，这和质量有明显的区别。

12-2 库仑定律

NOTE

很早以前，科学家就猜想电荷之间的作用力类似于万有引力，其大小与距离的平方成反比。在库仑之前，对此进行实验验证的包括英国物理学家罗宾逊(J. Robison，1766 年)和卡文迪什(H. Cavendish，1773 年)，他们都在很高精度下得到静电力平方反比律，可惜都没有公开发表。特别是卡文迪什的实验用到了静电屏蔽。这个方法在现代可以把精度提高到 10^{-16}。(静电屏蔽是平方反比律的重要结果，虽然卡文迪什是通过类比万有引力得到这个结果的。)

库仑定律是库仑(C.A.Coulomb)于 1785 年通过实验确定的。所谓点电荷(point charge)，是指线度与它跟其他带电物体的距离相比，可以忽略的带电体。

库仑用类似于卡文迪什确定引力常量时所用的扭秤装置，测量了两个带电小球之间的相互作用力与两球所带的电荷量及两球间距离的关系。库仑根据实验结果得出结论：

两个静止点电荷之间的相互作用力与两者的电荷量之积成正比，而与两者间距离的平方成反比。力的方向在两电荷的连线上。

这就是库仑定律的全部内容。

需要指出的是，相互作用力方向应沿连接两个点电荷的直线，这也是从对称性考虑得出的结论。

由于空间被认为是均匀的、各向同性的，所以对被移入该空间的两个静止点电荷而言，由一个点电荷指向另一个点电荷的方向是能够标出的唯一方向。假定作用于电荷 q_1 上的力 $\boldsymbol{F}$ 与由 q_1 指向 q_2 的方向的夹角不是零或 π，而是某一角度 θ，如图 12-1 所

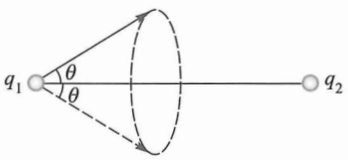


图 12-1 力沿 q_1、q_2 的连线方向

示。以电荷为起点沿锥面(与 q_1 q_2 轴成 θ 角)出发的所有直线都是力 $\boldsymbol{F}$ 所允许的方向,这样力的方向就不能唯一确定,只有在 θ 等于零或 π 时,方向才是唯一的。

库仑定律可以用矢量的形式简洁地表示为

$$\boldsymbol{F}_2 = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r = -\boldsymbol{F}_1 \tag{12-1}$$

式中 k 是由单位制决定的比例系数,通常称为库仑常量。q_1 和 q_2 分别是两个相互作用的点电荷的电荷量,r 是两点电荷间的距离,$\boldsymbol{e}_r$ 是由 q_1 指向 q_2 的单位矢量。$\boldsymbol{F}_2$ 是作用在 q_2 上的力,$\boldsymbol{F}_1$ 是作用在 q_1 上的力,如图 12-2 所示(图中 q_1、q_2 为同号电荷)。$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 之间仅差一个负号。

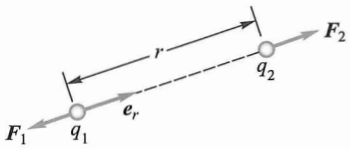


图 12-2 库仑定律的矢量表示

NOTE

在国际单位制(SI)中,电荷量的单位为库[仑](国际符号为 C)。实验测得比例系数 k 为

$$k = 10^{-7}c^2 \approx 9\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$$

式中 c 为真空中的光速。

由于电磁学中有许多公式中含有 4π 和 c 的因子,为了避免这两个因子出现在最重要的公式中,我们令库仑定律中的比例系数 $k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$,则真空中的库仑定律可改写成如下形式:

$$\boldsymbol{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r = -\boldsymbol{F}_1 \tag{12-2}$$

这样,其他公式也相应地改变形式。公式的这种变形记法称为公式的有理化记法,利用有理化公式建立的单位制,也称为有理制。显然,SI 也属于有理制。

(12-2)式中的常量 ε_0 称为真空中的电容率,是基本物理常量之一。ε_0 的量值为

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi\times9\times10^9}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)} = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$$

一些书中把真空中的电容率称为真空中的介电常量。

库仑定律中重要的物理内容是对平方反比律的陈述。在某些距离范围内,它的实验验证已经十分精确,英国实验物理学家卡文迪什验证平方反比律的精度已达到 0.02。

前面已经说过,力的平方反比律是库仑定律最核心的内容,这关系到高斯定律是否成立。有人也许会关心 r 的指数为什么正好是-2。从更基本的规范对称性出发,我们可以得到它正好就是-2,这也是大自然的美妙之处。当我们研究库仑定律时,会发现:当距离趋于零时,力是无穷大的,这是不可能的,自然界没

有无穷大。因此距离很小时，库仑定律会失效。是由于距离太小，“点电荷”的假设不再成立了吗？我们在前面已经说过，电荷是量子化的，一个电子的电荷不再可分。那么一个电子是否有大小？如果电子有大小，显然无限靠近时，点电荷假设不成立。可惜无限靠近在实验中是不可行的，我们只能做到尽量靠近。高能物理的加速器可以让两个正负电子分别以 100 GeV 的能量对撞，距离达到 10^{-17}m，发现电子仍然是一个点电荷，库仑定律依然成立（当然是在量子水平，那时称为量子电动力学）①。高能物理的加速器能量在不断提高，人类在不断测试人类公式的极限。从这里我们也得到了一点启示：物理学和数学是不一样的，物理学的公式是有边界的，它的边界就是人类实验能达到的范围。

NOTE

库仑定律的另一重要物理内容是电荷在作用力效果上的可加性，也就是电场力叠加原理，而且两个电荷之间的作用力不会因第三个电荷的存在而改变。不管系统中有多少个电荷，每对电荷之间的作用力都能够用库仑定律来计算。设有电荷 q_a 和另外 N 个电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_N$，由上述可知，所有 N 个电荷 q_i 对 q_a 的作用力的合力 $\boldsymbol{F}$ 由下式确定：

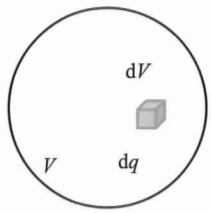
$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ai}$$

式中 $\boldsymbol{F}_{ai}$ 是电荷 q_i 在单独存在（其余 $N-1$ 个电荷不存在）时作用于 q_a 上的力。

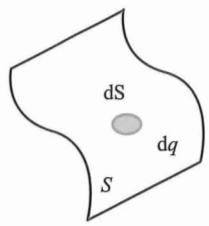
我们经常会碰到这样一些问题，其中静电力的力源为均匀带电的、有一定大小的物体。例如，均匀带电的线段或者均匀带电的平板。在这种情况下，必须把带电体分成许多电荷元 $\mathrm{d}q$（$\mathrm{d}q$ 很小，可以视为点电荷），然后计算出每个电荷元 $\mathrm{d}q$ 所产生的作用力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$，静电力的合力为矢量积分 $\boldsymbol{F} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{F}$。下面，我们将对三种类型的电荷分布作一简单介绍。

若电荷连续分布在一定体积内（体分布），我们可引入电荷体密度 ρ，即单位体积内的电荷。如图 12-3（a）所示，这时可在带电体内任取一体积元 $\mathrm{d}V$，体积元 $\mathrm{d}V$ 内的电荷量为 $\mathrm{d}q$，则电荷体密度满足

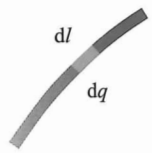
$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} \quad 或 \quad \mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V$$



(a) 电荷体密度



(b) 电荷面密度



(c) 电荷线密度

图 12-3 电荷密度概念

① 质子在类似的实验中早已被证明是有大小的，其半径在 1 fm = 10^{-15}m 左右。它有内部结构，由夸克组成，夸克带分数电荷。目前认为夸克和电子类似，是一个点电荷，没有大小。

假如电荷连续分布在一定的曲面上(面分布),我们可引入电荷面密度 σ,即单位面积内的电荷。如图 12-3(b)所示,这时可在曲面上任取一面积元 dS,其所带电荷量为 dq,则电荷面密度满足

$$\sigma=\frac{dq}{dS} \quad 或 \quad dq=\sigma dS$$

如果电荷分布在某根细线或细棒上(线分布),我们可引入电荷线密度 λ,即单位长度内的电荷。如图 12-3(c)所示,这时可在细线上任取一线元 dl,其所带电荷量为 dq,则电荷线密度满足

$$\lambda=\frac{dq}{dl} \quad 或 \quad dq=\lambda dl$$

12-3 电场·电场强度

NOTE

1. 电场

如果对电的认识到库仑定律就止步了,那么它也就是万有引力的另一个翻版,一切都在经典力学掌控范围内。然而历史上科学家对两个电荷是如何发生相互作用产生了兴趣,观点分为两派。一派认为电荷不需要接触任何物质就可以传递力,这就是所谓的超距相互作用。另一派认为力需要借助物质来传递。由于双方都没有实验证据,所以两种观点僵持了很长时间。[①] 法拉第(M.Faraday)在观察铁屑在磁铁影响下的排列规律后,发挥了其惊人的想象力。他认为铁屑的规则排列表明空间中存在一种物质,这种物质是由于磁铁的激发而产生的,其形态和铁屑的排列有关。他将这种物质命名为场。同样由于电荷的存在,空间中也会存在场,我们称之为静电场,其含义是不随时间变化的电场。电荷会受到其他电荷激发的静电场影响而产生力的效应。随后章节的研究表明,场的确是客观存在的物质,它可以独立于电荷而存在。我们日常所见的光就是电磁场,不过它是一种随时间变化的电磁场,不是我们本章所讨论的静电场。场的出现彻底改变了人们对物质结构的认识。在经典力学中,我们研究的对象是质

① 这其实也适用于万有引力。然而万有引力要复杂得多,直到广义相对论出现才告一段落。

点。即使是一个有一定形状和体积的物体，我们也可以把它切割成有限或无限个质点，对它们分别进行研究。然而场是一个整体，在空间任何一点都有一个值、一个方向（如果是矢量场），是空间坐标的函数。场不可切割，任何一小部分场单独拿出来都是没有意义的。这种连续分布的物质形态是电磁学的主要研究对象。

NOTE

2. 电场强度

电场强度是一个描述电场大小和方向的物理量，其定义可以通过库仑定律来得到（但不局限于库仑力）。我们用试探电荷 q_0 来研究静止的点电荷 q 所产生的电场。将试探电荷放在该电场中某点，该点相对于点电荷 q 的位置由径矢 $\boldsymbol{r}$ 确定，则作用于试探电荷上的力为

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{12-3}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$ 是径矢 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量。

由（12-3）式可知，试探电荷 q_0 所受的力不仅与决定电场的两个量 q 和 r 有关，而且还与试探电荷的电荷量 q_0 有关。显然，如果取电荷量不同的试探电荷，依次放在电场中同一点，则它们所受到的电场力 $\boldsymbol{F}$ 也不同。但是，对于所有的试探电荷，力 $\boldsymbol{F}$ 与 q_0 之比 $\boldsymbol{F}/q_0$ 却都是相同的，即力 $\boldsymbol{F}$ 与试探电荷 q_0 无关，并且其比值仅与决定试探电荷所在点的电场的两个量 q 和 r 有关。所以，我们把它作为表征电场的量，即

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0} \tag{12-4}$$

式中矢量 $\boldsymbol{E}$ 称为试探电荷所在点的电场强度（electric field strength）。

根据（12-4）式，电场中某点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 在数值上等于放在该点的单位电荷所受的电场力，$\boldsymbol{E}$ 的方向与作用在该点正电荷上的电场力的方向一致。

必须指出，即使取负试探电荷（$q_0<0$），（12-4）式也是正确的。在这种情况下，矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 方向相反。

请注意，虽然电场强度的概念是在研究静止点电荷的电场这种特殊情况下引入的，但是定义（12-4）式也可以推广到任意静

NOTE

止电荷所产生的电场。不过在这种情况下，试探电荷 q_0 放入电场中之后，试探电荷 q_0 可能会影响场源电荷的分布，进而影响该处的电场强度。例如，当场源电荷分布在导体上且能自由地在导体内移动时，就会发生这种电荷重新分布的情况。为了避免所研究的电场发生明显的变化，试探电荷的电荷量必须足够小。

由(12-4)式和(12-3)式可知，点电荷的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{12-5}$$

式中矢量 $\boldsymbol{E}$ 的方向沿着过场源电荷 q 和所研究的场点的径向直线。q 为正时，$\boldsymbol{E}$ 背离电荷；q 为负时，$\boldsymbol{E}$ 指向电荷。

3. 电场叠加原理

由(12-4)式知，任何一个点电荷 q 在电场强度为 $\boldsymbol{E}$ 的电场中所受到的电场力将是

$$\boldsymbol{F}=q_0\boldsymbol{E} \tag{12-6}$$

由电场力叠加原理可知，电荷系作用于系外某一电荷的力等于电荷系内所有电荷单独作用于该电荷的力的矢量和。由此得出结论：

电荷系在某点的总电场强度等于电荷系内每一电荷单独在该点产生的电场强度矢量和，即

$$\boldsymbol{E}=\sum_i \boldsymbol{E}_i \tag{12-7}$$

这就是电场的电场强度叠加原理。

为了计算电荷连续分布带电体的电场强度：首先把电荷分成足够小的电荷元 $\mathrm{d}q$，求出点电荷 $\mathrm{d}q$ 在某点的电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$，然后应用电场强度叠加原理对 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 进行矢量积分便可求得该点的总电场强度，即

$$\boldsymbol{E}=\int \mathrm{d}\boldsymbol{E}=\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\hat{r} \tag{12-8}$$

4. 电场线

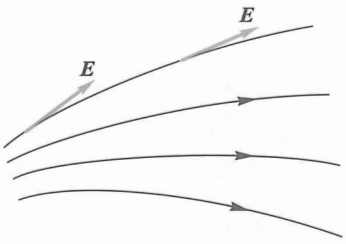
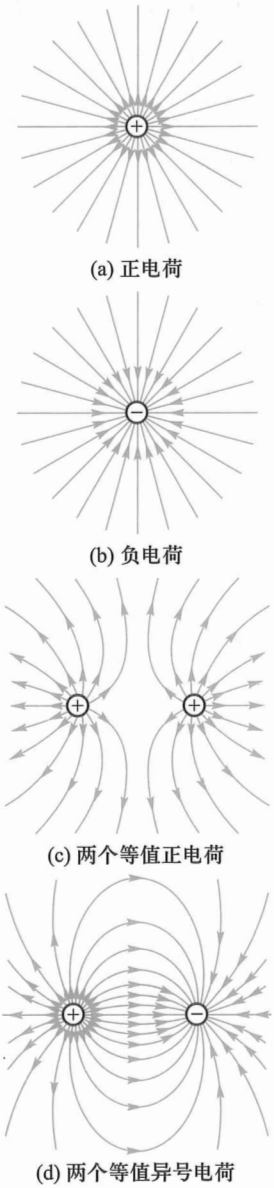


图 12-4 电场线的画法

场线是法拉第根据铁屑在磁铁影响下排列的图形而提出的一种图像，适合各种类型的矢量场。我们可以在空间作出一条条曲线，如图 12-4 所示，曲线上每个点的切线方向代表这一点电场的方向。这种曲线就是电场线。这和质点的轨迹类似，轨迹的切线代表质点的速度方向。电场线有的地方疏，有的地方密，代表不同位置的电场强度大小不同。法拉第发明了形象化的电场强度定义：作垂直于电场线的小截面，通过单位面积的这种小截面的电场线数目代表这个位置电场强度的大小，因此电场线越密的地方电场强度越大。

电场线是定性描述电场性质很有用的图像，不过电场线本身是非物理，不像质点轨迹那样，是客观存在的。

对于静电场，电场线总是起始于正电荷（或无限远），终止于负电荷（或无限远），但不会在没有电荷的有限位置处中断；这表明静电场是有源（有出发点终止点）、无旋的。之后我们会介绍磁感线，它是一种闭合曲线。磁感线没有出发点，也没有终止点，因此是无源、有旋的（像漩涡一样）。所有的场线只有这两种情况。另外在没有点电荷的空间里，任何两条电场线不会相交[①]。图 12-5 给出了几种常见的电场线图。



(a) 正电荷

(b) 负电荷

(c) 两个等值正电荷

(d) 两个等值异号电荷

图 12-5 电场线图

5. 电偶极子

电偶极子（electric dipole）是指两个等值异号电荷 $+q$ 和 $-q$ 所组成的系统，这两个电荷之间的距离 l 远小于所求场点到它们的连线中心的距离 r，即 $r \gg l$。电偶极子的电荷量 q 和距离 l 的乘积称为电偶极矩（electric dipole moment），即 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$，其方向与 $\boldsymbol{l}$ 的方向（由负电荷指向正电荷）相同。它是描述电偶极子属性的物理量。下面，我们来讨论在电偶极子延长线和中垂线上的电场强度表达式。

如图 12-6 所示，我们先求延长线上一点 P_1 的电场强度。P_1 点到 $\pm q$ 的距离分别为 $r \mp \dfrac{l}{2}$，所以 $\pm q$ 在 P_1 点产生的电场强度的大小分别为

① 如果有交点，根据场线的定义，就无法确定交点处电场的方向。

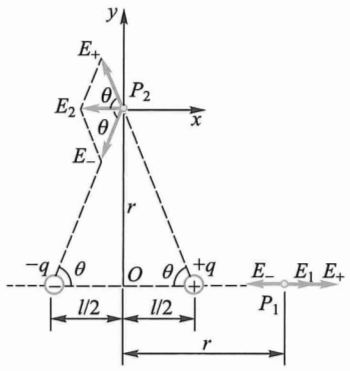


图 12-6 电偶极子在 P_1 和 P_2 点的电场强度

NOTE

$$E_+=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$E_-=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}$$

E_+方向指向右，E_-方向指向左，故总电场强度大小为

$$E_1=E_+-E_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right]$$

因为 $r\gg l$，故

$$E_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2lr}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2}\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}\qquad(12-9)$$

$\boldsymbol{E}_1$ 的方向与电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 的方向相同。

下面再求在中垂线上一点 P_2 的电场强度。P_2 点到 $\pm q$ 距离都是 $\sqrt{r^2+\frac{l^4}{4}}$，它们在 P_2 点产生的电场强度大小为

$$E_+=E_-=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+\frac{l^2}{4}}$$

但两者方向不同，故必须对 P_2 点的总电场强度求矢量和，其大小为

$$E_2=E_+\cos\theta+E_-\cos\theta=2E_+\cos\theta$$

由图可见

$$\cos\theta=\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+\frac{l^2}{4}}}$$

故

$$E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}$$

因为 $r\gg l$，故得

$$E_2\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\qquad(12-10)$$

NOTE

E_2 的方向与电偶极矩 p 的方向相反。

实际中电偶极子的例子是很多的。例如水分子，虽然总体呈电中性，但是氧原子处负电荷多一些，氢原子处正电荷多一些。因此水分子可以视为偶极子。水分子之间由于偶极子而具有相互作用，形成著名的氢键。氢键的存在使得水在常温下是液态，这对生命的形成至关重要。很多分子都是有极性的，即电荷不是均匀分布的，分子和分子之间会有范德瓦耳斯力，在某种近似下这种力可以视为偶极子之间的相互作用。除此以外，在外电场作用下，电介质的原子或分子里的正负电荷产生微小的相对位移，也会形成电偶极子。无线电中，金属发射天线里的电子作周期性运动，使天线两端交替地带正、负电荷，形成振荡电偶极子。

医学研究表明，心肌纤维由大量心肌细胞组成，电信号在心肌纤维中的传播导致了心壁肌肉有规律地收缩，于是产生了心脏的跳动。与其他可激细胞一样，在无刺激时，心肌细胞处于静息状态，细胞膜内、外两侧形成一个均匀分布着等量异号离子的闭合曲面电偶层，如图 12-7(a)所示。此时，心肌细胞膜外均匀带正电，细胞膜内均匀带负电，而且心肌细胞的正、负电中心重合，是一个中性的带电体系，对外不显示电性，即外部空间各点的电势为零。医学上称这一状态为极化(polarization)。当受到某种刺激(可以是电刺激、化学刺激、机械刺激等)时，心肌细胞膜的离子通透性发生改变，致使细胞膜局部区域两侧电荷的极性发生改变，变成膜内带正电，而膜外带负电，细胞整体的电荷均匀分布的状态被打破，正、负离子的中心不再重合，整个心肌细胞可以等效为一个电偶极子，形成电偶极矩，从而对外显示出电性，如图 12-7(b)所示。刺激在细胞中传播过程中，这个电矩也随之变化，这个过程被称为除极(depolarization)。

除极结束时，整个细胞的电荷又恢复均匀分布，对外不显示电性，如图 12-7(c)所示。当除极出现之后，细胞膜的离子通透性几乎立即恢复原样。

除极过程结束后，细胞恢复到静息状态的过程称为复极(repolarization)。复极的顺序与除极一样，即先除极的部位先复极。显然，这一过程中也会形成一个变化的电矩，但其方向却与除极时相反，如图 12-17(d)所示，心肌细胞对外也显示出电性。复极结束后，整个细胞恢复到原来的极化状态，如图 12-17(e)所示。随着心脏电活动的传播，心肌细胞电偶极矩的大小和方向都不断变化，从而引起其周围的电场和电势随之不断变化。

大量心肌细胞的除极与复极行为导致了心脏的生物电变化。整个心脏等效于一个电偶极子，称为心电偶(cardio-electricdipole)，

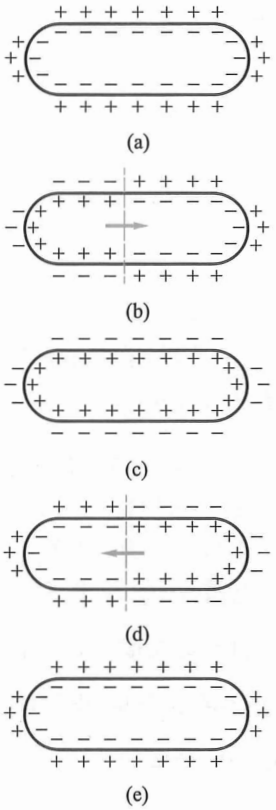


图 12-7 心肌细胞的电学模型

NOTE

心电偶在空间产生的电场称为心电场(cardio-electric field)。某时刻所有心肌细胞电偶极矩的矢量和,称为瞬时心电向量(twinkling electrocardiovector)。瞬时心电向量的大小和方向上都随时间作周期性变化,其箭头的坐标按时间及空间顺序而形成的轨迹称为空间心电向量环(spatial electrocardiovector loop),这就是人体各处电势的周期性变化的根源。

所有心脏细胞所产生电势的叠加使得心脏整体电势的变化更为复杂,心电图仪测量的是人体胸部不同部位之间体表电势差随时间的变化曲线,称为心电图(electrocardiogram),如图 12-8 所示。

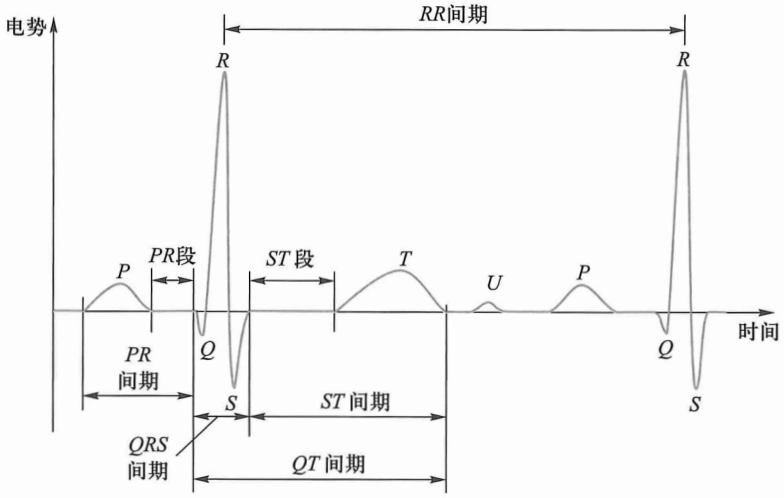


图 12-8 人体心脏电势随时间的变化曲线

例 1

求均匀带电细棒外一点 P 的电场强度。设棒长为 l,电荷线密度为 λ,P 点到细棒的垂直距离为 a。

解 选 P 点到细棒的垂足 O 为原点,作坐标系 xOy,如图 12-9 所示。由于细棒电荷是连续分布的,因此可以把整个电荷分成许多电荷元 $\mathrm{d}q$,求出每一电荷元 $\mathrm{d}q$ 在 P 点产生的电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$,然后求矢量和 $\boldsymbol{E}=\int \mathrm{d}\boldsymbol{E}$。由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 是矢量,积分时必须把 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 分解为 $\mathrm{d}E_x$ 和 $\mathrm{d}E_y$,然后按 $E_x=\int \mathrm{d}E_x$ 和 $E_y=\int \mathrm{d}E_y$ 积分,最后求出总电场强度的大小为 $E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}$,

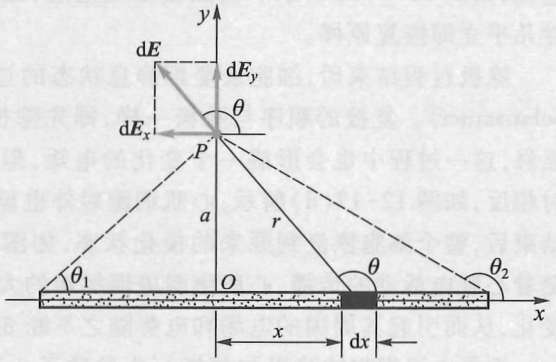


图 12-9 均匀带电细棒外任一点 P 的电场强度

其方向可用角度 $\tan\alpha=\dfrac{E_y}{E_x}$ 表示。

我们在细棒离原点距离为 x 处任取一线元 $\mathrm{d}x$，其上所带电荷量 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$ 可视为点电荷。$\mathrm{d}q$ 在 P 点处产生的电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}l}{r^2}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的方向如图所示，与 x 轴的夹角为 θ，故 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 沿 x 轴和 y 轴的两个分量分别为

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\theta,\quad \mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\sin\theta$$

由于积分中含有 x、r、θ 三个变量，所以为了积分方便，需预先统一变量。由图可知

$$x=a\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-a\cot\theta$$

$$\mathrm{d}x=a\csc^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$r^2=a^2+x^2=a^2\csc^2\theta$$

于是得到

$$E_x=\int\mathrm{d}E_x=\int\mathrm{d}E\cos\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)$$

$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=\int\mathrm{d}E\sin\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

[讨论]若带电细棒是无限长的，即 $\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$，则

$$E_x=0,\quad E=E_y=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

例 2

如图 12-10 所示，一半径为 R 的均匀带电圆环带有电荷量 q，求在 x 轴上离圆环中心距离为 x 处的 P 点的电场强度。

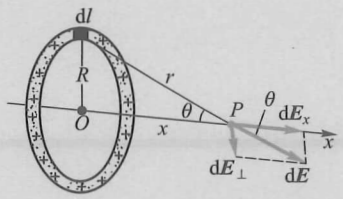


图 12-10 均匀带电圆环在轴线上 P 点处的电场强度

解 设圆环上的电荷线密度为 $\lambda=\dfrac{q}{2\pi R}$，在环上任取一线元 $\mathrm{d}l$，其所带电荷量 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l$ 可视为点电荷。在 P 点处产生电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}l}{r^2}$$

其方向如图所示。根据对称性分析，环上所有电荷元在 P 点产生的电场强度在垂直于 x 轴方向上的分量互相抵消，只剩下沿 x 轴方向的分量，故

$$E=E_x=\int\mathrm{d}E_x=\int\mathrm{d}E\cos\theta$$

式中 θ 和 r 在积分中均是不变量，故

$$E=E_x=\int\mathrm{d}E\cos\theta=\oint_L\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}l}{r^2}\cos\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta\oint_L\mathrm{d}l$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\frac{x}{r}\cdot 2\pi R$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

[讨论]当 $x\gg R$ 时，$(x^2+R^2)^{3/2}\approx x^3$，则有

$$E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}$$

这说明：远离环心处的电场强度与把环上电荷看成全部集中在环心处的点电荷产生的电场强度是一样的。

例 3

计算电偶极子在均匀电场中所受到的力矩。

解 如图 12-11 所示。$\boldsymbol{E}$ 表示均匀电场的电场强度，$\boldsymbol{l}$ 是从 $-q$ 指向 $+q$ 的矢量，θ 为 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 间的夹角。由电场强度的定义，正负电荷分别受到两个大小相等、方向相反的力 $\boldsymbol{F}_+$ 和 $\boldsymbol{F}_-$ 的作用，这两个力构成力偶，它们对于中点 O 的力臂都是 $\frac{l}{2}\sin\theta$，对 O 点的力矩方向也相同，因而总力矩的大小为

$$M = 2F_+\frac{l}{2}\sin\theta = qEl\sin\theta = pE\sin\theta$$

不难看出，上式写成矢量形式为

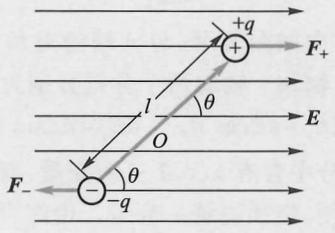


图 12-11 电偶极子在均匀电场中受到的力矩

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$$

上述力矩的作用是使电偶极子转向沿着电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向。

12-4 高斯定理

NOTE

1. 电通量

静电场和电场源的关系可以用一种特别简单的方法来表示，而且这种方法十分有用。为此，需要定义一个新的物理量——电通量(electric flux)。

电场线的图像有助于我们对电通量的理解。在图 12-12(a)中，取一垂直于 $\boldsymbol{E}$ 的面元 ΔS。按照通常规定，这样的面元可用矢量 $\Delta\boldsymbol{S}$ 表示，其大小为 ΔS，方向为面元 $\Delta\boldsymbol{S}$ 的法线方向。我们把 $\Delta\boldsymbol{S}$ 称为面元矢量，可表示为

$$\Delta\boldsymbol{S} = \Delta S\boldsymbol{e}_n \qquad (12-11)$$

式中 $\boldsymbol{e}_n$ 为面元 $\Delta\boldsymbol{S}$ 法线方向的单位矢量。这里 $\boldsymbol{e}_n$ 与 $\boldsymbol{E}$ 同方向。

我们用 $\Delta\Phi_e$ 表示垂直穿过面元 $\Delta\boldsymbol{S}$ 的电场线数目，也称为电

通量，则

$$E=\frac{\Delta\Phi_e}{\Delta S}$$

或

$$\Delta\Phi_e=E\Delta S$$

若所取的面元与该处的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 不垂直，如图 12-12(b)所示，则需考虑面元 $\Delta\boldsymbol{S}$ 在垂直于 $\boldsymbol{E}$ 方向的投影面积 $\Delta S'$。设 $\boldsymbol{e}_n$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间的夹角为 θ，则通过斜面元 $\Delta\boldsymbol{S}$ 的电场线数目为

$$\Delta\Phi_e=E\Delta S\cos\theta$$

注意到两矢量的标积，我们可以把上式改写为

$$\Delta\Phi_e=\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$$

若面元矢量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，则通过 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的电通量为

$$\mathrm{d}\Phi_e=\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

电通量是标量，但可正可负。当 $\boldsymbol{e}_n$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的夹角 θ 为锐角时，$\cos\theta>0$，$\Delta\Phi_e$ 为正；当 θ 为钝角时，$\cos\theta<0$，$\Delta\Phi_e$ 为负；当 $\theta=\pi/2$ 时，$\Delta\Phi_e=0$。

对于一个任意曲面来说，如图 12-12(c)所示，曲面上电场强度的大小和方向一般是不均匀的。此时计算电通量，只需把曲面分成许多小面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，然后积分求出曲面 $\boldsymbol{S}$ 上的总电通量：

$$\Phi_e=\int_S\mathrm{d}\Phi_e=\int_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\qquad(12-12)$$

一个曲面有正、反两面，因此它的法线矢量也有正、反两种取法。对于不闭合的曲面，法线矢量的正向取在哪一面，是不确定好，可以随意定义；但对于闭合曲面，由于它把整个空间划分成内、外两部分，因此其法线矢量的方向是容易分类的：指向曲面外部空间的称为外法线矢量，指向曲面内部的称为内法线矢量。于是，我们规定：对于闭合曲面，总是取它的外法线矢量为正，如图 12-13 所示。这样一来，在电场线穿出曲面的地方(如图 12-13 中的 A 点所示)，$\theta<\pi/2$，电通量 $\Delta\Phi_e$ 为正；在电场线进入曲面的地方(如图 12-13 中的 B 点所示)，$\theta>\pi/2$，电通量 $\Delta\Phi_e$ 为负。

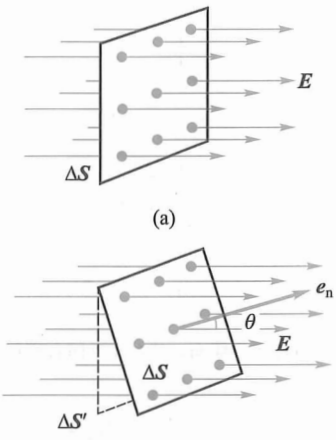


图 12-12 电通量

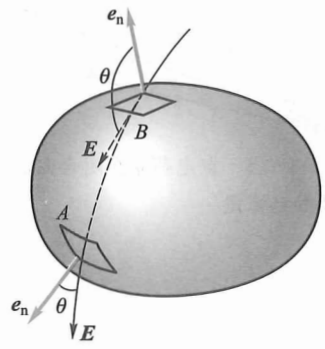


图 12-13 通过闭合面的电通量

2. 高斯定理

高斯(C.F.Gauss)定理可表述如下：

通过任意一个闭合曲面 S 的电通量等于闭合面内所有电荷的代数和 $\sum_i q_i$ 除以 ε_0，与闭合面外的电荷无关。

用公式来表示高斯定理，则有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i(\text{内})} \tag{12-13}$$

式中 $\oint_S$ 表示沿一个闭合曲面 S 的积分，这个闭合曲面 S 习惯上称为高斯面。

下面我们来证明高斯定理的正确性。

（1）通过包围点电荷 q 的同心球面的电通量都等于 q/ε_0

以点电荷 q 为球心，作一半径为 r 的球面 $\boldsymbol{S}$。球面上各点 $\boldsymbol{E}$ 的大小相同，方向均沿半径向外，如图 12-14(a)所示。通过球面 $\boldsymbol{S}$ 的电通量为

$$\Phi_e=\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S E\mathrm{d}S=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

（2）通过包围点电荷 q 的任意闭合曲面 $\boldsymbol{S}'$ 的电通量都等于 q/ε_0

在与点电荷 q 距离不同处，电场线呈现的情况不同，但从同一点电荷 q 发出的电场线总数则保持不变。因此，闭合曲面 S 无论形状如何，穿出的电场线数目都是一样的，如图 12-14(a)中的闭合曲面 $\boldsymbol{S}'$ 所示，因而电通量都与同心球面一样，等于 q/ε_0。

若闭合曲面有凹凸面，如图 12-14(b)所示，则对于从点电荷 q 发出的一根电场线来说，通过闭合面的次数为奇数次。根据从闭合曲面穿出的电通量为正，进入闭合曲面的电通量为负的规定，只要计算最后穿出的一次就行了，其余偶数次的都两两互相抵消。因此，对于形状为凹凸面的闭合曲面来说，电通量数值并不改变，同样等于 q/ε_0。

（3）通过不包围点电荷的任意闭合曲面 $\boldsymbol{S}$ 的电通量为零

如图 12-15 所示，如果点电荷 q 在闭合曲面 $\boldsymbol{S}$ 外，则只有与闭合面相切的锥体内的电场线才通过闭合面；每一条电场线总是通过偶数次，故电通量一正一负，其代数和为零。可见，闭合面外的电荷对计算该闭合面的电通量无关。

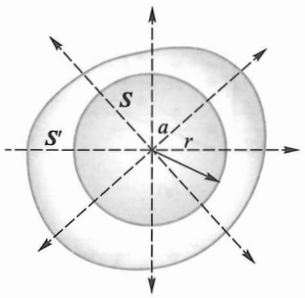
（4）多个点电荷的电通量等于它们单独存在时的电通量的代数和

当带电体系总共由 k 个点电荷组成，而其中 $1\sim n$ 个点电荷在闭合面内，$n+1\sim k$ 个点电荷在闭合面外时，根据电场强度叠加原理，它们在闭合面上产生的总电场强度为

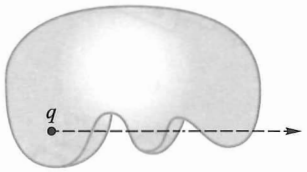
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_k$$

于是，带电体系通过闭合面的总电通量为

$$\Phi_e=\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S (\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_k)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$



(a) S为同心球面，S'为任意闭合曲面



(b) 带有凹凸面的闭合曲面

图 12-14　通过包围点电荷的闭合曲面 $\boldsymbol{S}$ 的电通量等于 q/ε_0

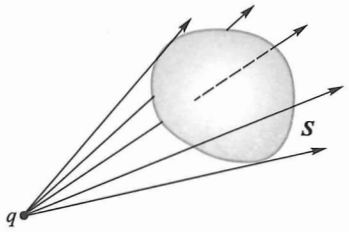


图 12-15　点电荷 q 在闭合曲面 $\boldsymbol{S}$ 外的电通量

NOTE

$$= \oint_S \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_S \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \cdots + \oint_S \boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \cdots + \frac{q_n}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i^n q_{i(\text{内})}$$

至此，高斯定理全部证毕。它是从库仑定律得到的，但比库仑定律的适用范围更广。从本质上来讲，高斯定律是近距相互作用，是相对论性的；而库仑定律是超距相互作用，是非相对论性的。

必须指出，高斯定理描述的是电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的通量与电荷之间的关系，要区分电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的通量是两回事。其次，高斯定理表明 $\boldsymbol{E}$ 的通量只与闭合面内的电荷有关，与闭合面外的电荷无关；若闭合面内电荷代数和等于零时，则 $\boldsymbol{E}$ 的通量为零，但不能说闭合面上的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 一定为零，因为闭合面上任意点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 仍然是由闭合面内和闭合面外所有电荷共同产生的。

在许多情况下，利用高斯定理求电场强度比利用点电荷电场强度公式(12-5)和电场强度叠加原理简便得多。但是，能够直接运用高斯定理简单求出电场强度的情况中，电荷分布必须满足一定的对称性，否则数学上的积分十分困难。在下面的一些例子中，我们都先作电场的对称性分析，然后运算。读者要特别注意掌握好分析方法。

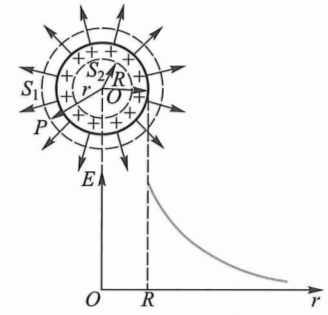
NOTE

12-5 利用高斯定理计算电场

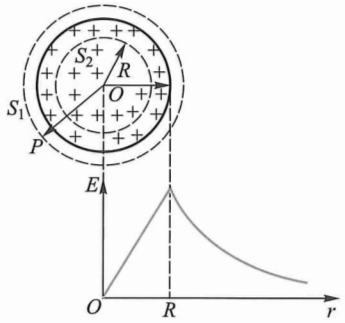
1. 球对称分布的电场

(1) 均匀带电球壳的电场

一个半径为 R、均匀带正电 q 的球壳电荷具有球对称(spherical symmetry)性。所谓球对称性，是指在球心处观察，空间绕任意轴旋转任意角度，电荷分布都是不变的。这样在任意一点，垂直于径向的电场为零(即任意一点电场都沿径向)。我们可以用反证法证明：如果有垂直于径向的电场分量，以这一点和球心的连线为轴将球壳作 180°旋转，那么这个分量的电场也会跟着旋转 180°。然而旋转球壳并不能改变电荷的分布，因此电场应该不变。因此这个电场分量必须为零。同样，与球心距离相同的某球面上所有点处电场大小都是相同的。同样也是对球壳作旋



(a) 均匀带电球壳的电场



(b) 均匀带电球体的电场

图 12-16

转,某球面上 A 点就会转到球面 B 点,由于旋转后电荷分布没有发生改变,A 点的电场大小等于 B 点的电场大小。因此,我们可以作一个通过所求场点 P 点的同心球面作为高斯面,如图 12-16(a)所示。

上述对称性分析对球壳内外的电场都是适用的。如果 P 点在球壳外,即 $r>R$,应用高斯定理得

$$\oint_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{S_1} E\mathrm{d}S = E\oint_{S_1} \mathrm{d}S = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

则 P 点电场强度为

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{12-14}$$

这表明:均匀带电球壳外一点的电场强度与把球壳上电荷全部集中在球心时产生的电场强度一样。

如果 P 点在球壳内,即 $r<R$,则有

$$\oint_{S_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0}$$

得 P 点电场强度为

$$E = 0 \tag{12-15}$$

这表明:均匀带电球壳内部电场强度为零。

均匀带电球壳的电场强度分布如图 12-16(a)所示。可以看出,球壳上($r=R$)E 的数值有一跃变。

(2) 均匀带电球体的电场

均匀带电球体的电场分布也是球对称的。如果 P 点在球外,即 $r>R$,我们可过 P 点作一同心球面作为高斯面 S_1,如图 12-16(b)所示。根据高斯定理,得

$$\oint_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{12-16}$$

这表明:球体外一点的电场强度与把球体上的电荷全部集中在球心时产生的电场强度一样。

如果 P 点在球内,即 $r<R$,则高斯面 S_2 内所包含的体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3$,高斯面 S_2 内包围的电荷为

$$q' = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{R^3}$$

应用高斯定理,得

$$\oint_{S_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{qr^3}{R^3 \varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qr}{R^3} \tag{12-17}$$

即 E 与 r 成正比地增加。

球体内外电场强度 E 随 r 变化的情况，如图 12-16(b)所示。在带电球体的表面上($r=R$)，内外电场强度的大小趋于相等，为 $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2}$。

2. 轴对称分布的电场

设有一根均匀带正电的无限长直线，直线上的电荷线密度为 λ，要求线外一点 P 的电场强度 $\boldsymbol{E}$。稍加分析，我们就可以判断出电场是以带电直线为轴呈辐射状的轴对称分布(cylindrical symmetry)的(请读者自行分析)。与带电直线垂直距离 r 相等处，$\boldsymbol{E}$ 的大小相等，而 $\boldsymbol{E}$ 的方向与直线垂直且呈辐射状。

由上面的分析，取过 P 点与带电直线同轴的圆柱面和上、下两底面所组成的闭合圆柱面为高斯面，其中圆柱面的半径为 r，长度 l 是任意的，如图 12-17 所示。根据电场分布的分析，闭合圆柱面上、下两底面的电通量均为零，只有侧面上有电通量。应用高斯定理，得

$$\oint_{S_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\text{上底}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_{\text{下底}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_{\text{侧面}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \oint_{\text{侧面}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{12-18}$$

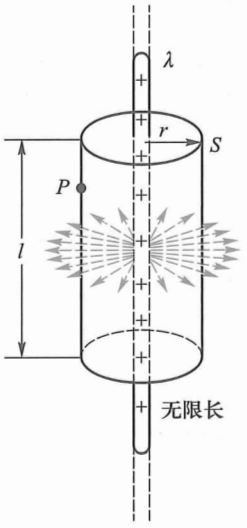


图 12-17 均匀带正电无限长直线的电场

实际上无限长的带电直线是不存在的，但只要靠近直线中部，与直线的距离比直线的长度小得多的地方，电场的分布情况就与无限长带电直线的电场分布类似。

对于均匀带电的“无限长”圆柱体或圆柱面，若单位长度上所带电荷也为 λ，则在圆柱体外一点的电场强度也为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{12-19}$$

式中 r 为该点到圆柱体轴线的垂直距离。

3. 平面对称分布的电场

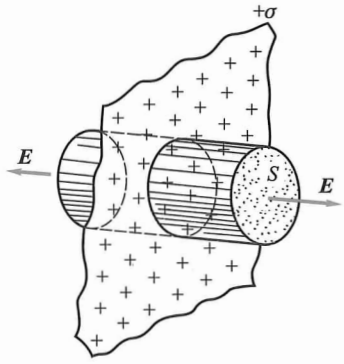


图 12-18 无限大均匀带电平面的电场强度

（1）无限大均匀带电平面的电场

设有一无限大均匀带电平面，其电荷面密度为$+\sigma$。由对称性分析可知，其电场分布是平面对称（planar symmetry）的，即平面两侧等距离处电场强度大小相等，方向处处与平面垂直。于是，我们可把高斯面取成如图 12-18 所示的闭合圆柱面，它的两个底面与带电面平行，并与带电平面等距离，侧面与带电平面垂直。令 $\boldsymbol{E}$ 为两底面上的电场强度，底面积为 S。应用高斯定理得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = ES + ES = 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{12-20}$$

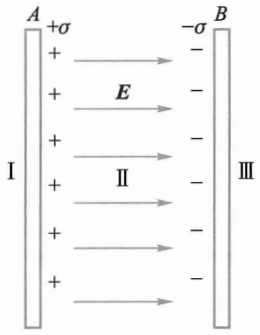


图 12-19 两块等量异号平行平板间的电场

（2）两块带等量异号电荷的平行平板的电场

设有两块平行的平板 A 和 B，电荷面密度分别为$+\sigma$和$-\sigma$。假设两板之间的距离远小于板面的线度，如图 12-19 所示，则可利用(12-20)式来进行计算电场强度。根据电场强度叠加原理，在两板之间的区域Ⅱ中：

$$E = E_{\mathrm{A}} + E_{\mathrm{B}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{12-21}$$

在两板外侧的区域Ⅰ和Ⅲ中：

$$E = E_{\mathrm{A}} - E_{\mathrm{B}} = 0 \tag{12-22}$$

可见，带等量异号电荷的两无限大平行平板之间的电场为均匀电场，其电场强度数值等于$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$；两板之外不存在电场。

12-6 电势

1. 静电力是保守力

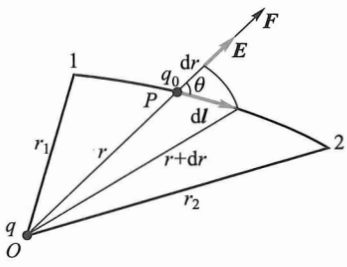


图 12-20 静电力是保守力

在静止点电荷 q 产生的电场中，将试探电荷 q_0 从点 1 沿任意路径运动到点 2，电场力要做功。若在移动路径上任意点 P 处取一位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。设 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 两端与 q 的距离分别为 r 和 $r+\mathrm{d}r$；并设 P 点处的电场强度为 $\boldsymbol{E}$，如图 12-20 所示；则相对于位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，q_0 所受到的静电力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

NOTE

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = q_0 \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = q_0 E dl\cos\theta$$

式中 θ 为 $\boldsymbol{E}$ 与 $d\boldsymbol{l}$ 间的夹角。考虑到 $dl\cos\theta = dr$，且 $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，代入上式后可得

$$d\mathrm{W} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{q_0 q}}{\mathrm{r}^2}d\mathrm{r}$$

当 q_0 从点 1 移到点 2 时，静电力做功为

$$W_{12} = \int dW = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}dr = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{12-23}$$

式中 r_1 和 r_2 分别为试探电荷 q_0 由起点和终点到点电荷 q 处的距离。由此可见，在单个静止点电荷的电场中，静电力所做的功与路径无关，而与试探电荷 q_0 的始末位置有关。

上述结论对于任何带电体系产生的电场都是成立的。因为任何带电体总可以划分为许多电荷元，每一电荷元均可看成一个点电荷，因此可把任何带电体系视为点电荷系。由电场强度叠加原理，其合力所做的功等于各分力所做的功的代数和，即

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = q_0 \int_1^2 (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \boldsymbol{E}_k) \cdot d\boldsymbol{l} \\ &= q_0 \int_1^2 \boldsymbol{E}_1 \cdot d\boldsymbol{l} + q_0 \int_1^2 \boldsymbol{E}_2 \cdot d\boldsymbol{l} + \cdots + q_0 \int_1^2 \boldsymbol{E}_k \cdot d\boldsymbol{l} \\ &= W_1 + W_2 + \cdots + W_k = \sum_i W_i \end{aligned}$$

由于上式右方的每一项都与路径无关，所以总静电力的功 W_{12} 也与路径无关。

这样，我们得出结论：试探电荷在任何静电场中移动时，静电力所做的功仅与 q_0 的大小和始末位置有关，而与路径无关。可见，静电力是保守力。

静电力做功与路径无关的结论，还可以表述成另一种等效的形式。如图 12-21 所示，若试探电荷 q_0 从场中 A 点出发，沿任意闭合环路绕行一周时，静电力做的功等于零，即

$$\begin{aligned} \oint_L \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} &= q_0 \oint_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = q_0 \int_{A(L_1)}^{B} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} + q_0 \int_{B(L_2)}^{A} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} \\ &= q_0 \left(\int_{A(L_1)}^{B} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} - q_0 \int_{A(L_2)}^{B} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} \right) = 0 \end{aligned}$$

故

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \tag{12-24}$$

上式表示：静电场中电场强度 $\boldsymbol{E}$ 沿任何闭合环路的线积分

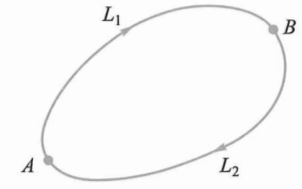


图 12-21 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 沿任意闭合环路的环流等于零

NOTE

等于零，也即静电场中电场强度 $\boldsymbol{E}$ 沿任意闭合环路的环流等于零。这就是静电场的环路定理，是静电场的基本性质之一，它反映出静电场是一个保守力场。

(12-24)式仅在静电场情况下才是正确的。后面我们将看到，涡旋电场并不满足(12-24)式。

2. 电势

静电力是保守力，静电场是保守力场(或称有势场)，因此在静电场中可以引入电势能(potential energy)的概念。

设想在静电场中把一个试探电荷 q_0 从 a 点移到 b 点，则静电力 $\boldsymbol{F}$ 对 q_0 所做的功 W_{ab} 应等于它的电势能的减少，即

$$W_{ab} = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = q_0 \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = U_a - U_b \qquad (12\text{-}25)$$

式中 U_a 和 U_b 是 q_0 在 a 点和 b 点的电势能。如同引力势能一样，通常将试探电荷 q_0 在无限远处的电势能取为零，即 $U_\infty = 0$，则有

$$U_a - U_\infty = U_a = W_{a\infty} = q_0 \int_a^\infty \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (12\text{-}26)$$

这表明：电荷 q_0 在电场中某点 a 处的电势能等于将 q_0 从 a 点处移到无限远处时静电力所做的功。

在静电场中的同一点，不同的试探电荷 q_0 将具有不同的电势能 U；但对所有的试探电荷 q_0 来说，比值 $\dfrac{U}{q_0}$ 都是相同的。这一比值是表征静电场中给定点电场性质的物理量，称为电势(electric potential)。用 V_a 表示 a 点的电势，即

$$V_a = \frac{U_a}{q_0} = \int_a^\infty \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (12\text{-}27)$$

由(12-27)式可知：电场中一点的电势等于单位正电荷置于该点时所具有的电势能，或等于把单位正电荷从该点移到无限远处时静电力所做的功。电势是标量，但有正或负的量值。

在静电场中，任意两点 a 和 b 的电势差称为电压，即

$$V_a - V_b = \int_a^\infty \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \int_b^\infty \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (12\text{-}28)$$

由(12-28)式可知，当任意点电荷 q_0 在静电场中从 a 点移到 b 点，静电力所做的功均可用电势差表示为

$$W_{ab} = q_0 \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = q_0 (V_a - V_b) \qquad (12\text{-}29)$$

与电势能类似，电势的绝对值没有实际物理意义，而电势差具有

NOTE

物理意义。电势零点的选取有随意性。一般来说，我们选取离场源无限远处的参考点为电势零点。在一些特殊情况下，这样的选取并不合适。例如，对带电体是无限大的，像无限大带电平面（或无限长带电直线）这样的带电体的情况，如果把电势或电势能的零点选在无限远处，电场中各点的电势值就变为无穷大了。因为对无限大均匀带电平面的电场是均匀电场 $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 的情况而言，若选无限远处 $V_\infty=0$，则电场内任意点的电势

$$V_P=\int_P^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=E\cdot\infty$$

同样，对无限长带电直线的电场也有类似情况。因此，对于无限大带电体产生的电场，只能选取空间某一参考点作为电势零点，从而求出电势分布，这时电场中某点 P 的电势应写为

$$V_P=\int_P^{P_0}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\quad (P_0\text{ 是电势零点})$$

在实际问题中，常选地球的电势为零，或在仪器上取机壳的电势为零。

在 SI 中，电势的单位是 J/C，称为伏[特]（V）。

在物理学中，常常使用所谓电子伏（eV）来作为能量和功的单位。电子伏是指所带电荷量等于电子电荷量绝对值 e 的一个电荷通过 1 V 电势差时，静电力对它所做的功为

$$1\ \mathrm{eV}=1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C}\times1\ \mathrm{V}=1.6\times10^{-19}\ \mathrm{J}$$

根据电势的定义，以无限远处为零电势时，点电荷 q 周围某点 P 处的电势为

$$V_P=\int_P^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\tag{12-30}$$

对于点电荷系产生的电场，根据电场强度叠加原理，场中某点 P 的电势为

$$\begin{aligned}V_P&=\int_P^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_P^\infty(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_k)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=\int_P^\infty \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_P^\infty \boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\cdots+\int_P^\infty \boldsymbol{E}_k\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=V_{P1}+V_{P2}+\cdots+V_{Pk}=\sum_i V_{Pi}\end{aligned}\tag{12-31}$$

式中 $V_{P1},V_{P2},\cdots,V_{Pk}$ 是各点电荷单独存在时 P 点的电势。（12-31）式表明：

点电荷系电场中某点的电势等于各个点电荷单独存在时产生的电势的代数和。

这就是电势的叠加原理。

NOTE

如果产生静电场的电荷是连续分布的，则可把任意带电体系分成点电荷系，然后根据电势叠加原理进行积分，得场中某点 P 处的电势为

$$V_P = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{12-32}$$

式中 $\mathrm{d}q$ 为带电体中的任意电荷元，r 为 $\mathrm{d}q$ 到 P 点的距离。

3. 电势的计算

电势是标量，用电势叠加原理计算时用代数和；而电场强度是矢量，用电场强度叠加原理计算时必须用矢量和。可见，电势的计算要比电场强度的计算简单得多。若无特别说明，我们假设无穷远处的电势为零。

（1）均匀带电球壳产生的电场的电势

设球壳所带电荷量为 q，半径为 R。我们已经求得球壳的电场强度分布为

$$E=0, \quad r<R$$

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad r>R$$

方向沿径矢方向，因此计算电势时可沿着径矢积分。

在球壳外（$r>R$），由电势定义得距球心 r 处的电势为

$$V_P = \int_P^{\infty} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{12-33}$$

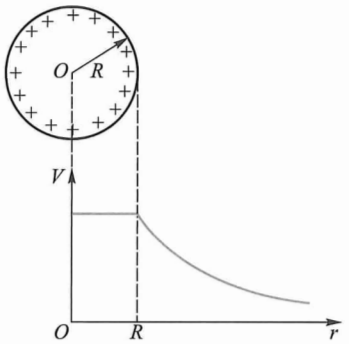


图 12-22 均匀带电球壳的电势分布图

若 P 点在球壳内（$r<R$），积分要分两段进行，同一段中，要求 E 的表达式相同，即

$$V_P = \int_P^{\infty} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_r^{R} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_R^{\infty} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= \int_R^{\infty} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{12-34}$$

由此可见：在球壳外的电势分布与点电荷的情况一样；在球壳内的电势与表面的电势一样，是个常量。电势 V 随 r 变化的关系曲线如图 12-22 所示。

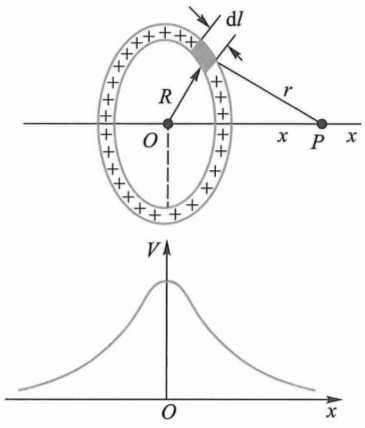


图 12-23 均匀带电圆环轴线上的电势分布

（2）均匀带电圆环轴线上的电势

设圆环半径为 R，所带电荷量为 q，轴线上 P 点与圆环中心 O 点的距离为 x，如图 12-23 所示。在圆环上取一线元 $\mathrm{d}l$，则其所带电荷量为 $\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}l=\frac{q}{2\pi R}\mathrm{d}l$，故电荷元 $\mathrm{d}q$ 在 P 点产生的电势为

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}l}{r}$$

式中 r 为 $\mathrm{d}l$ 到 P 点的距离，且 $r=\sqrt{x^2+R^2}$ 在整个圆环上是常量；λ 为圆环上的电荷线密度。由电势叠加原理，整个圆环在 P 点产生的电势为

$$V=\int \mathrm{d}V=\int_0^{2\pi R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\mathrm{d}l=\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 r}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{1/2}} \tag{12-35}$$

在圆环的中心 O 点，因 $x=0$，可得

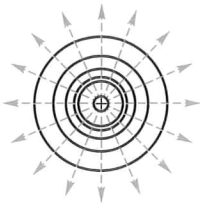
$$V_O=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{12-36}$$

电势 V 随 r 变化的关系曲线如图 12-23 所示。

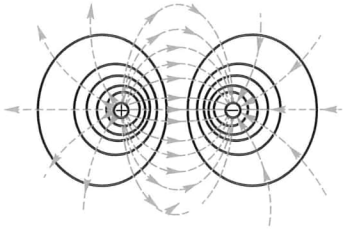
4. 等势面

如前所述，电场线可用来形象地描绘电场中的电场强度分布；对于电势的分布，也同样能找到描绘它的几何图像，这就是等势面图。

一般说来，静电场中的电势值是逐点变化的，但电场中总有一些点的电势数值是相等的，我们把这些电势相等的点所组成的面称为等势面（equipotential surface）。例如，点电荷 q 产生的电场中的电势 $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，因此该电场中的等势面是以 q 为中心的一系列同心球面，如图 12-24（a）所示。两个等量异号的点电荷的等势面如图 12-24（b）所示。



(a) 点电荷



(b) 两个等量异号点电荷

图 12-24 等势面和电场线

综合各种等势面，可以看出等势面有如下性质：

（1）等势面与电场线处处正交

因为当电荷 q_0 沿等势面从 a 点移到 b 点时，静电力的功 $W_{ab}=q_0(V_a-V_b)$。由于 $V_a-V_b=0$，所以 $W_{ab}=0$，故静电力不做功。当静电力沿等势面作微小位移 $\mathrm{d}l$ 时，根据功的定义，$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=q_0E\mathrm{d}l\cos\theta$，但 q_0、E、$\mathrm{d}l$ 均不为零，因此必然有 $\cos\theta=0$，$\theta=\pi/2$，即 $\boldsymbol{E}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 垂直，这就表示电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与等势面垂直，从而使得电场线与等势面正交。

（2）等势面密集处电场强度大，稀疏处电场强度小

电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向总是指向等势面电势降落的方向。这里我们不另外加以证明。

由于等势面容易用实验的方法描绘出来，而且在实际问题中，往往遇到需要控制和调整电场中某些等势面的形状和电势值

的情况，因此，等势面的概念在科学技术中有很重要的意义。

12-7 电势梯度

NOTE

由(12-27)式可知，电势是电场的路径积分，如果反向操作，电场也应与电势存在某种微分关系。我们就来研究这种关系。对于单位电荷而言，电场力对其做的功等于其电势能的减小量。

$$\frac{\mathrm{d}U}{q_0}=\mathrm{d}V=-\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-E_x\mathrm{d}x-E_y\mathrm{d}y-E_z\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k} \tag{12-37}$$

(12-37)式也就是将(12-27)式写成无穷小微分形式。在(12-37)式中，令 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}z=0$，可以得到

$$-E_x=\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)_{y,z} \tag{12-38}$$

(12-38)式中，导数的下标表示 y、z 不变，在微积分中这称为偏微分，表示为

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-E_x \tag{12-39}$$

在(12-37)式中，还可以令 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}z=0$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}y=0$，得到

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-E_y,\quad \frac{\partial V}{\partial z}=-E_z \tag{12-40}$$

各式相加得到

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \tag{12-41}$$

它确定了电场强度 E 和电势 V 的关系。其中的∇是一个梯度算符

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{12-42}$$

因此电场与电势的梯度之间差一个负号。由于电场线垂直于等势面，所以电场方向是沿电势下降最快的方向，或者电势梯度是电势上升最快的方向。由(12-42)式也可以得到，矢量 $\boldsymbol{E}$ 在任意方向 l 上的分量，等于 V 对 l 的导数的负值，即

$$E_l=-\frac{\partial V}{\partial l} \tag{12-43}$$

例 4

试用电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电势 V 的关系式 $\boldsymbol{E}=-\nabla V$，求出点电荷的电场强度。

解 在直角坐标系中，点电荷电势公式为

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

由(12-42)式得

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}$$

类似地有

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{r^3}$$

$$E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}$$

将求得的值代入(12-41)式得

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$ 为矢量 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量，此式与前面得到的结果一致。

例 5

求均匀带电圆盘轴线上任意点 P 的电势和电场强度。设圆盘半径为 R，电荷面密度为 σ。

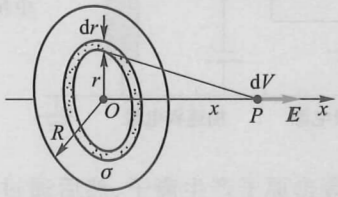


图 12-25 均匀带电圆盘的轴线上一点的电势和电场强度

解 如图 12-25 所示，轴线上 P 点离圆盘中心 O 的距离为 x。将圆盘视为由不同半径的圆环所组成，并在圆盘上任取半径为 r、宽度为 $\mathrm{d}r$ 的圆环，则环上所带电荷量为

$$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$$

由(12-35)式可知，它在 P 点的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$

整个带电圆盘在 P 点产生的电势为

$$V=\int\mathrm{d}V=\int_0^R\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)$$

可见，P 点的电势 V 为 x 的函数，利用(12-42)式

可求得 P 点的电场强度

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

由对称性分析可以看出：P 点电场强度矢量的方向就是轴线的方向，它的大小为 $E=E_x$。

从上面例题中我们看到：由于电势是标量，用标量积分计算电势比用矢量积分计算电场强度简便得多，所以我们往往先求出电势，然后利用求偏导数或梯度的方法求电场强度。这从一个方面体现了引进电势这个标量的优越性。

12-8 离子推进器

NOTE

离子推进器是一种利用离子产生推力的航天器推进系统。它的工作原理是先将推进剂电离，利用电场加速离子，使其获得高速度，然后将离子喷出，产生反作用力，从而推动航天器前进。为了避免喷出去的离子被航天器吸引回来，影响推进效果，在喷出离子的同时，向喷射出去的离子束喷电子，让它呈现电中性。离子推进器的核心部件是离子发动机。它由离子发生器、聚束器、加速器和喷嘴等组成，图 12-26 所示为离子推进器工作原理示意图。

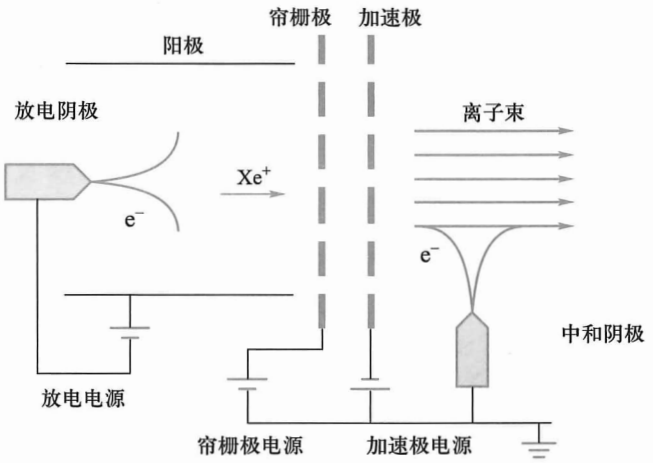


图 12-26 离子推进器工作原理示意图

放电阴极产生的电子轰击原子产生离子，然后通过电场加速离子，形成正离子束，向后喷出以获得航天器的推力。值得注意的是，仅靠喷射正离子还不能产生推力。因为航天器的初始净电荷为零，但在它射出正离子的同时，自己也获得负电荷。静电力会把正离子重新往回拉，一旦航天器有了足够量的负电荷，正离子就会被拉回而重新落到航天器上。为了避免这种情况的发生，在出口处，中和阴极发射的电子被注入正离子束中，使它成为中性的粒子束喷射出去。这种高速粒子流喷射出去，将导致一个反向的推力，推动航天器运动。下面计算喷出粒子的速度和推进器产生推力的大小，设质量为 m、电荷量为 q 的正离子组成的粒子束，受到加速电场力的作用。由牛顿运动定律，得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=qE$$

根据电势梯度与电场强度的关系，有

$$E=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

NOTE

联立以上两式可得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-q\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=-q\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}=-q\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\frac{1}{v}$$

由于离子在静电场中的电势能为 $U=qV$，于是

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-q\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

即

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=0$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+U\right)=0$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}mv^2+U=E$$

上式表明，离子的动能和电势能之和 E 是一个常量，换言之，离子的总能量 E 守恒。因此可得到离子速度为

$$v=\sqrt{\frac{2}{m}[E-qV(x)]}$$

由此可见，离子的速度与离子的总能量 E 有关，而离子的总能量 E 可由其初始条件决定，

$$E_0=\frac{1}{2}mv_0^2+qV(x=0)$$

设 $x=0$ 处的电压 $V(0)=0$，且假设 $v_0\approx0$（这是因为与离子的喷出速度相比，其初始速度 v_0 通常是很小的），故 $E_0=0$。因此喷出的粒子的速度大小为

$$v=\sqrt{-2\frac{q}{m}V}$$

一般离子通过加速电极 B 后能获得大小可达每秒数百公里的速度。

设离子推进器单位时间内喷出质量为 m'、速度为 v 的离子束。由动量定理，离子推进器平均推力的大小为

$$F=m'v$$

设 m' 是由 N 个质量为 m、带电量为 q 的正离子所组成，则离子束形成的电流为

$$I=Nq$$

于是，单位时间内喷出离子的质量为

$$m'=Nm=\frac{I}{q}m$$

离子推进器推力大小为

$$F = m'v = \frac{mI}{q}\sqrt{-2\frac{q}{m}V} = I\sqrt{-\frac{2mV}{q}}$$

通常离子推进器可以产生几十 mN 的推力，常用于调整航天器的姿态、维持航天器的轨道等任务。

本章摘要

NOTE

1. 电荷的电荷量是量子化的，元电荷 $e = 1.6\times10^{-19}$ C，任何电荷的电荷量均为 e 的整数倍。

$$q = \pm Ne$$

2. 电荷守恒定律和相对论不变性存在紧密关联。

从不同的惯性参考系测量同一电荷，其电荷量相同，这称为相对论不变性。说明电荷的量值与该电荷是静止还是运动无关。

3. 静电场的基本规律是库仑定律，从库仑定律出发可以导出两条基本定理。

高斯定理：$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i(内)}$

环路定理：$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，它是引入电势的先决条件

高斯定理与环路定理，全面地反映了静电场的基本性质。

4. 静电场中的两个基本物理量。

电场强度 $\boldsymbol{E}$，是矢量，服从矢量叠加原理；电势 V，是标量，服从标量叠加原理。

两者之间的关系是积分和微分的关系：

$$V_P = \int_P^{\infty} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V, \quad E_l = -\frac{\partial V}{\partial l}$$

思考题

12-1 试解释：为什么物体在摩擦起电时，总是在物体的不同位置会出现等量异号的电荷？

12-2 库仑定律的适用条件是什么？当公式 $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 中的 $r\to 0$ 时，此式是否成立，为什么？

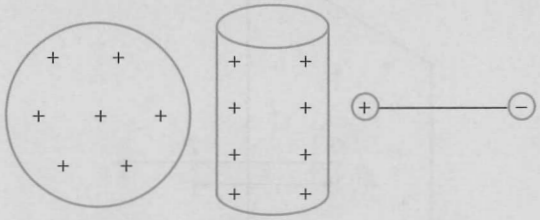
12-3 试说明静电力和万有引力的相似与相异之处。

12-4 在静电场中从静止开始释放正点电荷，其运动方向是否一定沿电场线的方向？为什么？试举例说明。

12-5 在真空中有 A、B 两平行板，相距为 d，两板面积均为 $S(d^2 \ll S)$，其所带电荷量分别为 $+q$ 和 $-q$。若用 F 表示两板间的相互作用力，有人说 $F=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$；又有人说 $F=qE$，而 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$，$\sigma=\frac{q}{S}$，所以 $F=\frac{q^2}{\varepsilon_0 S}$。他们说得对吗？为什么？$F$ 到底应该等于多少？

12-6 电场线、电通量和电场强度三者之间有何关系？电通量的正、负分别表示什么物理意义？

12-7 电场中的高斯定理是否仅在对称分布的电场中才成立？在什么情况下能用高斯定理求电场强度 $\boldsymbol{E}$？应用高斯定理求电场强度时，高斯面应怎样选取才合适？下列各形状的带电体能否用高斯定理求各点电场强度？为什么？



有限大圆板　　有限长圆柱　　电偶极子

思考题 12-7 图

12-8 一点电荷 q 放在球形高斯面的中心，试问下列情况下，穿过此高斯面的电通量是否改变？面上各点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是否改变？

（1）另一个点电荷放在高斯面外附近；

（2）另一个点电荷放在高斯面内；

（3）将原来的点电荷移离高斯面的球心，但仍在高斯球面内。

12-9 电场强度线积分 $\int_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的物理意义是什么？$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$ 表明静电力具有怎样的特性？

12-10 静电场的电场线有何特点？两条电场线能否相交？此外请用环路定理证明：静电场的电场线永不闭合。

12-11 在气候干燥的日子里，当你在夜间脱去腈纶或化纤原料制作的衣服时，会发现放电火花，它们是怎样产生的？在潮湿的天气中，为何没有这种现象？

12-12 下列说法是否正确？如不正确，试举一例说明。

（1）电场强度相等的区域，电势也处处相等；

（2）电势相等处，电场强度也相等；

（3）电场强度越大处，电势一定越高；

（4）电场强度为零处，电势也一定为零；

（5）电势为零处，电场强度一定为零。

12-13 在电场中，已知某点的电场强度 $\boldsymbol{E}$，能否确定该点的电势 V？已知某点的电势 V，能否确定该点的电场强度 $\boldsymbol{E}$？

12-14 有一球形的橡皮气球，电荷均匀分布在气球表面上，问在气球吹大过程中下列各点的电场强度和电势怎样改变？

（1）始终在气球内部的点；

（2）始终在气球表面上的点；

（3）始终在气球外部的点。

12-15 一只小鸟停在一根几万伏的高压输电线上，它是否有受到电击的危险？试说明理由。

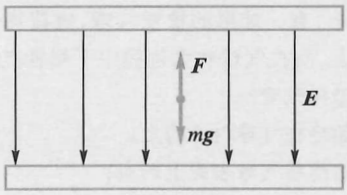
12-16 在实际工作中，有时将电学仪器或机器外壳选作电势零点。若机壳未接地，机壳是否带电？人站在地上是否可以随意接触机壳？若机壳接地，情况又如何？

习题

12-1 最新研究表明，质子、中子和介子等粒子由更小的夸克(quark)组成。如一个正 π 介子由一个 u 夸克和一个反 d 夸克组成，u 夸克所带电荷量为 $\frac{2}{3}e$，反 d 夸克所带电荷量为 $\frac{1}{3}e$。将夸克看成点电荷，试计算正 π 介子中夸克间的电场力。(设两夸克之间的距离为 1.0×10^{-15} m)

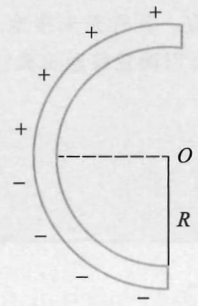
12-2 两个正点电荷 q 和 $2q$ 相距为 l，试问将第三个点电荷放在何处，电荷量与符号应如何设置，才能使所有三个电荷均处于平衡？

12-3 电子所带的电荷量($-e$)最先是由密立根通过油滴实验测出的。如图所示，一个很小的油滴在均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 中所受的静电力恰好与重力平衡。如果油滴半径为 $R=2.76\times10^{-6}$ m，密度为 $\rho=920$ kg·m^{-3}，电场强度 $E=1.65\times10^{6}$ N·C^{-1}，试求油滴上的电荷并说明共带有几个电子。



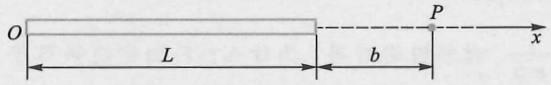
习题 12-3 图

12-4 有一细玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形，其上半部均匀带有电荷 $+Q$，下半部均匀带有电荷 $-Q$，如图所示。试求半圆中心 O 处的电场强度。



习题 12-4 图

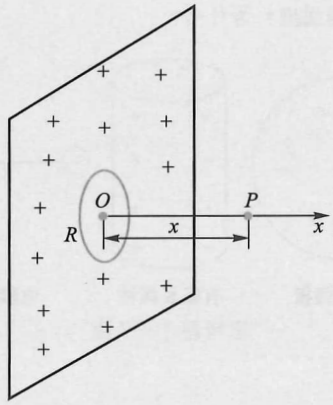
12-5 如图所示，一带电细棒长为 L，沿 x 轴正方向平行放置，其一端在原点。设电荷线密度为 $\lambda=kx$，式中 k 为正常量，求 x 轴上 $x=L+b$ 处的电场强度。



习题 12-5 图

12-6 半径为 R 的非导体半球壳均匀带电，总电荷量为 q。求球心 O 处的电场强度。

12-7 如图所示，一无限大均匀带电平面的电荷面密度为 σ，现在其上挖去一个半径为 R 的圆孔。在通过孔中心并垂直于平面的直线上有一点 P，$|OP|=x$，求 P 处的电场强度。

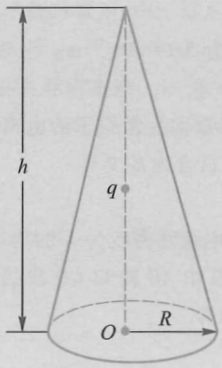


习题 12-7 图

12-8 实验表明：在靠近地面处有相当强的电场，大小约为 200 N·C^{-1}，方向垂直地面向下。试求地球所带的总电荷量。(地球半径 $R=6.37\times10^{6}$ m)

12-9 一边长为 $l=2$ m 的正方体的一个顶点在坐标原点，三条边分别为 x、y、z 轴。今有 $\boldsymbol{E}=200\boldsymbol{i}+400\boldsymbol{j}$ N·C^{-1}，求通过三个面(xy、yz、zx)的电通量。

12-10 如图所示，有一高为 $h=0.2$ m、底面半径为 $R=0.1$ m 的圆锥体，在其顶点与底面圆心连线的中点上放置一个 $q=10^{-6}$ C 的点电荷，求通过该圆锥体侧面的电通量。



习题 12-10 图

12-11 两个均匀带电的同心球面，内球面带有净电荷 q_1，外球面带有净电荷 q_2。两球面之间的电场强度为 $3\,000/r^2\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$，且方向沿半径向内；球外的电场强度为 $2\,000/r^2\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$，且方向沿半径向外。试问 q_1 和 q_2 各等于多少？

12-12 半径为 R 的长直圆柱体均匀带电，电荷体密度为 ρ。试求下列各处的电场强度分布：

（1）在圆柱体外；

（2）在圆柱体内；

（3）电场在何处最强？何处最弱？

12-13 一对均匀带电无限长的共轴圆柱面半径分别为 R_1 和 R_2，沿轴向单位长度上的所带电荷量分别为 λ_1 和 λ_2。

（1）若 $\lambda_1>0,\lambda_2>0$，求各电场区域内的电场强度分布；

（2）若 $\lambda_2=-\lambda_1$，且 $\lambda_1>0$，则情况如何？试作出其 $E-r$ 分布曲线。

12-14 两根无限长的均匀带电直线相互平行。相距为 $2a$，电荷线密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$，求单位长度带电直线所受的电场力。

12-15 半径为 R 的非导体带电球体，已知 $\rho=\rho_0\left(1-\dfrac{r'}{R}\right)$。其中 ρ_0 为一正常量，r' 为带电球体中某点离球心距离。

（1）试求球内外电场强度分布；

（2）r 为多大时电场强度最大？E_{max} 为多少？

12-16 一厚度为 d 的无限大平板均匀带电，电荷体密度为 ρ。求平板内外电场强度的分布，并以其对称面为坐标原点作出 $E-x$ 分布曲线。

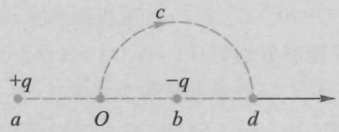
12-17 两个无限大均匀带电平面，电荷面密度分别为 $\sigma_1=4\times10^{-11}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$ 和 $\sigma_2=-2\times10^{-11}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$。求此带电系统的电场分布。

12-18 已知空气的击穿电场强度为 $3.0\times10^6\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$，一处于空气中的半径为 1.0 m 的导体球，电荷仅分布在其表面，问该球能够携带的最大电荷量为多少？在这种条件下电势值能达到多高？由此可得到什么结论？

12-19 如图所示，a 点放有正点电荷 $+q$，b 点放有负点电荷 $-q$，直线 ab 长为 $2l$，圆弧 Ocd 是以 b 为中心，l 为半径的半圆，试问：

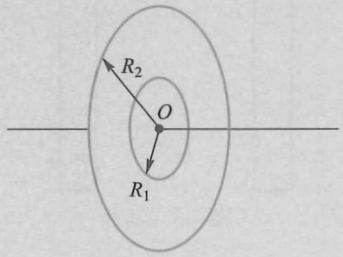
（1）将单位正电荷从 O 点沿半圆弧 $\overset{\frown}{Ocd}$ 移到 d 点，静电力对它做了多少功？

（2）把单位负电荷从 d 点沿 ab 的延长线移到无限远处，静电力对它做了多少功？



习题 12-19 图

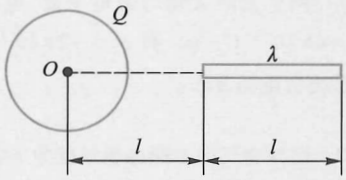
12-20 如图所示，在静电透镜实验装置中，有一均匀带电圆环，其内半径为 $R_1=0.4$ m，外半径为 $R_2=0.8$ m，总电荷量为 $Q=-6\times10^{-7}$ C。现有一电子沿轴线



习题 12-20 图

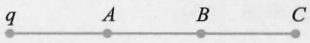
从无限远处射向带负电的圆环。欲使电子能穿过圆环，它的初始动能至少要多大？

12-21 半径为 R 的均匀带电球面所带电荷量为 Q；沿半径方向上有一均匀带电细棒，电荷线密度为 λ，长度为 l，细棒近端与球心距离也为 l，如图所示。假设球和细棒上的电荷分布保持不变，求细棒的电势能。



习题 12-21 图

12-22 有一点电荷所带电荷量 $q=10^{-9}$ C，与它在同一直线上的 A、B、C 三点分别距 q 为 0.1 m、0.2 m、0.3 m，如图所示。若选 B 为电势零点，试求 A、C 两点的电势 V_A、V_C。

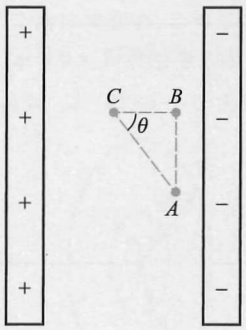


习题 12-22 图

12-23 有两块带等量异号电荷的大金属平板，负板接地（电势为零），如图所示。若各板电荷面密度均为 $\sigma=1.77\times10^{-6}$ C·m^{-2}；在两板间有 A、B、C 三点，它们与负板距离分别为 0.1 cm、0.1 cm、0.3 cm，试求：

（1）A、B、C 三点的电势各为多少？

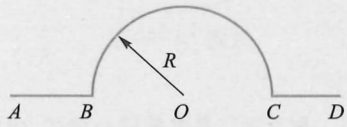
（2）把一个 $q=-1.5\times10^{-8}$ C 的点电荷从 A 点移到 C 点，静电力做的功为多少？



习题 12-23 图

12-24 在氢原子中，正常状态下电子和质子（原子核）的距离约为 5.29×10^{-11} m。已知氢原子核和电子带电分别为 $+e$ 和 $-e$。把正常状态中的电子拉到无限远处所需的能量称为氢原子的电离能，求此电离能是多少电子伏？折合为多少焦？

12-25 一电荷线密度为 λ 的均匀带电线弯成如图所示的形状，其中 AB 段和 CD 段的长度均为 R，试求圆心 O 点的电势。



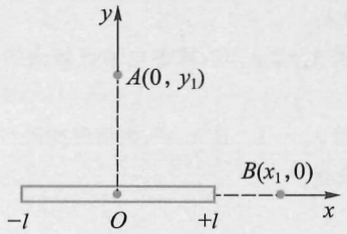
习题 12-25 图

12-26 一无限长的均匀带电直线，电荷线密度为 $\lambda=4\times10^{-9}$ C·m^{-1}。带电直线附近有 a、b 两点，如果 b 点离带电直线的距离是 a 点的两倍，求 a、b 两点间的电势差。

12-27 如图所示，有一长为 $2l$、所带电荷量为 Q 的均匀带电细棒，试求：

（1）在带电细棒的中垂线上，离棒中心距离为 y_1 的 A 点的电势 V_A 和电场强度 E_A；

（2）在带电细棒的延长线上离中心为 x_1 处的 B 点的电势 V_B 和电场强度 E_B。



习题 12-27 图

12-28 两个同心的均匀带电球面，半径分别为 $R_1=0.05$ m，$R_2=0.2$ m，已知内球面的电势为 $V_1=60$ V，外球面的电势为 $V_2=-30$ V。

（1）求内、外球面上所带的电荷量；

（2）两球面间何处的电势为零？

12-29 某电场的电势分布函数为 $V=a(x^2+y^2)+bz^2$，其中 a、b 为常量。求该电场中任一点的电场强度 $\boldsymbol{E}$。

12-30 （1）设计一个计算机程序来计算点电荷系的电场分布。输入带电粒子的数目、所带电荷量、位置坐标，然后输入需计算电场强度点的坐标。要求程序在演示前一点后才能接受新的所求点。为简单起见，假定所有电荷及所求点均分布在 xy 平面内。假设点电荷 q_i 位于 (x_i, y_i)，则其对所求点 (x, y) 处产生的电场强度为 $E_{ix}=\dfrac{q_i(x-x_i)}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}$，$E_{iy}=\dfrac{q_i(y-y_i)}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}$，$E_{iz}=0$，其中 $r_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$。最后算出所求电场强度的大小和电场强度与 x 轴的夹角。

（2）假设有两个点电荷均位于 x 轴上：$q_1=6\times10^{-9}$ C，位于 $x_1=-0.03$ m 处；$q_2=3.0\times10^{-9}$ C，位于 $x_2=0.03$ m 处。用你设计的程序计算 y 轴上下列各点的电场强度：$y=0, 0.050, 0.100, 0.150, 0.200$ m。用计算机作图表示出电荷的位置，并用矢量线表示各点的电场强度，矢量线的相对长度表示该处电场强度的大小，其与 x 轴的夹角表示方向。

（3）用你的程序计算 y 轴上下列点的电场强度：$y=-0.050, -0.100, -0.150, -0.200$ m；作出电场强度分布图。说明 $y=0.050$ m 处与 $y=-0.050$ m 处电场强度的 x 分量、y 分量的联系，并说明其余各对应点之间的关系。



习题答案

第十三章　静电场中的导体和电介质



本章补充资源

在上一章对静电场的讨论中，我们几乎完全忽略了物质的存在[①]，这是为了强调静电场与电荷有关，而不是与物质相联系。在这一章，我们主要讨论静电场与导体及电介质的相互作用。将导体和电介质置于静电场中，其内部的电荷分布将发生变化，进而影响电场的分布。换言之，物质固有的电结构是静电场对物质作用的内在根据，物质对电场的影响表现在外电场作用后出现的宏观电荷分布和附加电场，两者互相影响、相互制约，最终达到平衡。正是通过对相关现象的观察、分析和解释，人们才逐步由表及里地实现对物质电磁性质乃至内在电磁结构的认识。

13-1　导体的静电平衡

NOTE

1. 导体的静电平衡条件

导体(conductor)就是电荷能够从产生的地方迅速转移或传导到其他部分的一类物质。金属、电解液、人体、地球等都是导体。

当一带电导体中的电荷都静止不动时，其电场分布不随时间变化，我们就说该带电导体达到了静电平衡。导体的特点是其体内存在自由电荷，它们在电场的作用下可以自由移动，从而改变电荷的分布；反过来，电荷分布的改变也会影响到电场的分布。可见，当静电场中存在导体时，电荷分布和电场分布是相互影响、相互制约的。因此，导体的静电平衡必须满足如下条件：

(1) 导体内部电场强度处处为零，即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0} \tag{13-1}$$

① 在经典物理中，人们认为真空是没有物质的一种状态。但在量子物理中，真空并不“空”，里面有大量物质，这些物质的效应在微观物理中会显现出来。

根据电场强度和电势梯度的关系，这意味着导体内部电势 V 为常量，导体是个等势体，导体表面是个等势面。

这个平衡条件可这样证明：如果导体内的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 不处处为零，则在 $\boldsymbol{E}$ 不为零的地方自由电荷就会移动，即导体没有达到静电平衡。反过来，当导体达到静电平衡时，其内部电场强度必处处为零。

（2）导体表面上每一点处的电场强度处处与它的表面垂直，即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{n}} \tag{13-2}$$

式中 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{n}}$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 沿该处表面的法线方向。因为电场线与等势面正交，所以导体表面的电场强度必与其表面垂直。

2. 导体的电荷分布

如果将电荷 q 传给导体，当导体达到静电平衡后，我们在导体内部取一个任意的闭合面，则由于导体内 $\boldsymbol{E}$ 处处为零，因此穿过该闭合面的电通量也为零。根据高斯定理，闭合面内的净电荷为零。只要整个闭合面都在导体内部，不管其形状和大小如何，这个结论都是正确的。由此可见，导体内部任何地点都不能够存在净电荷，因此传给导体的电荷 q 只能以面密度形式分布在导体表面上。

既然静电平衡时，导体内部没有净电荷，那么，如果我们从导体内部挖掉一部分物质，也不会对电荷分布产生任何影响。由此可见，空心导体（导体空腔）上净电荷的分布完全与实心导体一样，即净电荷只能分布在外表面上。

上述结论更严格的证明如下所述，如图 13-1 所示。

我们在导体空腔内、外表面之间取一闭合曲面 S，将空腔包围起来。根据静电平衡条件，闭合曲面 S 上的电场强度处处为零，因此，没有电通量穿过它。根据高斯定理，导体空腔内表面上净电荷为零。

现在我们还需进一步证明，导体空腔不仅内表面上电荷的代数和（即净电荷）为零，而且其各处的电荷面密度 σ 也为零。我们利用反证法，假定内表面上 σ 处处不为零，由于净电荷为零，则必然有的地方 $\sigma>0$，有的地方 $\sigma<0$。于是，就会有电场线从内表面上 $\sigma>0$ 的地方发出并通过空腔终止于内表面 $\sigma<0$ 的地方。根据电场强度和电势的关系，电场线的两个端点间有电势差；但这两端点处在同一个导体上，而导体的静电平衡告诉我们，这两点的电势应该相等。因此，上述结果与静电平衡条件相违背。由此可见，导体空腔在静电平衡时，其内表面上电荷处处为零。

下面我们研究导体表面上电荷面密度 σ 的分布与表面附近

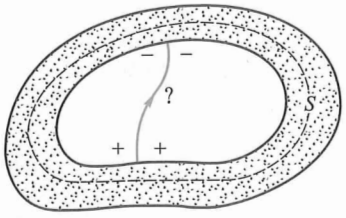


图 13-1 导体空腔内表面处处没有电荷

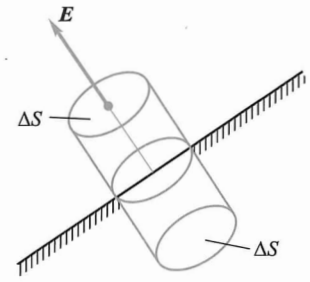


图 13-2　导体表面附近电场强度

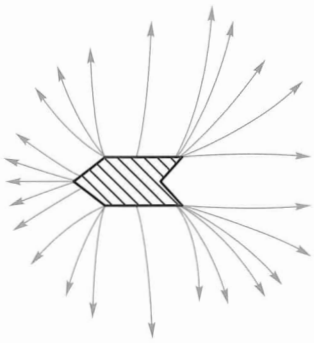
电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的关系。设想在导体表面之外的附近空间取一个小的圆柱面，其轴线垂直于导体表面，两底面积均为 ΔS，并且上底在导体之外，下底在导体内部，如图 13-2 所示。由于 ΔS 很小，上底面处的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 处处相等；又由于电场强度垂直于导体表面，并注意到导体内部电场强度为零，因此圆柱面侧面和下底面的电通量均为零。根据高斯定理，通过圆柱面的总电通量为

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\Delta S$$

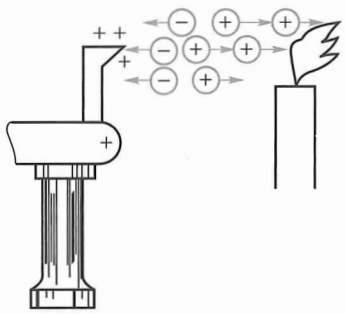
故导体表面附近的电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{13-3}$$

(13-3)式给出了导体表面上电荷面密度和表面附近电场强度的关系，但并没有告诉我们在导体表面上的电荷究竟是怎样分布的。一般来讲，它不仅与导体的形状有关，而且还和附近的带电体有关。在没有外电场的情况下，电荷的分布与导体表面的曲率有关。导体凸出的地方，曲率较大，电荷面密度 σ 较大，这意味着该处电场强度较大；表面平坦的地方，曲率较小，σ 也较小，电场强度也小；表面凹进去的地方，曲率为负，σ 更小，电场强度最弱，如图 13-3 所示。


图 13-3　导体表面曲率对电荷分布的影响

导体尖端处的电荷面密度特别大，以至于尖端附近的电场强度可以大到使周围的气体分子发生电离，那些与导体上电荷异号的离子因受到导体尖端处电荷的吸引而与导体上的电荷中和；而与导体上电荷同号的离子则受到排斥朝着与尖端相反的方向运动，并引走中性的气体分子。结果就产生一种可感觉到的气体运动，称为“电风”。于是导体上的电荷不断减少，好像是从尖端“流出”而被风带走一样，这一现象称为尖端放电。图 13-4 中蜡烛火焰的偏斜就是受到这种离子流移动而形成的电风吹动的结果。


图 13-4　尖端放电

尖端放电时，其周围会隐约地笼罩着一层光晕，称为电晕。高压输电线附近的离子与空气分子碰撞时会使分子处于激发状态，从而产生光辐射，形成电晕。在夜间，高压输电线附近常能看到这种现象。高压输电线附近的电晕放电浪费了电能，为了避免损失，高压输电线表面要求尽量光滑，半径也不能太小。一些高压设备的电极做成光滑的球面就是为了避免尖端放电漏电，以维持高压。

尖端放电最典型的应用例子就是避雷针。当带电的雷云靠近地面的树木和建筑物时，由于静电感应使树木和建筑物带上异号电荷，当电荷达到一定程度后，就会在云层和这些物体之间发生强大的电晕放电；当这些强大的电流通过树木和建筑物时，就会发生雷击现象。为了避免雷击，可在建筑物上安装避雷针(尖端导体)，用粗导线的一端与避雷针连接，另一端埋入地下深处。

这样，当雷云接近时，放电电流就通过避雷针和粗导线这条通路进入地下，从而保护了建筑物的安全。

13-2 外电场中的导体

1. 实心导体

把不带电的导体放入电场时，在外电场的作用下导体上的自由电荷要发生移动，结果在导体表面的两端分别出现异号电荷，我们称之为感应电荷，这种现象称为静电感应。这些感应电荷的电场与外电场的方向相反，因此导体两端感应电荷的积聚使导体内的电场减弱。导体内部电荷将重新分布直到导体达到静电平衡为止，这时导体内的电场强度为零。可见，不带电的导体放入外电场中并达到静电平衡后，电场线不能穿过导体内部，它们将终止于负的感应电荷，并重新由正的感应电荷发出，如图 13-5 所示。

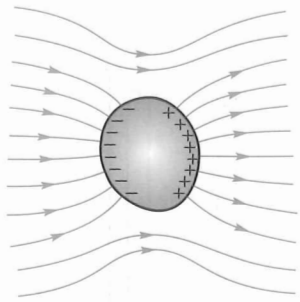


图 13-5 静电场中的实心导体

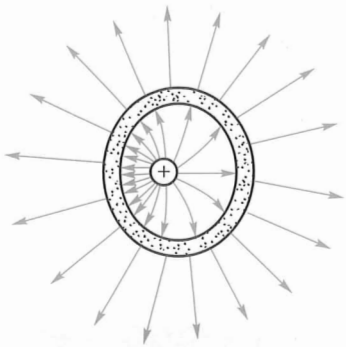
2. 导体空腔

（1）空腔内无带电体的情况

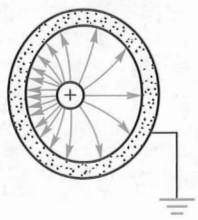
一导体在外电场中，感应电荷分布在导体的外表面上。如果在导体内部存在着空腔，则达到静电平衡时，空腔内的电场强度等于零。这时空腔内的物体或仪器不会受到外电场的影响，这就是所谓的静电屏蔽原理。当想要某一仪器不受外电场的影响时，我们可以用一个金属罩把它包围起来。通常用较密的金属网就能起到很好的屏蔽作用。

（2）空腔内有带电体的情况

若导体空腔本身不带电，当导体空腔内带有电荷 $+q$ 时，由于静电感应，导体空腔的内外表面将出现等量异号的感应电荷；当达到静电平衡时，空腔的内表面带电 $-q$，外表面带电 $+q$。结果，外表面上电荷产生的电场要对外界产生影响，如图 13-6(a) 所示。这时，只要把外表面接地，如图 13-6(b) 所示，外表面上就不会再有电荷，相应的电场也消失了，空腔内的电场也就不会对外界有影响了。由上所述，此时的屏蔽对空腔内外均有效，空腔内外的电场互不影响，彼此独立。



(a) 未接地



(b) 接地

图 13-6 导体空腔

3. 范德格拉夫静电起电机

NOTE

根据导体壳(导体空腔)的电荷分布在外表面的性质设计成的起电机称为范德格拉夫静电起电机,它是于 1931 年由范德格拉夫制成的。它可以将电荷不断地由电势低的导体传送到电势较高的导体,使后者电势不断地升高,从而在两导体之间产生数量级为几兆伏的电势差。静电起电机在物理学中的主要应用是用它所产生的电势差加速带电粒子,获得高能粒子束,进行各种高能物理的实验。

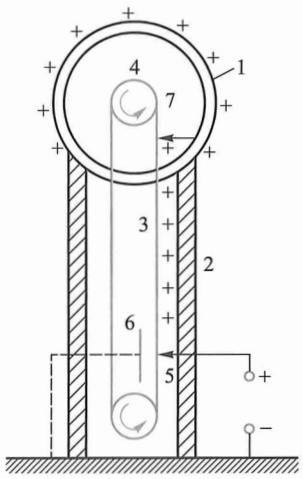
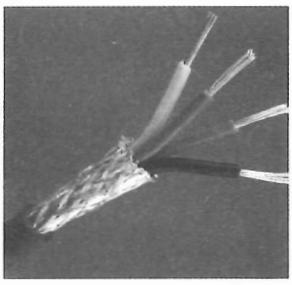


图 13-7　范德格拉夫静电起电机示意图

图 13-7 是它的示意图,大金属壳 1 由绝缘支柱 2 支撑着,橡胶布制成的传送带 3 由一对滑轮 4 带动不停地运转,放电针 5 与 5~10 万伏高压电源相连接而带正电,由于放电针 5 尖端放电,电荷被不断地喷射到传送带上,接地导体板 6 的作用是加强放电针 5 向传送带的电荷喷射,刮电针 7 把经过它的带电传送带上的电荷传送至与它相接的大金属壳 1。由于这些电荷分布在大金属壳的外表面,金属壳上的电荷越积越多,电势也越来越高,所以便产生了几兆伏的电势差。

4. 等电势和静电屏蔽原理的应用

等电势和静电屏蔽原理在工农业生产中有很多实际的应用。图 13-8 的屏蔽线就是用编织较密的金属丝网来替代导体空腔,将它接地后基本上能起到静电屏蔽的作用,以减少信号传输过程中的静电干扰。


图 13-8　屏蔽线结构

高压带电作业法也是利用这一原理来保证高压带电作业的安全性的。日常经验告诉我们,接触高压电是很危险的。这不仅是因为电势高,还因为电势梯度大。为了在不停电的情况下检修高压线路,可采用等电势高压带电作业法。操作者穿上用金属丝网编织成的金属均压服(连手),然后通过绝缘软梯和瓷瓶进入强电场区(高压区)。当手与高压线接触时,在金属均压服与高压线之间发生火花放电(spark discharge)后,人和高压线电势就相等了,从而可进行带电操作。均压服主要起到屏蔽和均压的作用。首先,均压服相当于一个导体空腔,因而对人体起到电屏蔽的作用;其次,均压服起到分流作用,当操作者经过不同的电势区域时,将出现较大的脉冲电流,而均压服的电阻比人体电阻要小得多,这使绝大部分的脉冲电流流经均压

服,从而保证了操作者的安全。

例 1

两块平行带电的大导体平板面积均为 S,两板分别带电 Q_a 和 Q_b。若略去边缘效应,求每块导体平板表面上的电荷面密度。

解 两板均可看成无限大导体平板。两板处于静电平衡时,板内电场强度均为零,设两板表面的电荷面密度如图 13-9 所示。在两板内任取两点 P_a 和 P_b,由静电平衡条件知 $E_{P_a}=0$,$E_{P_b}=0$;规定向右为电场强度的正方向,得

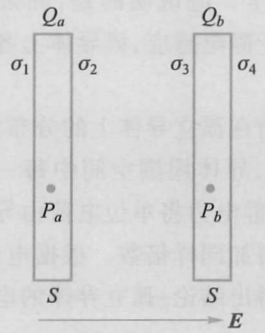


图 13-9 两平行带电的大导体平板的电荷分布

$$E_{P_a}=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \quad (1)$$

$$E_{P_b}=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \quad (2)$$

根据电荷守恒定律,有

$$\sigma_1 S+\sigma_2 S=Q_a \quad (3)$$

$$\sigma_3 S+\sigma_4 S=Q_b \quad (4)$$

联立解方程(1)-(4),得

$$\sigma_1=\sigma_4=\frac{Q_a+Q_b}{2S}$$

$$\sigma_2=-\sigma_3=\frac{Q_a-Q_b}{2S}$$

于是得出结论:对于两平行带电的大导体平板来说,相向的两表面上,电荷面密度总是大小相等而符号相反;相背的两表面上,电荷面密度总是大小相等而符号相同。

例 2

半径为 R 的金属球与地相连,在与球心相距 $2R$ 处有一点电荷 q,求球上的感应电荷 q'。

解 如图 13-10 所示,金属球在静电平衡时是一个等势体,与地等电势,即 $V=0$。

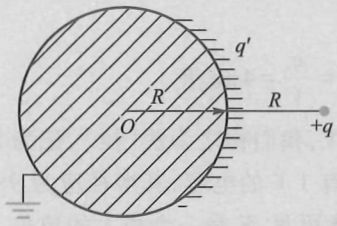


图 13-10 点电荷的场与金属球的相互作用

由电势叠加原理知,球心上的电势等于点电荷 q 及球面上的感应电荷 q' 在 O 点的电势的代数和,设球面上某面元的电荷面密度为 σ,则得

$$V_O=V_q+V_{球}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}+\oint_S\frac{\sigma\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}=0$$

$$q'=-\frac{q}{2}$$

13-3 电容

1. 孤立导体的电容

NOTE

所谓孤立导体(isolated conductor),就是说在这个导体周围没有其他导体和带电体。

使一个孤立导体带电荷 q,则电荷分布在导体表面,导体内部的电场强度为零。这样的电荷分布具有唯一性。如果让已经带有电荷 q 的孤立导体再带上同样一份电荷,则这份电荷在导体上的分布也应该与原来一样,否则后带的这份电荷在导体内部产生的电场强度就不会等于零了。应说明的是,如果不是孤立导体,附近还有别的导体,则由于静电感应,该导体上各份电荷分布的相似性就会受到破坏。

由于数值不同的各份电荷在孤立导体上的分布具有相似性,所以,导体上的电荷增加几倍,导体周围空间中每一点处的电场强度也会相应增加几倍,于是静电力将单位电荷由导体表面移到无穷远处所做的功也相应地增加同样倍数。根据电势定义,这个功就等于导体的电势。由此得出结论:孤立导体的电势与导体上的电荷量成正比,即

$$q=CV \tag{13-4}$$

式中比例系数 C 称为导体的电容(capacitance),由(13-4)式可得

$$C=\frac{q}{V} \tag{13-5}$$

上式表明,电容在数值上等于使导体电势提高一个单位所需要传给导体的电荷量。它的大小只与导体的形状大小有关而与 q、V 无关,它表征了导体容纳(储存)电荷的能力。

对于一个半径为 R 的孤立导体球,因电势 $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$,故电容为

$$C=\frac{q}{V}=4\pi\varepsilon_0 R \tag{13-6}$$

在 SI 中,电容的单位是 C/V,我们称之为法[拉],记为 F。

一个孤立导体球要具有 1 F 的电容,其半径应为 9×10^9 m,为地球半径的 1 500 倍。由此可见,F 是一个很大的单位,所以在实际应用中常使用微法(μF)或皮法(pF)等较小的单位,它们与 F

的换算关系为

$$1\mu F = 10^{-6}\ F$$
$$1pF = 10^{-12}\ F$$

NOTE

2. 电容器

孤立导体的电容不大，即使像地球这样大的球体，其电容也不过 700 μF。而工程技术上却需要在电势不高的装置中容纳数量可观的电荷，这种装置称为电容器，其原理基于如下的事实：导体的电容随着其他导体的靠近而增大。之所以如此，是因为在带电导体产生的电场作用下，靠近该导体的其他导体上将产生感应电荷，由于异号感应电荷比同号感应电荷更靠近该导体，所以使得该导体电势的绝对值减小，由(13-6)式可知，导体的电容增大了。

使两个导体彼此靠近，就可以构成一个电容器(capacitor)，构成电容器的两个导体称为极板。为了不让外部导体影响电容器的电容，两块极板要彼此靠近，其形状可为彼此靠近的平行板、两个同心球面或两个共轴圆柱面。这样，当两极板带上等量异号电荷时，电场就局限在电容器内，电场线将发自一块极板，终止于另一块极板。

电容器的主要指标是电容，它与每一极板上的电荷量 q 成正比，与两极板间的电势差 $V_A - V_B$ 成反比，即

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} \tag{13-7}$$

孤立导体的电容与电容器的电容的定义实际上是相同的。孤立导体的电容，实际上就是它和无穷远处(或地球)组成的电容器的电容，而地球的电势为零，因此孤立导体的电势就是它和无穷远处(或地球)的电势差。

下面我们来计算几种典型电容器的电容。

(1) 平行板电容器

设有两块平行的、彼此靠得很近的金属平板组成平行板电容器(parallel-plate capacitor)，两极板面积均为 S，两极板间距为 d。在极板面积的线度远大于两板间距时，可忽略边缘效应，这时极板间形成是均匀电场，如图 13-11 所示。令两板分别带等量异号电荷 $+q$ 和 $-q$，则两板间电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

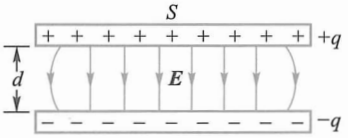


图 13-11 平行板电容器

式中 $\sigma=\frac{q}{S}$ 为板上的电荷面密度，根据电容器定义(13-7)式得

$$C=\frac{q}{V_A-V_B}=\frac{q}{Ed}=\frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{13-8}$$

(2) 同心球形电容器

如图 13-12 所示，球形电容器(spherical capacitor)由两个同心导体球壳组成，半径分别为 R_A 和 R_B。设内外球壳分别带电荷 $+q$ 和 $-q$，则两球壳间 P 点的电场强度为

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

其方向沿径矢。因为内外球壳间的电势差为

$$V_A-V_B=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{R_A}^{R_B}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_B-R_A}{R_A R_B}$$

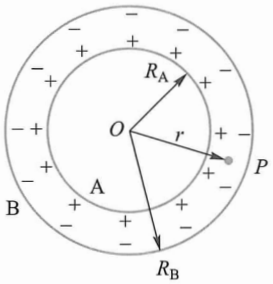


图 13-12 同心球形电容器

由电容定义得

$$C=\frac{q}{V_A-V_B}=\frac{q}{q(R_B-R_A)/(4\pi\varepsilon_0 R_A R_B)}=4\pi\varepsilon_0\frac{R_A R_B}{R_B-R_A} \tag{13-9}$$

可以看到，当 R_B 趋于无穷大时，就得到了孤立金属球的电容。

(3) 同轴圆柱形电容器

如图 13-13 所示。圆柱形电容器(cylindrical capacitor)由两个同轴的圆柱面极板组成，其半径分别为 R_A 和 R_B，长度为 l。因为 $l\gg R_B-R_A$，所以圆柱面两端可忽略边缘效应。设内外圆柱面分别带电为 $+q$ 和 $-q$，利用高斯定理可得，两圆柱面间电场强度为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

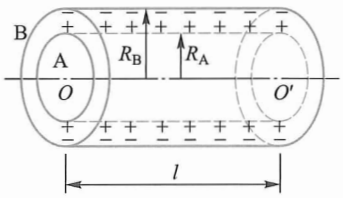


图 13-13 同轴圆柱形电容器

式中 $\lambda=q/l$ 为每个圆柱面单位长度上所带的电荷量，电场强度方向垂直于轴向外，呈辐射状。由此得两圆柱面极板间的电势差为

$$V_A-V_B=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{R_A}^{R_B}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

故

$$C=\frac{q}{V_A-V_B}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_B}{R_A}} \tag{13-10}$$

电容器的另一重要指标是极限电压 V_{max}。所谓极限电压，是指可以加于电容器两极板间而不致引起其被击穿的最高电压。电压一旦超过极限电压，极板之间就会跳过火花，使电介质击穿，从而使电容器遭到损坏。

3. 电容器的串联和并联

电容器是常用的电子元件，其用途十分广泛。在电子线路中，单个电容器往往不能满足要求，需要几个电容器组合起来使用，其总电容叫等效电容。电容器连接的基本方式有串联(connection in series)和并联(connection in parallel)两种。

(1) 串联

如图 13-14 所示，串联就是将每个电容器的极板只和另一个电容器的一个极板相连接，即将各电容器首尾相接，连成一串，而将电源接到整个组合电容器两端的两个极板上。若给 C_1 的左极板带上电荷 $+q$，其右极板将由于静电感应产生电荷 $-q$，由此，在其他电容器的两板上将分别感应出等量的电荷 $+q$ 和 $-q$。于是每个电容器上电压为

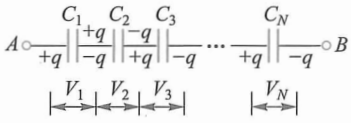


图 13-14 电容器的串联

NOTE

$$V_1=\frac{q}{C_1},V_2=\frac{q}{C_2},\cdots,V_N=\frac{q}{C_N}$$

若把电容器组看成一个电容为 C、极板间电压为 V 的等效电容器，则有

$$V=V_1+V_2+\cdots+V_N=q\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_N}\right)=\frac{q}{C}$$

由此得出

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_N} \tag{13-11}$$

这表明，电容器串联时，总电容的倒数等于各个电容器电容的倒数之和。

(2) 并联

如图 13-15 所示，把 N 个电容器的一端都连在一起，另一端也都连在一起，称为电容的并联。若使其中任意电容器带电 q，电荷将在各个电容器之间流动，直到静电平衡时各电容器两极板间电势相等为止。设每一电容器分别带电 $q_1,q_2,\cdots,q_N$，那么，电容器两极板间的电压为

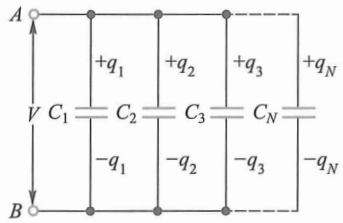


图 13-15 电容器的并联

$$V=\frac{q_1}{C_1}=\frac{q_2}{C_2}=\cdots=\frac{q_N}{C_N}$$

若把这种电容器的组合看成一个电容为 C、总电荷量为 q 的等效电容器，则

$$q=q_1+q_2+\cdots+q_N=C_1V+C_2V+\cdots+C_NV=(C_1+C_2+\cdots+C_N)V=CV$$

即

$$C=C_1+C_2+\cdots+C_N \tag{13-12}$$

这表明,并联电容器的总电容等于各个电容器的电容之和。

13-4 电介质的极化

1. 电介质

NOTE

电介质(dielectric)(绝缘体)是指不导电的物质,它们的电荷都被束缚在原子范围内而不能宏观移动,称束缚电荷。自然界中不存在理想的绝缘体,所有的物质都能传导哪怕是微不足道的电流,但是称为电介质的物质,其传导电流的能力应是导体的$1/10^{20}\sim1/10^{5}$。

如果把电介质放入静电场中,则电场和电介质都会发生变化。为了理解产生这种变化的原因,需要了解组成电介质的原子和分子中正负电荷的电结构。

一个分子所带的正电荷和负电荷的数值相等,但这些正负电荷在分子里并不集中在一点,而是分布于分子的体积中。我们把分子中全部的正电荷等效为一个总的正电荷,这个等效正电荷的位置称为分子的正电荷的“重心”,同样,每个分子的等效负电荷的位置就是这个分子的负电荷的“重心”。

不同电介质的分子有不同的电结构,据此可把电介质分为两大类。在一类电介质中,当没有外电场时,分子中正负电荷的“重心”重合,这样的分子不具有固有的电偶极矩,因而称为无极分子电介质(nonpolar molecule dielectric);在另一类电介质中,正负电荷的“重心”彼此错开,分子具有固有电偶极矩,因而称为有极分子电介质(polar molecule dielectric)。

2. 电介质的极化

在没有外电场时,无极分子电介质中各分子的电偶极矩通常等于零;而有极分子电介质中的每个分子虽有电偶极矩,但由于分子作无规则的热运动,所以各分子的电偶极矩在空间的取向是杂乱无章的,在这种情况下,电介质的合电偶极矩也等于零。

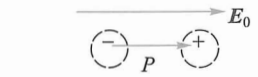
在外电场的作用下,电介质将要发生极化。我们分以下两种

情况来讨论。

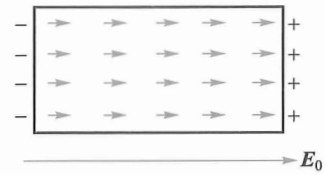
NOTE

（1）无极分子的位移极化

H_2、O_2、N_2 等对称分子是无极分子。在外电场作用下，无极分子中的正负电荷彼此拉开距离，正电荷沿外电场方向移动，负电荷沿相反的方向移动，结果分子形成一个电偶极子，分子电偶极矩的方向沿外电场方向。这种在外电场作用下产生的电偶极矩称为感生电偶极矩。就整体而言，由于电介质中每个分子都形成电偶极子，各电偶极子沿外电场方向排列成一条条的链子，链上相邻的电偶极子间的正负电荷互相靠近，因而对于均匀电介质来说，其内部各处仍是电中性的。但在电介质和外电场垂直的两个表面上会出现正负电荷。这种电荷不能离开电介质而转移到其他带电体上，也不能在电介质内部自由运动，故称为束缚电荷，如图 13-16 所示。在外电场作用下，电介质出现束缚电荷的现象称为电介质极化。由于电子质量比原子核小得多，所以在外电场作用下，位移主要是电子的位移，所以无极分子的极化称为电子位移极化。



(a) 在外电场作用下，分子正负电荷“重心”错开，形成电偶极子

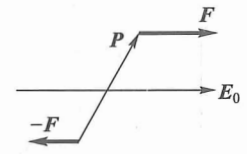


(b) 电介质在两端表面上出现束缚电荷

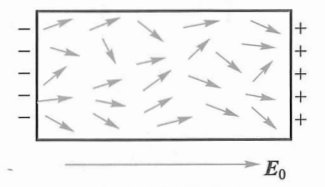
图 13-16 无极分子的极化

（2）有极分子的转向极化

CO、HCl、H_2O 等非对称性分子是有极分子。外电场对有极分子的作用可以归结为使分子的电偶极矩转到外电场的方向上。也就是说，外电场实际上对于分子电偶极矩的数值并无影响。就整体而言，由于电介质中的分子电偶极子均趋向外电场方向排列，所以合电偶极矩，即 $\sum \boldsymbol{p}_{分子}$ 不等于零。但由于分子的热运动，这种转向排列并不十分整齐。外电场越强，分子电偶极子的转向排列越整齐，于是在电介质与外电场垂直的两端表面上的束缚电荷越多，极化的程度越高。这种极化称为转向极化，如图 13-17 所示。



(a) 分子的电偶极子受到力矩的作用而转向



(b) 电介质在两端表面上出现束缚电荷

图 13-17 有极分子的极化

3. 电介质的极化强度

电介质处于极化状态时，其任意宏观小体积元 ΔV 内分子的电偶极矩矢量和均不为零。为了定量描述电介质内各处的极化情况，我们取单位体积内的电偶极矩矢量和来表征电介质极化的程度

$$\boldsymbol{P}=\frac{\sum \boldsymbol{p}_{分子}}{\Delta V} \tag{13-13}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 称为电介质的极化强度（polarization），简称为电极化强

度。它的单位是 C/m^2。

如果电场或电介质不均匀，则在电介质中的不同点处，极化是不均匀的。

13-5 面束缚电荷和体束缚电荷

NOTE

在电介质未极化时，束缚电荷的面密度 σ' 和体密度 ρ' 都等于零。由于极化，不但束缚电荷的面密度不为零，而且在电场或电介质不均匀的情况下其体密度也不等于零。

1. 束缚电荷面密度

束缚电荷面密度 σ' 和电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 之间有一简单关系。为了求得这个关系，我们考虑均匀电场中一块厚度为 d 的无限大均匀电介质平板。在板中取长度为 l、底面积为 ΔS，且与板两侧重合的斜圆柱体，其轴线与电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 平行，如图 13-18 所示。这体积元的体积为

$$\Delta V = l\Delta S\cos\theta$$

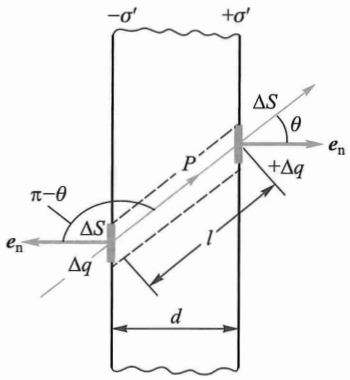


图 13-18 束缚电荷面密度和电极化强度的关系

式中 θ 是 $\boldsymbol{P}$ 与板表面外法线 $\boldsymbol{e}_n$ 间的夹角。设两个底面 ΔS 上的束缚电荷面密度分别为 $-\sigma'$ 和 $+\sigma'$，则整个斜圆柱体相当于一个电偶极子，其电偶极矩为 $ql=\sigma'\Delta Sl$，它应等于 ΔV 体积内所有分子电偶极矩的矢量和 $\sum \boldsymbol{p}_{分子}$，即

$$\sum \boldsymbol{p}_{分子} = q\boldsymbol{l} = \sigma'\Delta S\boldsymbol{l}$$

根据电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 的定义，其大小应为

$$P = \frac{\left|\sum \boldsymbol{p}_{分子}\right|}{\Delta V} = \frac{\sigma'\Delta Sl}{\Delta Sl\cos\theta} = \frac{\sigma'}{\cos\theta}$$

于是得

$$\sigma' = P\cos\theta = P_n \qquad (13-14)$$

式中 P_n 是电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 沿电介质表面外法线方向的分量。(13-14)式表明，电介质极化时产生的束缚电荷面密度等于电极化强度沿电介质相应表面外法线方向的分量。若 $\theta<\pi/2$，则 σ' 为正，若 $\theta>\pi/2$，则 σ' 为负。

2. 束缚电荷体密度

NOTE

如果电介质和外电场是不均匀的，则除在电介质的表面上出现面束缚电荷外，还将在电介质内部出现体束缚电荷，这是由于电介质非均匀极化时，各处电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 不同，所以进入一个小体积元的束缚电荷和移出这个体积元的束缚电荷不再相同。

如果我们任取一个闭合曲面 S，那么可以证明，电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 通过闭合曲面的通量等于该闭合曲面 S 所包围的体积内的净余束缚电荷的负值，即

$$\oint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\sum_{(S内)} q' = -\int_V \rho' \mathrm{d}V \tag{13-15}$$

式中，q' 是闭合面 S 所包围的体积 V 内的束缚电荷，ρ' 是体积元 $\mathrm{d}V$ 处的束缚电荷体密度。

(13-15)式表达的电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 与束缚电荷分布的关系是具有普遍意义的。无论是在均匀电介质还是在非均匀电介质的情况下，(13-15)式都是成立的。

13-6 电介质中的静电场

1. 束缚电荷产生的电场

包含在电介质分子内的束缚电荷和其他电荷的区别在于它在外电场的作用下，仅能从自己的平衡位置作些许移动，而不能脱离自己所属分子的范围。除此之外，它与所有其他电荷无异，都是静电场的源，即束缚电荷产生的电场与其他电荷产生的电场没有丝毫区别。

电介质中的场应是外电荷产生的场 $\boldsymbol{E}_0$ 与束缚电荷产生的场 $\boldsymbol{E}'$ 的矢量和，即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}' \tag{13-16}$$

一般来说，$\boldsymbol{E}'$ 的大小和方向是逐点变化的。在均匀的电介质内部，$\boldsymbol{E}'$ 和外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向处处相反，其结果是使总电场 $\boldsymbol{E}$ 比原来的 $\boldsymbol{E}_0$ 弱。

对于任意类型的各向同性电介质，同一点处的极化强度和电场强度有如下简单关系：

NOTE

$$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{13-17}$$

式中χ_e称为电介质的极化率(polarizability),它与电场强度$\boldsymbol{E}$无关,仅与电介质的种类有关,是一个量纲为1的常量。

由(13-17)式可知,决定电介质极化程度的不是原来的外电场$\boldsymbol{E}_0$,而是电介质中实际的总电场$\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{E}$减弱,电极化强度$\boldsymbol{P}$也就减弱,因此束缚电荷在电介质内部的附加电场$\boldsymbol{E}'$总是起到减弱极化的作用。需要指出的是,(13-17)式中所描述的$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{P}$的线性关系仅在不太强的电场中才是正确的。

2. 电位移 $\boldsymbol{D}$ 和电介质中的高斯定理

外电场的存在导致电介质极化,束缚电荷产生的场又使得电介质内部的电场发生改变。在这种情况下应用高斯定理时,闭合曲面内的电荷既包括自由电荷,又包括束缚电荷。而由于束缚电荷事先是不知道的,从而使电介质内的电场强度的计算变得复杂和麻烦。如果能避开出现束缚电荷,计算就可以大大简化,为此我们引入一个新的物理量,即电位移$\boldsymbol{D}$。

高斯定理在有电介质存在时可写为

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)}(q_0+q') \tag{13-18}$$

式中q_0和q'分别为高斯面S内的自由电荷和束缚电荷。

根据(13-15)式知

$$\oint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\sum_{(S内)} q'$$

将上式代入(13-18)式,消去束缚电荷$\sum\limits_{(S内)} q'$,得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum_{(S内)} q_0-\oint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right)$$

整理后得

$$\oint_S (\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_{(S内)} q_0$$

我们引进一个辅助性的物理量$\boldsymbol{D}$,它的定义式为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \tag{13-19}$$

称$\boldsymbol{D}$为电位移(electric displacement),于是上式可用$\boldsymbol{D}$改写成

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_{(S内)} q_0 \tag{13-20}$$

(13-20)式中只包含自由电荷,不包含束缚电荷,习惯上称为电介质中的高斯定理(Gauss's theorem in dielectric)。

NOTE

下面我们再进一步考虑矢量 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{P}$ 之间的关系。把 $\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 代入(13-19)式得

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}=(1+\chi_e)\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{13-21}$$

其中量纲为 1 的比例常量

$$\varepsilon_r=1+\chi_e \tag{13-22}$$

称为电介质的相对介电常量或简称为介电常量(dielectric constant)。于是(13-21)式可以记为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} \tag{13-23}$$

必须指出,(13-23)式中矢量 $\boldsymbol{D}$ 正比于 $\boldsymbol{E}$ 是在各向同性的电介质中,并且 $\boldsymbol{E}$ 不很大的情况下才成立的。在各向异性的电介质中,$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的方向一般是不同的。

电位移线可以形象地描述矢量 $\boldsymbol{D}$ 的分布。电位移线的方向和密度的定义与电场线类似。电场线既能发自和终止于自由电荷,也能发自和终止于束缚电荷;而电位移线只能发自和终止于自由电荷,但电位移线可连续地通过束缚电荷所在点而不中断。

3. 电介质在电容器中的作用

电容器有两个重要指标:电容和极限电压。如果在电容器中加入电介质,对提高电容器这两方面的性能均有好处。下面分别作简单的叙述。

(1) 增大电容,减小体积

设平行板电容器在未放入电介质前,电容为 C_0,两板间电势差为 V_0,极板上的电荷量为 q_0,则

$$C_0=\frac{q_0}{V_0}$$

若在电容器的两极板间充满相对介电常量为 ε_r 的电介质,如图 13-19 所示,则可在上极板作一正圆柱形高斯面。由电介质中的高斯定理可得

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=DS=\sigma_0 S$$

式中 σ_0 为极板上的自由电荷面密度,S 为高斯面上底面的面积,于是得

$$D=\sigma_0$$

因为未放入电介质时极板间电场强度 $E_0=\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$,由此得到

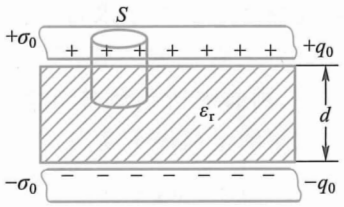


图 13-19 平行板电容器充满电介质后电容增加

NOTE

$$E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{E_0}{\varepsilon_r} \tag{13-24}$$

考虑到 $V_0=E_0d$，因此充满电介质后，电容器的电容为

$$C=\frac{q_0}{V}=\frac{q_0}{Ed}=\frac{\varepsilon_r q_0}{E_0 d}=\frac{\varepsilon_r q_0}{V_0}=\varepsilon_r C_0 \tag{13-25}$$

可见，充满电介质后，电容器的电容增大到无电介质时的 ε_r 倍。对于相同尺寸的电容器，充入电介质的 ε_r 越大，电容就越大。同理，对于相同电容的电容器，若电介质的 ε_r 越大，则电容器的体积就越小。

（2）提高极限电压，增大耐压能力

电介质在一般情况下是不导电的，但在很强的电场中其绝缘性能会遭到破坏，即通常说的电介质被击穿。一种电介质材料所能承受的最大电场强度称为击穿电场强度。例如，经测定一个大气压（10^5 Pa）的空气，其击穿电场强度为 10^6 V/m。一旦电场强度超过这个数值，空气就会被电击穿。多数电介质材料的击穿电场强度比空气高，因而填充这类电介质可以提高电容器的耐压能力。

例 3

如图 13-20 所示，沿 x 轴放置的被极化的电介质圆柱体底面积为 S。已知电介质内各点电极化强度 $\boldsymbol{P}=kx\boldsymbol{i}$（$k$ 为常量，$\boldsymbol{i}$ 为 x 轴单位矢量），求圆柱体两端面上的束缚电荷面密度和圆柱体内的束缚电荷体密度。

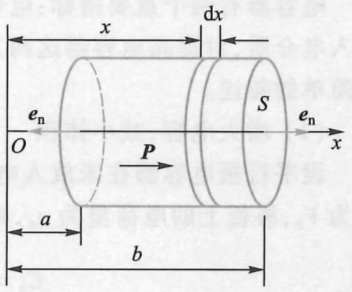


图 13-20 沿轴非均匀极化的电介质圆柱体

解 左端面上，$\sigma'_a=P_a\cos\pi=-ka$；右端面上，$\sigma'_b=P_b\cos 0°=kb$。

圆柱体内束缚电荷的体密度可由 $\boldsymbol{P}$ 的通量和 q' 的关系求得。在圆柱体内距原点 O 为 x 处任取一长度为 $\mathrm{d}x$ 的圆柱体闭合面，则面内所包围体积为 $\mathrm{d}V=S\mathrm{d}x$，体积元内束缚电荷体密度为 ρ'。由此得

$$\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=P_{x+\mathrm{d}x}S-P_xS=-\rho'\mathrm{d}V$$

$$=-\rho'S\mathrm{d}x$$

故

$$\rho'=-\frac{P_{x+\mathrm{d}x}-P_x}{\mathrm{d}x}=-\frac{k(x+\mathrm{d}x)-kx}{\mathrm{d}x}$$

$$=-k$$

例 4

如图 13-21 所示，一平行板电容器两极板相距为 d，面积为 S，中间平行于极板放入厚度为 t、相对介电常量为 ε_r 的电介质。设两极板间的电势差为 V，极板上的自由电荷面密度为 σ_0。试求电介质中和空气间隙中的电场强度和电位移，并计算电容器中的电容 C。

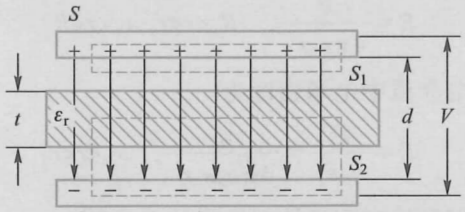


图 13-21 未充满电介质的平行板电容器

解 设空气中的电场强度和电位移分别为 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{D}_0$，电介质中的电场强度和电位移分别为 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$。如图作一柱形高斯面 S_1，由高斯定理得

$$\oint_{S_1} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_0 \Delta S = \sigma_0 \Delta S$$

故

$$D_0 = \sigma_0$$

$$E_0 = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

又作一如图所示的柱形高斯面 S_2，得

$$\oint_{S_2} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -D\Delta S = -\sigma_0 \Delta S$$

故

$$D = \sigma_0 = D_0$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

两极板间的电势差为

$$V = E_0(d-t) + Et = \varepsilon_r E(d-t) + Et$$

整理后得电介质中的电场强度和电位移为

$$E = \frac{V}{\varepsilon_r d + (1-\varepsilon_r)t}$$

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V}{\varepsilon_r d + (1-\varepsilon_r)t}$$

空气间隙中的电场强度为

$$E_0 = \varepsilon_r E = \frac{\varepsilon_r V}{\varepsilon_r d + (1-\varepsilon_r)t}$$

电容器的电容为

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\sigma_0 S}{V} = \frac{DS}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{\varepsilon_r d + (1-\varepsilon_r)t}$$

[说明]平行板电容器中放入未充满的平行于极板的均匀电介质时，空气和电介质中的电位移处处相等，均为 $D=\sigma_0$。电介质中的电场强度是空气中电场强度的 $\frac{1}{\varepsilon_r}$，即 $E=\frac{E_0}{\varepsilon_r}$。

例 5

球形电容器由半径为 R_1 的导体球和与它同心的半径为 R_2 的导体球壳组成；其间充有一层同心的均匀电介质球壳，内外半径分别为 r_1 和 r_2，相对介电常量为 ε_r，如图 13-22 所示。设导体球和导体球壳带电量分别为 $+q$ 和 $-q$，求电容器的电容。

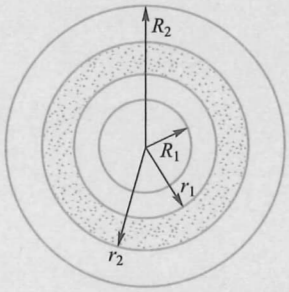


图 13-22 未充满电介质的球形电容器

解　由高斯定理得空气中电场强度为

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad R_1<r<r_1,r_2<r<R_2$$

电介质中电场强度为

$$E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2},\quad r_1<r<r_2$$

则导体球和导体球壳间的电势差为

$$V_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{R_1}^{r_1}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+\int_{r_1}^{r_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\mathrm{d}r+\int_{r_2}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\varepsilon_r r_1 r_2(R_2-R_1)+(1-\varepsilon_r)(r_2-r_1)R_1R_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1R_2r_1r_2}q$$

因此，电容为

$$C=\frac{q}{V_{12}}=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1R_2r_1r_2}{\varepsilon_r r_1r_2(R_2-R_1)+(1-\varepsilon_r)(r_2-r_1)R_1R_2}$$

13-7　电场的能量

1. 带电导体的能量

NOTE

由于极性相同的电荷之间存在着静电斥力，所以要把电荷聚集到一个原来不带电的导体上，外力必须反抗静电斥力而做功。设某一时刻导体上具有电荷 q'，则此时导体具有电势 $V'=\frac{q'}{C}$。如果再从无限远处把电荷 $\mathrm{d}q'$ 迁移到导体上，则外力必须反抗静电力做的元功为

$$\mathrm{d}W=-\mathrm{d}W_e=-(V_\infty-V')\mathrm{d}q'=V'\mathrm{d}q'$$

式中，$\mathrm{d}W_e$ 为把 $\mathrm{d}q'$ 从无限远处移至导体的过程中静电力所做的元功；V_∞ 为无限远处的电势，即 $V_\infty=0$。因此，导体上的电荷从零增加到 q 时，外力反抗静电力所做的总功 W 全部转化为带电导体的能量，即

$$U_e=\int_0^q V'\mathrm{d}q'=\int_0^q\frac{q'}{C}\mathrm{d}q'=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\tag{13-26}$$

设导体带电荷 q 时的电势为 V，则上式可写为

$$U_e=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}qV\tag{13-27}$$

2. 带电电容器的能量

NOTE

现在，我们来考虑电容器的情况。电容器充电做功的过程可以形象化地描述为：外力把电子从一块极板迁移到另一块极板上，使正、负电荷分离。对电容器充电做功通常是以消耗电源中的电能（或电池中储存的化学能）为代价来完成的。

假设两极板间的电势差增大到 V'_{12} 时，迁移到极板上的电荷为 q'；如果再迁移电荷元 $\mathrm{d}q'$，就必须再做元功 $\mathrm{d}W$，这个功使两极板上正、负电荷间的电势能增大 $\mathrm{d}U_e$：

$$\mathrm{d}W=\mathrm{d}U_e=V'_{12}\mathrm{d}q'$$

如果继续迁移电荷直到迁移了总电荷 q 时，将上式积分，就得到带电电容器所储存的总能量为

$$U_e=\int_0^q V'_{12}\mathrm{d}q'=\int_0^q\frac{q'}{C}\mathrm{d}q'=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \tag{13-28}$$

由关系式 $q=CV_{12}$，可将上式改写成

$$U_e=\frac{1}{2}CV_{12}^2=\frac{1}{2}qV_{12} \tag{13-29}$$

(13-29)式与(13-27)式的区别在于用电容器中两极板的电势差 V_{12} 代替了带电导体的电势 V。

3. 电场的能量

带电导体和带电电容器的能量公式都与电荷和电势联系在一起，似乎能量的携带者是电荷。但是在电磁波中，变化的电场可以脱离电荷而传播到很远的地方。电磁波携带能量已是无线电技术中人所共知的事实，这个事实使我们认识到能量的携带者是电场才是符合客观存在的。既然电容器中所储存的能量是存在于电场中的，用电场强度而不用电荷来表述电容器中储存的能量就更有意义。

已知平行板电容器的电场强度为

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

注意到电势差 $V_{12}=Ed$，$C=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$，将它们代入(13-29)式可得

NOTE

$$U_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 Sd$$

式中 Sd 是两极板间电场的空间体积。由于电场是均匀分布的，所以电场的能量也是均匀分布的。我们把电场中单位体积的能量称为电场能量密度(energy density)，即

$$u_e = \frac{U_e}{Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \tag{13-30}$$

上述结果虽是从均匀电场的特例中得出的，但是可以证明，这是一个普遍适用的公式。对于非均匀的连续变化的电场，只要知道每一点的电场能量密度，就可以求出任意体积中的电场能量。为此需要计算积分①

$$U_e = \int_V u_e \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \mathrm{d}V \tag{13-31}$$

例 6

计算半径为 R、电荷为 q 的导体球壳电场中的总电势能。设球壳外为真空。

解　电场能量密度为

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

在导体球壳内，电场强度为零；在球壳外，电场强度为

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

在球壳外半径为 r 的球面上，取半径从 r 到 $r+\mathrm{d}r$ 之间的体积元 $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$，可得电场中的能量为

$$\begin{aligned} U_e &= \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V \\ &= \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\ &= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

由此可见，能量储存在导体球壳外的空间中。

① 上面的推导都假设电荷是连续分布的，即可以无限分割电荷，因此得到的结论也只适用于电荷连续分布的情况，不适用于点电荷。容易验证，对于点电荷，用(13-31)式计算电场能量是无穷大的。这是很自然的，一个点电荷可以看成两个带一半电荷、靠得无穷近的电荷，显然电势能是无穷大的。因此自然界应该不存在点电荷。然而电荷又是量子化的。比如对于电子这样的带元电荷的粒子，其是否有大小就很关键了。我们前面说过电子在 10^{-17} m 尺度时依然是点电荷。再深入下去，一定会有新的发现，对于宏观物理而言，还是把电子当点电荷。为了避免无穷大，不考虑它本身的电场能量，只考虑点电荷之间的相互作用能，因为那是一个固定能量，不会在我们考虑的宏观过程中起作用。

13-8 静电复印

NOTE

静电复印是一种利用静电成像技术进行文本或图像复制的设备，它结合了静电成像、光学、机械和电子等多种技术，已成为现代办公的一种重要技术手段。

卡尔孙静电复印是在一块光电导体材料薄片的表面上完成的。光电导体在不受光照时为良好的绝缘体，具有非常高的暗电阻率；而受到光照时却具有导电性，电阻率很快下降。一般静电复印机的核心器件就是在接地的导电基体（如铝板或其他金属板）上直接镀上一光电导体材料薄层，称为感光鼓。

静电复印的实现主要分为四个步骤。

第一步为充电过程，如图 13-23 所示。充电就是在没有光照的黑暗条件下，通过电场的作用，让光电导体材料薄片的上表面均匀带上一定极性和数量的静电荷。其目的是让原来并不具备感光性的光电导体材料薄片对光的照射产生良好的敏感性。

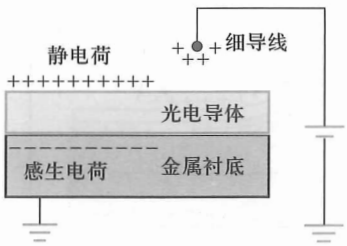


图 13-23 充电过程

当加有高压的细导线扫过光电导体的上表面时，在电场的作用下，导线附近的空气产生电离，其中的正电荷（注：有的静电复印机采用负电荷）便会均匀地附着到光电导体的上表面。由于静电感应，金属基体的上表面（与光电导体的交界面）均匀地感应出负电荷，而由于基体接地，其下表面并不带电。特别需要强调的是，因为充电过程是在黑暗中进行的，所以光电导体表现为绝缘体，故光电导体的上表面和基体之间的电荷能保留很长时间，不会立刻中和。充电过程完成后，光电导体上表面与基体之间将产生较大的电势差。

第二步为曝光过程，如图 13-24 所示。这是静电复印最为关键的一步，其目的是用光电导体的静电分布重现原稿的图像。当光照射原稿时，原稿图像的反射光经过光学成像系统投射到光电导体上表面，使光电导体曝光。这时照射到光电导体表面各处的光强度并不相同。有光照射的地方，光子被光电导体吸收后形成电子-空穴对，产生了光生载流子，导致光电导体的电阻率迅速降低，由绝缘体变成良导体，呈现导电状态。这时光电导体上表面电荷与界面处相反极性的电荷便和电子与空穴发生中和，降低了光电导体上表面的电势。

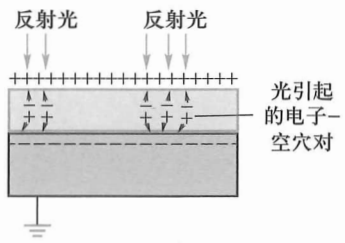


图 13-24 曝光过程

原稿上的空白处，反射光最强，光电导体所受光照射也最强，光电导体上表面的电荷被完全中和。原稿上有字或黑色处，反射光强为零，光电导体未受光的照射，依然保持绝缘状态，故光电导

体上表面的电荷得以全部保留。原稿上半白半黑处，反射光较弱，照射到光电导体的光强也较弱，光电导体上表面的电荷部分被中和、部分仍保留。因此，光电导体上表面的剩余电荷分布（或上表面电势）形成了一幅与原稿一致的静电图像，称为静电潜像。

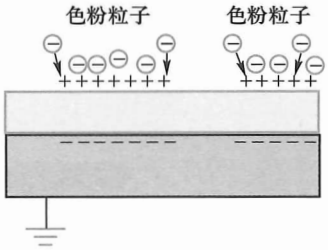


图 13-25　显影过程

第三步为显影过程，如图 13-25 所示。显影过程的目的就是使光电导体上表面的静电潜像转变成可见的色粉图像。色粉必须携带电荷，而且电荷的极性应当与光电导体上表面的静电潜像相反。因此，在静电潜像电荷所产生的电场力作用下，色粉被吸附在光电导体的上表面。静电潜像中电荷越多处，吸附的色粉就越多；反之，吸附的色粉就越少。于是光电导体上表面原本不可见的静电潜像，就变成了可见的色粉图像，并且色粉图像的灰度层次和浓淡结构恰与原稿一致。

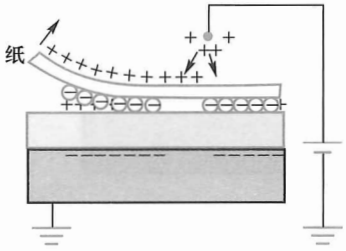


图 13-26　转印过程

第四步为转印过程，如图 13-26 所示。其目的是将反映原稿的色粉图像转移到空白的复印纸上。

当复印纸与已显影的光电导体上表面接触时，在纸张背面通过电晕装置对其放电，该电晕的极性与充电电晕相同，而与色粉所携带的电荷极性相反。由于转印电晕的电场力比静电潜像的电场力强得多，所以光电导体上表面的色粉图像就被吸附到复印纸上，从而完成了图像的转印。

转印过程结束时，由于静电的吸附作用，复印纸还紧紧地贴在光电导体表面上，所以需要将复印纸与光电导体表面分离开来，即进行分离过程。然而此时复印纸上的色粉图像是不稳定、可抹掉的，还需要采用加热与加压相结合的方式，对热熔性的色粉进行定影，完成定影过程。至此复印纸上的图像才成为原稿的永久性复制品。

NOTE

为了能开始新一次复印过程，还需要进行清洁过程和消电过程。清洁就是清除经转印后还残留在光电导体上表面的色粉，否则将影响到后续复印品的质量。静电复印机中一般采用刮板、毛刷或清洁辊等装置清除光电导体上表面的残留色粉。

消电就是消除光电导体上表面的残余电荷。充电时在光电导体上表面积累的静电荷，并不会因色粉微粒的转移而消失，色粉图像转印后它们仍滞留在光电导体上表面，如果不及时清除干净，也会影响后续的复印质量。通过全面的光照，将残留在光电导体上表面的电荷全部消除干净，其原理类似于曝光过程。这些步骤完成后，系统已经完全复原，又可开始新一次的复印。

本章摘要

NOTE

1. 导体静电平衡条件

$$E_{内}=0,\quad E_{表面}\text{垂直于导体表面}$$

2. 导体静电平衡时，导体是等势体，表面是等势面，电荷分布在外表面上。孤立导体曲率半径小处电荷密度大。

3. 静电屏蔽

接地导体空腔，内外电场互不影响。

4. 电容的定义

$$C=\frac{q}{V}$$

孤立导体球电容　$C=4\pi\varepsilon_0 R$

平行板电容器　$C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

球形电容器　$C=4\pi\varepsilon_0\dfrac{R_A R_B}{R_B-R_A}$

圆柱形电容器　$C=\dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{R_B}{R_A}}$

电容器串联　$\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}+\cdots+\dfrac{1}{C_N}$

电容器并联　$C=C_1+C_2+\cdots+C_N$

5. 电介质

电介质在外电场中极化产生束缚电荷。

束缚电荷面密度　$\sigma'=P\cos\theta=P_n$

束缚电荷体密度与 $\boldsymbol{P}$ 的通量的关系　$\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\sum_{(S内)}q'=-\int_V\rho'\mathrm{d}V$。

6. 电介质中的电场

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}'$$

各向同性电介质的电极化强度　$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}$

电介质中的高斯定理　$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_{(S内)}q_0$

NOTE

其中电位移　$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$

$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的关系　$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$

7. 电介质充满电容器时可将电容增大 ε_r 倍，即

$$C=\varepsilon_r C_0$$

8. 电场的能量

带电导体的能量　$U_e=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}qV$

带电电容器的能量　$U_e=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}CV_{12}^2=\frac{1}{2}qV_{12}$

电场的能量密度　$u_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$

电场的能量　$U_e=\int_V\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2\mathrm{d}V$

思考题

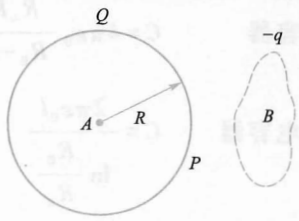
13-1　导体静电平衡的条件是什么？静电平衡时，导体如果带电，这些电荷如何分布？

13-2　在一个带电荷的金属球附近 P 点处，放置一个点电荷 $+q$，测得它所受静电力为 $\boldsymbol{F}$，试问 $\boldsymbol{F}/q$ 是大于、等于还是小于 P 点原来的电场强度？

13-3　将一个带电体移近一个空腔导体时，带电体单独在导体空腔内产生的电场是否等于零？静电屏蔽如何来体现？

13-4　平行板电容器的电容公式可写成 $C=\varepsilon_0\varepsilon_r S/d$，当两板间距 $d\to 0$ 时，$C\to\infty$。在实际应用中，我们为什么不能用尽量减小 d 的办法来制造大电容的电容器呢？

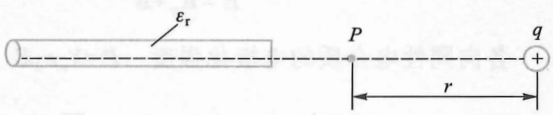
13-5　如图所示，若半径为 R 的导体球壳 A 带有电荷量 $+Q$，则非常接近球面的 P 点电场强度大小和方向如何？若将另一带电体 B（电荷量为 $-q$）移近，A 球面的电场强度是否改变？P 点的电场强度是否仍可用 $E=\sigma/\varepsilon_0$ 来表示？若可以，$-q$ 的影响体现在何处？



思考题 13-5 图

13-6　已知无限大均匀带电平面的电荷面密度为 σ，其两侧的电场强度为 $E=\sigma/2\varepsilon_0$。又已知静电平衡的导体表面某处电荷面密度为 σ，在其表面处紧靠该处的电场强度为 $E=\sigma/\varepsilon_0$。为什么前者比后者小一半？试解释之。

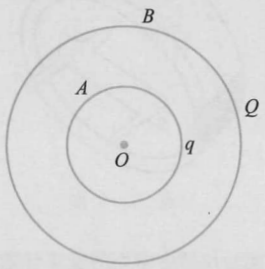
13-7　在电荷量为 q 的点电荷附近，有一细长的圆柱形均匀电介质棒。有人用有介质时的高斯定理计算出图示 P 点处的 $D=q/4\pi r^2$，再根据 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$ 求出 P 点电场强度为 $E=D/\varepsilon_0=q/4\pi\varepsilon_0 r^2$，他的解法是否正确？为什么？



思考题 13-7 图

13-8 既然每个导体都有电容，为什么一般电容器通常都要用两个相距很近的电极板？

13-9 如图所示，同心金属薄球壳 A 和 B 分别带有电荷 q 和 Q，现测得 A、B 间的电势差为 V_{AB}，则此时由 A、B 组成的球形电容器的电容值该如何确定？



思考题 13-9 图

13-10 试说明电介质的极化与导体的静电感应有何异同之处。

13-11 空气电容器充电后，在其两极板间注入煤油。试在下列条件下，讨论注满煤油前后极板的电荷面密度、两板间的电位移、电场强度、电势差和电场能量密度如何变化。

（1）煤油注入时，电容器与电源断开；

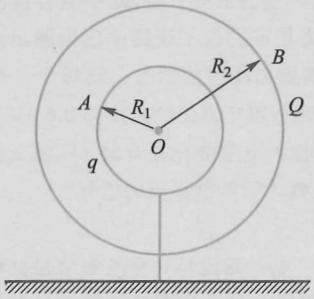
（2）煤油注入时，电容器仍与电源连接。

13-12 在高压电器设备周围，通常都要围上一接地的金属网，以保证网外人身的安全，试说明其理由。

13-13 高层建筑上的避雷针如果接地导线遭到损坏，会出现什么危险？

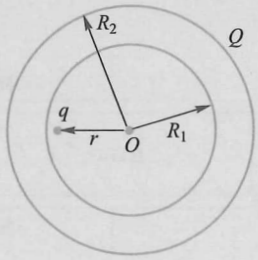
习题

13-1 有一球形电容器内球 A 半径为 R_1，外球壳 B 半径为 R_2；内球带有电荷 q，外球壳带有电荷 Q，如图所示。现将内球 A 接地，求其上的电荷量。



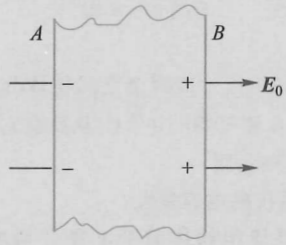
习题 13-1 图

13-2 如图所示，有一球形金属空腔，内半径为 R_1；外半径为 R_2，其上带有电荷 $+Q$；空腔内与球心 O 相距 r 处有一点电荷 q。求球心处的电势。



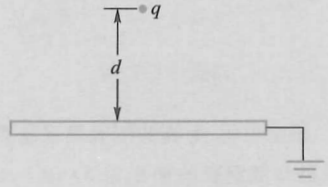
习题 13-2 图

13-3 如图所示，把一无限大的金属平板置于电场强度为 E_0 的匀强电场中，试求平板上的感应电荷面密度。



习题 13-3 图

13-4 在距一个接地的无限大导体板距离 d 处有一点电荷 q，如图所示，求导体板表面各点的感应电荷面密度 σ。



习题 13-4 图

13-5 两同心导体球壳的内球壳半径为 a，外球壳半径为 b。设球壳极薄，若使内球壳带上电荷量 Q，试问：

（1）外球壳内表面 $S_{内}$ 和外表面 $S_{外}$ 上的电荷如何分布？

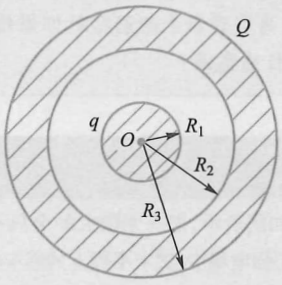
(2) 若要使内球壳电势为零,则外球壳必须带多大电荷量?

13-6 半径为 R_1 的导体球带有电荷 q,球外有一个内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的同心导体球壳,球壳上带有电荷 Q,如图所示。

(1) 试求内、外两球的电势 V_1 和 V_2 及它们的电势差 ΔV;

(2) 将外球壳接地,V_1 和 V_2 及 ΔV 变为多少?

(3) 在情形(1)中,用导线将球和球壳连接,则 V_1 和 V_2 及 ΔV 又变为多少?

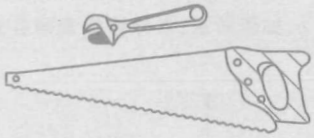


习题 13-6 图

13-7 如图所示的两个金属物体分别带有净电荷 3.8×10^{-11} C 和 -3.8×10^{-11} C,从而在它们之间产生 19.0 V 的电势差,则:

(1) 该系统的电容多大?

(2) 如果使两物体的带电量分别增加到 7.6×10^{-11} C 和 -7.6×10^{-11} C,则该系统的电容变为多少?两物体间的电势差变为多少?



习题 13-7 图

13-8 研究表明,生物的细胞膜系统都有一定的电容。如果已知细胞膜的面积为 5×10^{-6} cm^2,细胞膜的极性脂质双分子层膜的厚度为 10^{-6} cm,膜中脂质分子的相对介电常量为 $\varepsilon_r=3$,试计算该细胞膜电容的大小。当膜两侧的电势差为 0.085 V 时,细胞膜两侧的电荷为多少?如果是钾离子(K^+)造成了这种电势差,则需要多少个钾离子?

13-9 若把半径为 6 370 km 的地球视为一个孤立导体球,则其电容有多大?如果要制成学生实验室中电容为 1 F 的电容器,其几何尺寸只有几厘米,如图所示,你觉得可能吗?如何才能制成?

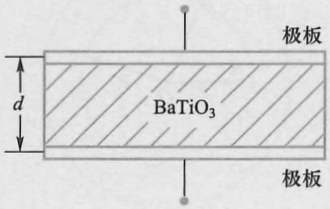


习题 13-9 图

13-10 实验仪器中常用的盖革计数管由一根细金属丝和包围它的同轴导体圆筒组成,丝的直径为 2.5×10^{-5} m,圆筒直径为 2.5×10^{-2} m,管长为 0.1 m,试计算此盖革计数管的电容。(设导体间为真空,忽略边缘效应)

13-11 常用计算机键盘的每一个键下面均连有一小块金属片,它下面与一块固定的金属片间隔一定的空气隙,这样两块金属片就组成了一个小平行板电容器。当键被按下时,此小电容器的电容就发生变化,与之相连的电子线路就能检测出是哪个键被按下了,从而给出相应的信号。设每个金属片的面积为 50 mm^2,两金属片之间的距离为 0.6 mm。如果电子线路能检测出的电容变化是 0.25 pF,那么需要将键按下多大的距离才能给出必要的信号?

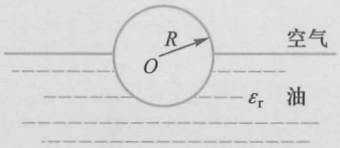
13-12 电介质的相对介电常量是材料的重要参量之一,利用平行板电容器就可测定材料的相对介电常量。现有某长方体的介质材料(如 $BaTiO_3$)样品,其厚度为 $d=5\times10^{-3}$ m,截面积为 $S=7.85\times10^{-5}$ m^2。把样品放入如图所示的平行板电容器,在精密的电容电导电桥上测得电容值为 $C=873$ pF,试求此材料的相对介电常量。



习题 13-12 图

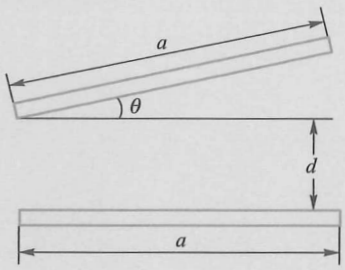
13-13 一圆柱形电容器外圆柱面的内半径 $R_2=2\times10^{-2}$ m，内圆柱面的半径 $R_1=1\times10^{-2}$ m，两圆柱面间充满击穿电场强度为 2.0×10^{7} V·m^{-1} 的电介质，请问该电容器能承受的最大电压是多少？

13-14 一个由黄铜制成的金属球一半浸在油中，一半在空气中，如图所示。已知油的相对介电常量为 $\varepsilon_r=3$，球上带有净电荷 2.0×10^{-6} C，试求球上、下两部分分别带有多少电荷。



习题 13-14 图

13-15 一电容器的两极板均为边长为 a 的正方形，两板间成 θ 角，如图所示。试证明：当 θ 角很小时，它的电容为 $C=\dfrac{\varepsilon_0 a^2}{d}\left(1-\dfrac{a\theta}{2d}\right)$。



习题 13-15 图

13-16 一空气平行板电容器，两极板间距为 $d=1.5\times10^{-2}$ m，接在 3.9×10^{4} V 的电源上。如果空气的击穿电场强度为 3×10^{6} V·m^{-1}，这个电容器会被击穿吗？现将一厚度为 $d/5$、相对介电常量为 $\varepsilon_r=7$ 的玻璃板平行插入此电容器。若玻璃的击穿电场强度为 1.0×10^{7} V·m^{-1}，这时该电容器会被击穿吗？

13-17 空气的击穿电场强度为 3.0×10^{6} V·m^{-1}，试求空气中半径分别为 1.0 cm、1.0 mm、0.1 mm 的长直导线单位长度上最多能带多少电荷？

13-18 一平行板电容器两极板上带有等量异号电荷，两板间充满相对介电常量为 $\varepsilon_r=3$ 的电介质。已知电介质中的 $E=1\times10^{6}$ V·m^{-1}，试求：

（1）电介质中 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{P}$ 的大小；

（2）极板上自由电荷及介质束缚电荷分别产生的电场强度 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{E}'$ 的大小。

13-19 一圆柱形电容器是由半径为 R_1 的圆柱导体和与它同轴的导体圆筒构成，圆筒的内半径为 R_2，长为 $l(l\gg R_1、R_2)$，其间充满相对介电常量为 ε_r 的电介质。设沿轴向单位长度带电量分别为 $+\lambda_0$ 与 $-\lambda_0$，略去边缘效应，试求：

（1）电介质中的 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{P}$；

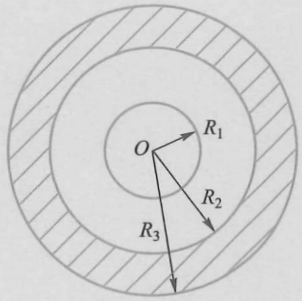
（2）两极板间的电势差；

（3）电介质表面的束缚电荷面密度 σ'。

13-20 一半径为 R_1 的导体球带电量为 Q，球外有一层用均匀电介质制成的同心球壳，其内、外半径分别为 R_2 和 R_3，电介质的相对介电常量为 ε_r，如图所示。试求：

（1）电介质内外的 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 分布；

（2）电介质内的 $\boldsymbol{P}$ 和介质表面的束缚电荷面密度 σ'。



习题 13-20 图

13-21 一空气平行板电容器两极板的间距为 d，板面积为 S。将其充电到带电荷 Q 后与电源断开，然后用外力缓慢地把两极板间距拉大到 $2d$。试求在拉大过程中：

（1）电容器内电场能量的变化；

（2）外力所做的功；

（3）讨论其中的功能转换关系。

13-22　半径为 a 的长直导线外面套有内半径为 b 的同轴导体圆筒，两导体间充满相对介电常量为 ε_r 的均匀电介质；沿轴向单位长度上的导线带电 $+\lambda$，圆筒带电 $-\lambda$。忽略边缘效应，求沿轴向单位长度的电场能量。

13-23　有一半径为 R 的导体球，其上带有电荷 Q，处在一无限大的均匀电介质中。若电介质的相对介电常量为 ε_r。

（1）试求电场的总能量；

（2）电场能量的一半分布在半径多大的球面内？

13-24　地球表面附近晴天时的电场强度约为 $100\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$。

（1）相应的电场能量密度多大？

（2）假设地球表面以上 10 km 范围内的电场强度都是这一数值，那么在此范围内所储存的电场能量有多少？



习题答案

第十四章　电流和磁场

本章首先简单地介绍电流、电流密度和电动势的概念，导出电流及其电流密度之间的关系，讨论 RC 电路的暂态过程。然后着重讨论电流和运动电荷在真空中产生磁场的规律，介绍了描述磁场的两条重要的定理——磁场高斯定理和安培环路定理，并利用毕奥-萨伐尔定律和安培环路定理计算磁场的分布。接下来讨论磁场对电流和运动电荷的作用规律以及电流之间相互作用的规律。最后用相对论和电荷不变性来阐明运动电荷的电场和磁场，从库仑定律和狭义相对论出发推导出磁力的公式，从而在狭义相对论的基础上建立起一个统一的电磁场。



本章补充资源

14-1　电流

NOTE

电荷的定向流动形成电流（electric current）。电流可以出现在固体（金属、半导体）和液体（电解液）中，也可以出现在气体中[①]。但无论在何种介质中，电流的形成必须满足两个条件，一是介质内必须存在能够移动的带电粒子，称为载流子；二是介质内部必须存在电场。载流子可以是电子或者离子，也可以是带有净余电荷的宏观粒子（例如带电尘埃和液滴）。在无电场时，载流子只参与分子的热运动，没有定向运动，故电流为零。当加上电场后，载流子杂乱无章的热运动速度 $\boldsymbol{v}$ 将与定向运动速度 $\boldsymbol{u}$ 叠加。由此可见，载流子的速度是 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$。因为 $\boldsymbol{v}$ 的统计平均值为零，所以载流子的平均速度为

$$\overline{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}}=\overline{\boldsymbol{v}}+\overline{\boldsymbol{u}}=\overline{\boldsymbol{u}}$$

通常称该平均速度为漂移速度（drift speed），其数量级为 10^{-3} m/s。

电流的强弱可以用电流（current）I 来定量地表征。电流的定义为单位时间内通过某一截面内的电荷量。如果在 $\mathrm{d}t$ 时间内通过截面的电荷量为 $\mathrm{d}q$，则电流等于

① 电流通过气体称为气体放电。

NOTE

$$I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{14-1}$$

通常取正电荷载流子的流动方向为电流的方向。电流的单位为安[培],记为 A。

在电流通过的截面上,运动电荷的分布可以不均匀。电流密度(current density)矢量 $\boldsymbol{j}$ 的引入就是为了准确地描述电流的分布。其数值等于通过垂直于某点电流方向的单位截面上的电流,即

$$j=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_{\perp}}$$

若某截面面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的法线 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 与电流方向成 θ 角,则

$$j=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S\cos\theta}$$

$\boldsymbol{j}$ 的方向为该点正电荷载流子的速度方向。于是上式可写成

$$\mathrm{d}I=j\mathrm{d}S\cos\theta=\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{14-2}$$

若已知空间每一点处的电流密度矢量,则可以求出通过任意截面积为 S 的电流:

$$I=\int_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{14-3}$$

由(14-3)式可知,电流是电流密度矢量穿过截面 S 的通量。

14-2 电动势

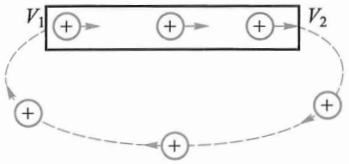


图 14-1 非静电力将正电荷从低电势端送到高电势端

如果我们不采取措施来维持导体内部的电场,由于载流子的流动,导体内部的电场很快就会消失,于是电荷定向运动很快就会停止,电流就会消失。这是由于导体中存在电阻,静电力移动电荷所做的功转化为电阻上消耗的焦耳热,而静电力不可能让电荷再返回到原来电势较高的位置,因此电流不能维持下去。为了维持长时间的电流,需要不断地将电流所携带的正电荷(假定载流子是正的)从导体上的低电势端送回到高电势端,如图 14-1 所示。换句话说,必须使电荷沿闭合电路循环流动。

由静电场的环路定理可知,静电场的电场强度环流等于零,即

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

因此在闭合电路中,除存在正载流子从电势高处向电势低处运动的区间外,还必然存在正载流子从电势低处朝电势高处方向

迁移的区间。对后者，正电荷是朝反抗静电力的方向迁移（如图 14-1 中虚线所示的区间）的，因此载流子的这种迁移只有借助非静电起源的外来力才能实现。非静电起源的外来力称为非静电力。由此可见，为了维持电流，必须有非静电力。非静电力可以由化学过程、载流子在两种不同物质界面上的扩散或者随时间变化的磁场所产生的电场（称感生电场或涡旋电场）等提供。

NOTE

提供非静电力的装置称为电源。在电源的外部，只有静电场 $\boldsymbol{E}$；在电源的内部，除有静电场 $\boldsymbol{E}$ 外，还有非静电力 $\boldsymbol{F}_{非}$。电源有两个极，电势高的称为正极，电势低的称为负极，非静电力由负极指向正极。非静电力把正电荷从负极移向正极，必须克服静电场力而做功，也即需要消耗其他形式的能量。为了表征电源做功的本领，我们把单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时，非静电力所做的功定义为电源的电动势（emf）$\mathscr{E}$。若在电源内部电荷 q 从负极移到正极，非静电力所做的功为 W，则

$$\mathscr{E}=\frac{W}{q} \tag{14-4}$$

由上式可知，电动势 $\mathscr{E}$ 的量纲和电势的一样，所以 $\mathscr{E}$ 的单位也是伏[特]，记为 V。电动势是标量，习惯上，常规定自负极经电源内部到正极的方向为电动势的方向。

存在于电源内部的非静电力，可以等效地视为一种非静电性电场强度的作用，因此可以仿效静电场，将作用于电荷 q 上的非静电力 $\boldsymbol{F}_{非}$ 表示为

$$\boldsymbol{F}_{非}=q\boldsymbol{E}_{K} \tag{14-5}$$

式中 $\boldsymbol{E}_{K}$ 称为非静电性电场强度。在电源内部非静电力将电荷 q 从负极 A 移到正极 B 过程中所做的功为

$$W_{AB}=\int_{A(内)}^{B}\boldsymbol{F}_{非}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=q\int_{A(内)}^{B}\boldsymbol{E}_{K}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

于是，电源的电动势为

$$\mathscr{E}_{AB}=\frac{W_{AB}}{q}=\int_{A(内)}^{B}\boldsymbol{E}_{K}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{14-6}$$

若整个闭合回路上都存在非静电力，则整个回路的电动势为

$$\mathscr{E}=\oint_{L}\boldsymbol{E}_{K}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{14-7}$$

需要引起读者注意的是：尽管电动势和电势差的单位相同，但不要将两者混为一谈。因为与电势差有关的是静电力做功，而和电源有关的是非静电场力 $\boldsymbol{F}_{K}=q\boldsymbol{E}_{K}$ 的做功。静电场是保守力场，而 $\boldsymbol{E}_{K}$ 是非保守力场。

14-3 电容器的充电和放电

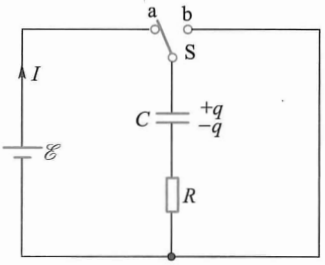


图 14-2 *RC* 电路

仅由电阻所组成的恒定电路中，电流不会随时间变化。但是，若电路中含有电容器，则电路中的电流不再恒定，而是随时间变化，产生一个电路理论中所谓的暂态过程。如图 14-2 所示，一电路由电容 C、电阻 R 和电源 $\mathscr{E}$（内阻不计）所组成，我们研究当开关合上或打开以后，电路暂态过程中电容器电荷量和电路电流的变化规律。

1. 电容器的充电过程

NOTE

设初始时刻电容器的电荷量为零，当开关 S 接至 a 端后，电容器开始充电。若在时刻 t，电容器极板上的电荷量为 q，两极板间的电势差为 V_C，电路中的电流为 I，则有 $V_C=\dfrac{q}{C}$ 和 $I=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$。由全电路欧姆定律

$$I=\frac{\mathscr{E}-V_C}{R}$$

得

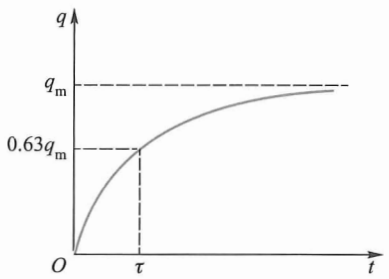
$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}-\varepsilon=0$$

由初始条件 $t=0$ 时，$q=0$，对上式积分得

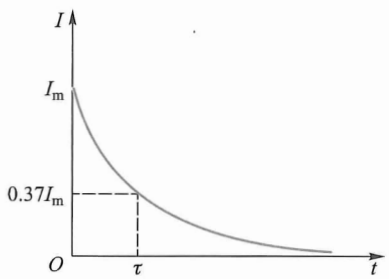
$$q=C\mathscr{E}(1-\mathrm{e}^{-t/RC})=q_{\mathrm{m}}(1-\mathrm{e}^{-t/RC})$$

对 t 求导数，可得电路中得电流为

$$I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathscr{E}}{R}\mathrm{e}^{-t/RC}=I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-t/RC}$$



(a) 电荷量随时间的变化过程



(b) 电流随时间的变化过程

图 14-3 *RC* 电路的充电过程

电容器充电过程中，电荷量 q 和电流 I 与时间的关系如图 14-3 所示。电荷量按指数规律增加，电流按指数规律减小，变化的快慢取决于 RC 的乘积。令 $\tau=RC$，称为时间常量（time constant）。当 $t=\tau=RC$ 时，$q_\tau=q_{\mathrm{m}}(1-\mathrm{e}^{-1})=0.63q_{\mathrm{m}}$，而电流为 $I=I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-1}=0.37I_{\mathrm{m}}$。当 $t=5\tau$ 时，q 已经达到 q_{m} 的 99.3%，I 为 I_{m} 的 0.7%。可见 τ 越大，电荷量的增加和电流的减小就越慢。需要指出的是，理论上来说，电容器充电时，只有时间趋于无穷大时，电容器的电荷量才达到最大值，电路中的电流才降为零。但实用中，一般 $t\geqslant 5\tau$ 时，便可认为电容器的充电过程已经基本完成。

2. 电容器的放电过程

若电容器充电到 q_0 时，将电路中开关 S 接至 b 端，这时电容器将通过电阻放电。设时刻 t，电容器极板上的电荷量为 q，两极板间的电势差为 V_C，电路中的电流为 I。由全电路欧姆定律

$$I=\frac{V_C}{R}$$

由于电容器放电，$I=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，将其代入上式，得

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=0$$

由初始条件 $t=0$ 时，$q=q_0$，得微分方程的解为

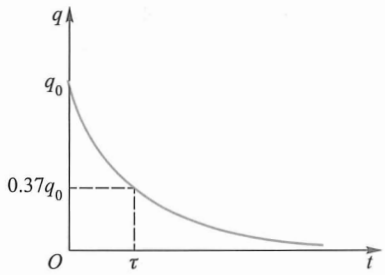
$$q=q_0\mathrm{e}^{-t/RC}$$

和

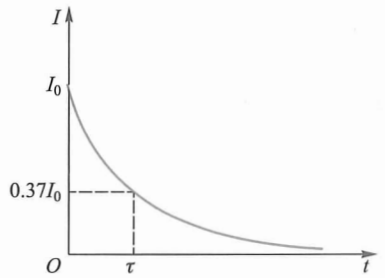
$$I=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{q_0}{RC}\mathrm{e}^{-t/RC}=I_0\mathrm{e}^{-t/RC}$$

显然，电容器放电时，极板上的电荷量 q 和电路中的电流 I 均随时间按指数规律减小，如图 14-4 所示。同样，它们变化的快慢取决于 RC 电路的时间常量 $\tau=RC$。

同样需要指出的是，从理论上来说，电容器放电时，也只有时间趋于无穷大时，电容器的电荷量才减到零，电路中的电流才降为零。而实用中，一般 $t\geqslant 5\tau$ 时，便可认为电容器的放电过程已经基本完成。



(a) 电荷量随时间的变化过程



(b) 电流随时间的变化过程

图 14-4 RC 电路的放电过程

14-4 磁力

1819 年，丹麦哥本哈根大学的教授奥斯特（H.C.Oersted）在讲授电学和磁学课时发现，放在载流导线上面的罗盘针旋转起来，如图 14-5 所示。令他感到惊奇的是，罗盘针不是南北指向，而是在转动后慢慢静止在与导线垂直的方向上。于是，奥斯特确信小磁针受到电流的作用力。

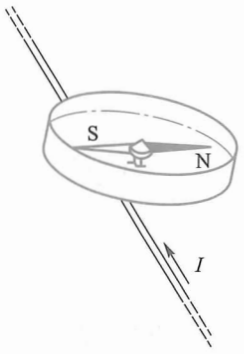
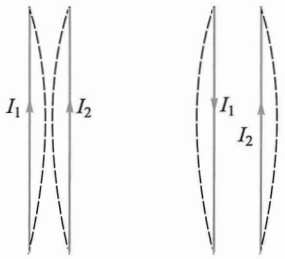


图 14-5 奥斯特实验

1820 年，安培（A.M.Ampère）在实验中发现了电流间存在相互作用力，进而指出两根载流的平行直导线，在它们的电流同向时互相吸引，在电流反向时互相排斥，如图 14-6 所示。

上述这些力，无论是电流和磁铁之间的力，还是电流和电流



(a) 同向相吸　　(b) 反向相斥

图 14-6　平行电流间的相互作用

之间的力都可以归结为运动电荷之间的基本力。小磁针看起来和电流很不相像。但是，现在我们知道，根据原子的观点，磁铁中包含着永久运动着的电荷，即原子尺度上的电流。因此，作用在磁铁上的力同样可用运动电荷之间的基本力来解释，这个基本力称为磁相互作用力，简称磁力(magnetic force)。

两根平行载流导线中每一根的单位长度上所受到的磁相互作用力，与两者的电流值 I_1 和 I_2 成正比，与两者间的距离 b 成反比：

$$F_m = k\frac{I_1 I_2}{b} \tag{14-8}$$

式中 k 为比例系数。

(14-8)式的有理化形式可表示为

$$F_m = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \tag{14-9}$$

式中 $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$ 称为磁学常量，也常称为真空磁导率。

14-5 磁场

电流之间或运动电荷之间的相互作用是通过磁场实现的。之所以称为磁场(magnetic field)，是因为奥斯特实验中发现了一种由电流激发的场对小磁针有取向作用。

由奥斯特的实验可知，磁场具有方向性，因而可用一个矢量 $\boldsymbol{B}$ 来表征。如果按照与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的类比，合乎逻辑的称呼应把 $\boldsymbol{B}$ 称为磁场强度，但由于历史的原因，磁场的这个基本的强度特征量被称为磁感应强度(magnetic flux density)。磁场强度这个名称则被一个类似于电场中 $\boldsymbol{D}$ 的辅助量 $\boldsymbol{H}$ 所占用。

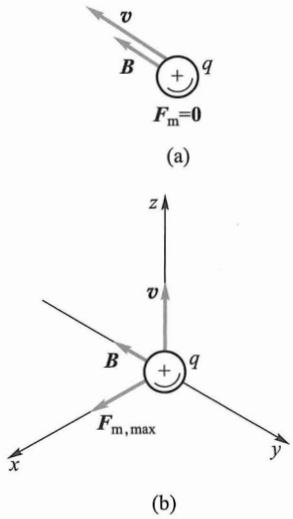


图 14-7　磁场作用在运动电荷+q上的磁力

与电场不同，磁场对静止电荷没有作用，仅对运动电荷产生作用。

载流导线是一个电中性的电荷系统，在它内部，一种极性的电荷朝一个方向运动，另一种极性的电荷则朝相反方向运动(或处于静止)，由此可知，磁场是运动电荷产生的，即运动电荷(或电流)在其周围的空间中激发磁场。

运动电荷(或电流)在磁场中会受到磁力的作用，这是磁场的基本性质。实验表明，运动的试探电荷所受磁场作用力的大小，与试探电荷的电荷量 q 和运动速率 v 成正比；力的方向垂直于该电荷的速度方向。磁场中每一点都存在一个特征方向，当试

探电荷 q 沿着这个方向运动时，它受到的磁场作用力为零，如图 14-7(a)所示，我们把这个方向规定为磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向，即该点磁场的方向；而对磁场中的每一点，当试探电荷 q 的运动速度 $\boldsymbol{v}$ 垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的方向时，它所受到的磁力最大，如图 14-7(b)所示，此时磁力的大小 $F_{m,max}$ 与试探电荷 qv 的比值却与 qv 值的大小无关，仅反映该点磁场的性质，我们把这个比值定义为 $\boldsymbol{B}$ 的大小，即 $B=\dfrac{F_{m,max}}{qv}$，它表示该点磁场的强弱。

在 SI 中，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的单位是特[斯拉]，用符号 T 表示。

实验还指出，像电场一样，磁场同样服从叠加原理，即若干个运动电荷(或电流)所产生的磁场 $\boldsymbol{B}$ 等于每一运动电荷(或电流)单独产生的磁场 $\boldsymbol{B}_i$ 的矢量和，即

$$\boldsymbol{B}=\sum_i \boldsymbol{B}_i \tag{14-10}$$

类似于电场线，我们可以用磁感线来形象地描述磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的空间分布。磁感线上任意点的切线方向和该处的磁场方向一致。在磁场中，磁感线都是环绕电流的闭合曲线，无头无尾，因此磁场是涡旋场。电流的方向与磁感线的方向服从右手螺旋定则。

NOTE

14-6 运动电荷的场

因为空间是各向同性的，所以如果电荷是静止的，则所有的方向都是等价的。由此可以解释为什么静止的点电荷所产生的静电场具有球对称性这一事实。

在电荷以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的情况下，空间中出现一个占优势的方向，即矢量 $\boldsymbol{v}$ 的方向，因此可以设想运动电荷产生的磁场具有轴对称性。必须指出，这里讲的运动电荷是以恒定速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的。

现在我们来研究以恒定速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的点电荷 q 在 P 点所产生的磁场，如图 14-8 所示。我们知道，场是以速度 $c=3\times10^8\,\mathrm{m/s}$ 在空间传播的，由波的传播特性可知，P 点在时刻 t 的 $\boldsymbol{B}$ 是由某个更早时刻 $t-\tau$ 时点电荷 q 的位置决定的，而不是由 t 时刻电荷 q 的位置所决定。因此，

$$\boldsymbol{B}(P,t)=f[q,\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}(t-\tau)]$$

式中 P 表示在某一静止参考系中所确定的位置，$\boldsymbol{r}(t-\tau)$ 是电荷 q 在时刻 $(t-\tau)$ 时所在位置到 P 点的径矢。

如果电荷的运动速度大小 v 远小于 c，即 $v \ll c$，则磁场 $\boldsymbol{B}$

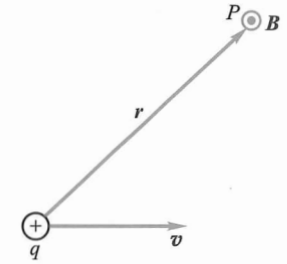


图 14-8 运动电荷 q 在 P 点产生的磁场

NOTE

传播的滞后时间 τ 便小到可以忽略不计。在这种情况下，可以认为 t 时刻的 $\boldsymbol{B}$ 是由电荷 q 在同一时刻 t 的位置所决定。因此，有

$$\boldsymbol{B}(P,t)=f[q,\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}(t)] \tag{14-11}$$

(14-11)式中函数 $\boldsymbol{B}(P,t)$ 的具体形式只能由实验来确定。

实验指出[见后面的(14-15)式]，在 $v\ll c$ 的情况下，运动电荷所产生磁场的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e}_r)}{r^2} \tag{14-12}$$

式中，r 是场源电荷 q 到场点 P 的距离，$\boldsymbol{e}_r$ 是径矢 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量。

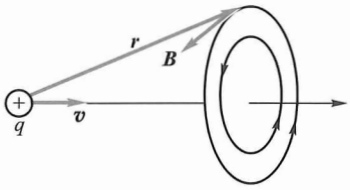


图 14-9 匀速运动的电荷 q 产生的磁场

由(14-12)式可知，匀速运动的电荷所产生磁场的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 总是垂直于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{e}_r$ 所决定的平面，其磁感线是一些以运动电荷的运动轨迹为轴的同心圆，如图 14-9 所示。由于磁场 $\boldsymbol{B}$ 也随运动电荷一起运动，因此，在空间每一点的磁场 $\boldsymbol{B}$ 随时间而变化。

必须指出：在电荷 q 运动的情况下，空间中优势方向的出现，将导致运动电荷产生的电场也失去球对称性而具有轴对称性。相应的计算表明，以恒定速度 $\boldsymbol{v}$ 运动着的电荷，其电场线具有如图 14-10 所示的形状。

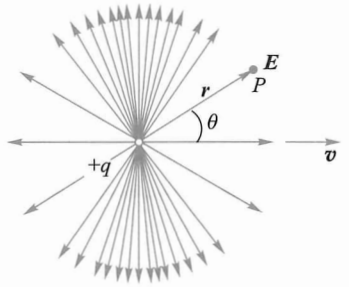


图 14-10 匀速运动的电荷 q 产生的电场

P 点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向是从 t 时刻电荷 q 的位置引向 P 点的径矢 $\boldsymbol{r}$ 的方向。

电场强度的大小也可通过电磁场的洛伦兹变换得到[后面的(14-49)式][①]：

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{1-v^2/c^2}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}} \tag{14-13}$$

式中，θ 是速度 $\boldsymbol{v}$ 与径矢 $\boldsymbol{r}$ 间的夹角。

在 $v\ll c$ 的情况下，P 点的电场强度大小为

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

写成矢量形式为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{14-14}$$

(14-14)式表明，在 $v\ll c$ 时，匀速运动的点电荷在每一时刻的电场，实际上与位于该时刻运动电荷所在点的静止电荷产生的静电场没有区别。但是要记住，这个“静电场”是随电荷一起运动的，因此空间中每一点的电场都随时间变化。

在 v 可与 c 相比时，在离电荷同样远处，在垂直于 $\boldsymbol{v}$ 方向上的电

① 匀速运动的点电荷产生的电场的电场线图和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的大小的计算，可参见 E. M. 珀塞尔所著的《伯克利物理学教程》第二卷电磁学的中译本(科学出版社，1979 年第一版，第 199~第 204 页)。

场强度将显著地大于运动方向上的电场强度;即在运动方向上电场线“变疏”,而通过电荷并垂直于 $\boldsymbol{v}$ 方向的那部分空间附近电场线“变密”。

14-7 毕奥-萨伐尔定律

NOTE

任意载流导线都会在其周围激发磁场。由于磁场遵从叠加原理,因此我们可以把任意形状的载流导线分成许多电流元,则整个载流导线产生的磁场就是所有电流元产生磁场的叠加。但是,恒定电流总是连续且闭合的,我们无法用实验方法直接得到电流元所产生的磁场。为此,毕奥(J.B.Biot)和萨伐尔(F.Savart)在 1820 年,对不同形状的载流导线所产生的磁场进行了大量的实验研究工作,数学家拉普拉斯(P.Laplace)分析了他们所得到的大量实验数据,发现任意电流所产生的磁场都是所有电流元单独产生的磁场的矢量和,从而倒推出长为 $\mathrm{d}l$ 的电流元所产生磁场的磁感应强度公式——毕奥-萨伐尔定律(Biot-Savart law)。

如图 14-11 所示,在一段电流为 I 的导线上任取一线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,线元矢量大小为 $\mathrm{d}l$,方向为导体中正电荷的运动方向,则称 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为电流元。电流元的大小为 $I\mathrm{d}l$,方向为线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向。于是,毕奥-萨伐尔定律可表述如下:

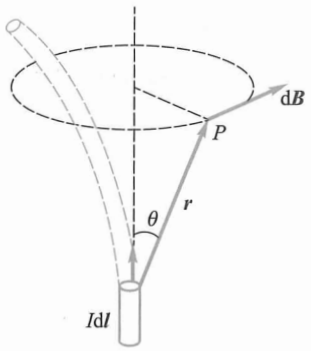


图 14-11 电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 产生的磁场

载流导线中任意电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在空间任意点 P 处的磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2} \tag{14-15}$$

上式中 $\boldsymbol{e}_r$ 是源点(电流元)到场点 P 的径矢 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量,r 为径矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小;$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 所决定的平面,并由右手螺旋定则确定。$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的大小可表示为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2} \tag{14-16}$$

式中 θ 为 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 的夹角。

利用叠加原理,对(14-15)式进行积分,可求出任意形状的载流导线所产生的磁感应强度,即

$$\boldsymbol{B}=\oint\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\oint\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2} \tag{14-17}$$

需要指出,(14-15)式是先于(14-12)式由实验确定的,不仅

NOTE

如此，(14-12)式正是由(14-15)式推导出的。

下面就利用(14-17)式，计算载流直导线的磁场。

如图 14-12 所示，根据毕奥-萨伐尔定律，载流直导线上任意电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在同一点 P 处所产生元磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向都相同(垂直纸面向里)，因此总磁场 $\boldsymbol{B}$ 的大小就是 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的代数和。对于一段有限长导线来说，P 点磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$B=\int_{A_1}^{A_2}\mathrm{d}B=\int_{A_1}^{A_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

若 P 点到直导线的距离为 r_0，电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 到垂足 O 点的距离为 l，则由图 14-12 可以看出

$$r=\frac{r_0}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{r_0}{\sin\theta}$$

$$l=r\cos(\pi-\theta)=-r\cos\theta=-r_0\cot\theta$$

取微分得

$$\mathrm{d}l=r_0\csc^2\theta\mathrm{d}\theta$$

于是，将上面积分中的变量统一变换成 θ 后，可得

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{I\sin\theta\mathrm{d}\theta}{r_0}=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\qquad(14-18)$$

式中 θ_1 和 θ_2 分别为 θ 角在 A_1 和 A_2 两端点处的数值。

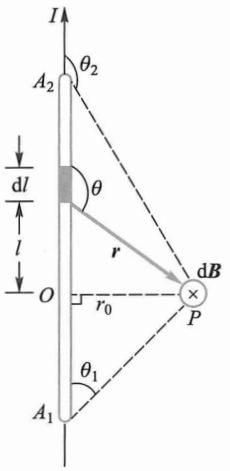


图 14-12 载流直导线的磁场

对于无限长载流直导线，$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$，则

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}\qquad(14-19)$$

载流直导线的磁场，其磁感线是一组围绕直导线的同心圆。

在恒定电流的情况下，载流直导线只产生磁场而不产生电场。这是由于载流直导线是呈电中性的，导线中的自由电子和以晶格形式排列整齐且静止不动的正离子的电荷线密度等值异号，故载流直导线的净电荷线密度为零，因此净电场为零。

我们再利用(14-15)式来计算载流圆线圈轴线上的磁场。

如图 14-13 所示，设通有电流 I 的载流圆线圈，半径为 R，圆心为 O，则电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在轴线上一点 P 处产生的元磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin 90^\circ}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}$$

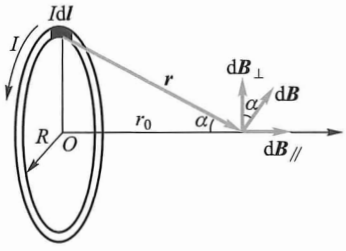


图 14-13 载流圆线圈轴线上的磁场

由于轴对称性，圆线圈上各电流元在 P 点产生的元磁场大小相等；方向虽各不相同，但有着轴对称分布的特点，因此合成后垂直于轴线的分量互相抵消，只剩下沿轴线的分量。对于整个圆线圈来说，总磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 将沿轴线方向，其大小等于各元磁场的轴线分量 $\mathrm{d}B\sin\alpha$ 的代数和，即

NOTE

$$B=B_{//}=\oint \mathrm{d}B\sin\alpha=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\alpha}{r^2}\oint \mathrm{d}l=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{r^3}2\pi R=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+r_0^2)^{3/2}} \tag{14-20}$$

在圆线圈的圆心处，$r_0=0$，则

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R} \tag{14-21}$$

当轴线上 P 点远离圆线圈，即 $r_0\gg R$ 时，则轴线上 P 点的磁场为

$$B=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{r_0^3}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\pi R^2}{r_0^3}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{r_0^3}$$

式中 $S=\pi R^2$ 为圆线圈的面积。令

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}=IS=IS\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$

为线圈的磁矩，$\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 为载流线圈中与电流成右手螺旋关系的法向单位矢量，则有

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}}{r_0^3} \tag{14-22}$$

载流圆线圈的磁感线如图 14-14 所示。可以看出，磁感线是套在圆线圈上的闭合曲线，磁感线的方向与电流之间遵从右手螺旋定则。

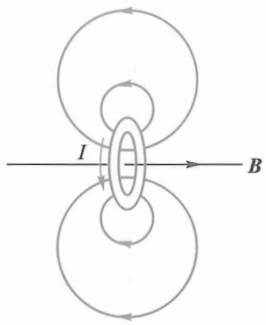


图 14-14 载流圆线圈的磁感线

例 1

假定地球磁场可等效为由一个在赤道下面离地心平均距离 5 000 km 的环形圆电流产生的，若两磁极处的地球磁场为 10^{-4} T，试问该电流值应为多大？

解 设地球磁极到地心的距离为 $r_0=6\,370$ km。由题意知，圆电流半径为 $R=5\,000$ km。由(14-20)式

$$B=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+r_0^2)^{3/2}}$$

得

$$I=\frac{2(R^2+r_0^2)^{3/2}B}{\mu_0 R^2}$$

$$=\frac{2\{[(5\times10^6)^2+(6.37\times10^6)^2]^{3/2}\}\times10^{-4}}{4\pi\times10^{-7}\times(5\times10^6)^2}$$

$$=3.38\times10^9\ \mathrm{A}$$

可见，地球内部存在约 10^9 A 数量级的电流，这种电流产生的起因可用所谓的直流发电机理论来解释。

根据直流发电机理论，地球的铁镍核心与法拉第的直流发电机的铜圆盘相似，而且其作用也像一个巨大的天然直流发电机。当地核的辐射使地核中的液体产生对流运动时，这种对流现象使得地核靠里面部分的旋转速度比靠外面的部分快，因而地核中里外两部分液体旋转速度的差异就产生电流，这种电流就形成了地

NOTE

球磁场并使它维持下去。

一个有趣而奇妙的事实是地球磁场的方向会出现反转。据科学家估计,在过去的360万年中,地球磁场出现了9次反转。

地球磁场的磁轴和地理轴之间有个夹角,地球磁轴的两极称为磁北极和磁南极,而地理轴的两极才是真正的北极和南极。现在,磁南极大约在加拿大以北,纬度高于70°的某个岛屿上;磁北极在南极洲的罗斯海附近。由于地球磁极和地理极大约相距160 km,所以大部分地区罗盘针的北极通常指向地理北极的东侧或西侧。在地球表面上的任何一个地方,罗盘针的北极与地理北极之间的夹角,就称为那个地方的磁偏角。经过长期对地球磁场的观测,人们发现:地球上某一固定地点的磁偏角并非固定不变,而是随时间而变化的。在某些地方,一个世纪变化几度,例如自1600年以来,伦敦的磁偏角从偏东11°变到偏西24°。

14-8 磁场的高斯定理 安培环路定理

1. 磁场的高斯定理

仿照前面引入电通量的办法,我们定义磁感线通过某一曲面S的通量(简称磁通量,magnetic flux)为

$$\Phi_m = \int_S B\cos\theta \mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{14-23}$$

式中θ是磁感应强度$\boldsymbol{B}$和面元$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$的法线$\boldsymbol{e}_n$之间的夹角。

在SI中,磁通量Φ_m的单位是韦[伯](WB)。

迄今为止,实验上尚未确证磁荷的存在[①],因此磁感线都是无头无尾的闭合曲线。可以想象,从一个闭合曲面S的某处穿进的磁感线必定从另一处穿出。由此可见,通过任意闭合曲面的磁通量为零,即

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{14-24}$$

(14-24)式称为磁场的高斯定理。磁场的高斯定理表明,磁场是无源的。

① 狄拉克(P.A.M.Dirac)曾提出磁荷(即磁单极子)的概念,用于解释电荷的量子化。但至今人们尚未找到这种磁荷,因此磁荷是否存在的问题仍然是个悬案。

2. 安培环路定理

NOTE

由静电场环路定理可知，静电场中的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 沿任意闭合环路的线积分为零，它反映了静电场是保守力场。现在我们通过分析磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 沿任意闭合环路的线积分，从而了解恒定磁场的基本性质。

安培环路定理（Ampere's law）是一条反映磁场基本特性的非常重要的定理，其表述如下：

在恒定磁场中，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 沿任意闭合环路的线积分，等于穿过该环路所有电流的代数和的 μ_0 倍，即

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 \sum_{(L内)} I \tag{14-25}$$

上式中，电流 I 的正负规定如下：当穿过闭合环路 L 的电流方向与环路 L 的绕行方向服从右手螺旋定则时，I 为正；反之，I 为负。若电流 I 不穿过环路 L，则对上式右端无贡献。

下面用最简单的无限长载流直导线产生的磁场来加以证明（设闭合环路处在一个与电流垂直的平面内）。

（1）环路围绕电流

如图 14-15 所示，在环路平面内作以导线为圆心、r 为半径的圆，环路绕行方向为逆时针方向，则圆上任意点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向处处一致，其大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

故磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 沿圆的环路的线积分为

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_L B\mathrm{d}l=B\oint_L \mathrm{d}l=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot 2\pi r=\mu_0 I$$

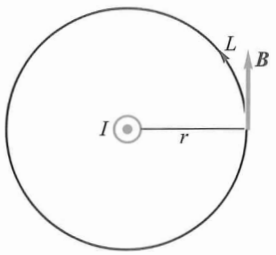


图 14-15 环路为以电流为圆心的圆

如果闭合环路是任意形状的平面环路，如图 14-16 所示，考虑到 $\mathrm{d}l\cos\theta=r\mathrm{d}\varphi$，故

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_L B\mathrm{d}l\cos\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}r\mathrm{d}\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\mu_0 I$$

所得结果与（14-25）式相同。必须指出：若电流 I 与环路绕行方向相反，则 θ 为钝角，$\mathrm{d}l\cos\theta=-r\mathrm{d}\varphi$，其线积分等于 $-\mu_0 I$。

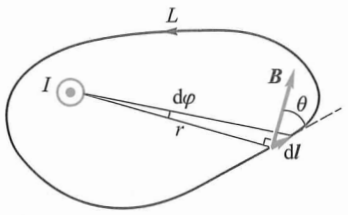


图 14-16 环路为任意形状

（2）环路不环绕电流

如图 14-17 所示，这时环路 L 中存在着如 $\mathrm{d}l_1$ 和 $\mathrm{d}l_2$ 的这样一对线元，它们对导线张有相同的圆心角 $\mathrm{d}\varphi$。设 $\mathrm{d}l_1$ 和 $\mathrm{d}l_2$ 到导线的距离分别为 r_1 和 r_2，则有

$$\mathrm{d}l_1\cos\theta_1=r_1\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}l_2\cos\theta_2=-r_2\mathrm{d}\varphi$$

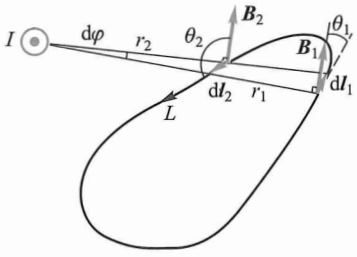


图 14-17　环路不环绕电流

NOTE

于是，对于每一对线元 $\mathrm{d}l_1$ 和 $\mathrm{d}l_2$，都有

$$\boldsymbol{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{B}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 = B_1 \mathrm{d}l_1 \cos\theta_1 + B_2 \mathrm{d}l_2 \cos\theta_2$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} r_1 \mathrm{d}\varphi - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} r_2 \mathrm{d}\varphi = 0$$

由于在沿环路的线积分中每一对线元的贡献互相抵消，所以沿整个闭合环路 L 的线积分 $\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，可见不穿过环路的电流对线积分 $\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 没有贡献。

（3）环路包围多根载流导线

假定环路包围多根载流导线，利用叠加原理可得

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L \sum_i \boldsymbol{B}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_i \oint_L \boldsymbol{B}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

上面的证明虽然局限在无限长载流直导线，并且闭合环路限制在与直导线垂直的平面内的情况下，事实上，它们对于任意形状的载流导线和任意闭合环路都是普遍成立的。

如果电流分布在闭合环路所在处的整个空间，则环路所包围的电流的代数和可表示为

$$\sum_i I_i = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{14-26}$$

式中 $\boldsymbol{j}$ 是面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 所在点的电流密度，S 是环路所包围的面积。

把(14-26)式中的电流代数和代入(14-25)式，得到

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{14-27}$$

安培环路定理反映了恒定磁场是有旋场，沿闭合磁感线作环路积分，显然结果不等于零，这和静电场的环路定理有明显区别。对于有源场，有出发点和终止点，沿着场线可以区分上游和下游（就像河水一样），因此可以定义势。而对于闭合的有旋场（后面会讲到涡旋电场），无从谈论上游和下游，无法定义势，这种场是非保守力场。它的详细研究已超出本书的范围，这里不再赘述。

安培环路定理可以帮助我们简化某些具有一定对称性载流导线磁场分布的计算，下面举几个这方面的例子。

例 2

求电流为 I、半径为 R 的无限长均匀载流圆柱导线内外的磁场分布。

解　如图 14-18 所示，圆柱导线半径为 R，通过电流为 I。根据磁场分布的轴对称性，在垂直于轴线的平面内，以轴为圆心、r 为半径的圆上，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小均相等，其方向沿圆的切线方向。

如果过圆柱导线外一点 P 作一以轴线

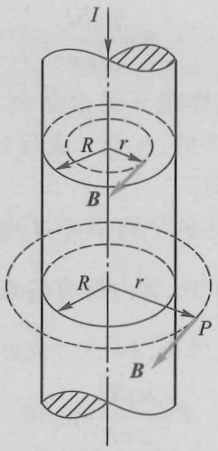


图 14-18 载流圆柱导线的磁场

为中心的圆作为积分环路 L，环路方向与电流遵从右手螺旋关系，则由安培环路定理得

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_L B\mathrm{d}l=B\oint_L \mathrm{d}l$$
$$=B\cdot 2\pi r=\mu_0 I$$

得

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r},\quad r>R \tag{14-28}$$

同样可求得圆柱导线内任意点的磁感应强度。不同的是，环路 L 内只有部分电流通过积分环路。由于导线中的电流密度为 $j=\frac{I}{\pi R^2}$，故穿过环路的电流为

$$\sum_i I_i=j\pi r^2=\frac{Ir^2}{R^2}$$

于是有

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B\cdot 2\pi r=\mu_0\sum_i I_i=\mu_0\frac{Ir^2}{R^2}$$

可得

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}r,\quad r<R \tag{14-29}$$

例 3

求匝密度为 n、通有电流 I 的载流长直圆形螺线管(solenoid)内的磁场分布。

解 如图 14-19 所示，当密绕螺线管的直径远小于其长度时，管内的磁场是均匀的，方向与管的轴线平行。在管的外侧，磁场十分微弱，可忽略不计。过管内场点 P 作一矩形闭合线圈 $abcd$，ab 线段在管内且平行于轴线，cd 线段在管外，两边线段 ad 和 bc 与轴线垂直。螺线管线圈匝密度为 n，则根据安培环路定理有

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B\cdot|ab|=\mu_0 n|ab|I$$

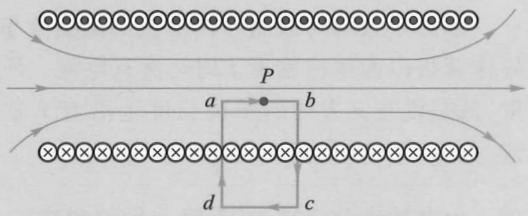


图 14-19 载流长直螺线管内的磁场

因此

$$B=\mu_0 nI \tag{14-30}$$

例 4

求载流密绕螺绕环(toroid)的磁场分布。螺绕环总共有 N 匝，线圈中电流为 I。

解　如图 14-20 所示，密绕螺绕环的磁场也集中于管内。由于对称性，管内的磁感线都是同心圆，因此我们取过场点 P、半径为 r 的圆形环路，则环路上磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的数值相等，其方向都沿环路的切线方向。螺绕环总共有 N 匝，线圈中电流为 I，则有

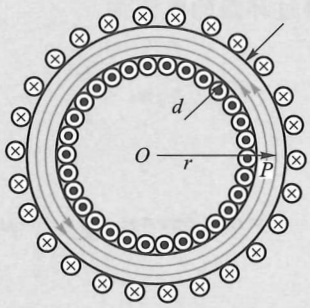


图 14-20　载流螺绕环的磁场

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B\cdot 2\pi r=\mu_0 NI$$

故

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \tag{14-31}$$

由此可见：在螺绕环的横截面上各点 $\boldsymbol{B}$ 的大小是不相等的，B 与 r 成反比，这与螺线管的情况不同。

当螺绕环的平均半径 R 远大于线圈直径 d，即 $R\gg d$ 时，管内所有各点的比值 $\frac{r}{R}\approx 1$，这时 $r\approx R$，因而(14-31)式可写成

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi R}=\mu_0 nI$$

式中 n 是螺绕环的线圈匝密度。此时，螺绕环管内各点的磁场可看成是均匀的。

如果环路不在螺绕环管内，而是在管外，则环路内包围电流的代数和为零，即

$$B\cdot 2\pi r=0$$

$$B=0$$

由此可见：在螺绕环管的外面，磁感应强度等于零，磁场被全部封在螺绕环内。

例 5

求无限大均匀载流导体薄板的磁场分布。设无限大导体薄板以面电流密度 $\boldsymbol{j}$ 均匀流有电流。所谓面电流密度，就是说在 x 方向的单位长度上沿着 y 方向流过的电流，如图 14-21 所示。

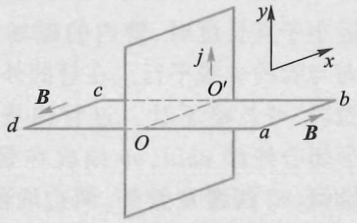


图 14-21　无限大载流导体薄板的磁场

解　由对称性分析可知，无限大均匀载流平面两侧距离相等处的 $\boldsymbol{B}$ 大小相等，方向相反，它们都平行于载流平面且与 $\boldsymbol{j}$ 垂直，如图 14-21 所示。

取矩形闭合环路 $abcd$，$|ab|=|cd|=l$，且平行于平面，由安培环路定理得

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B\cdot|ab|+B\cdot|cd|=2Bl=\mu_0 jl$$

故有

$$B=\frac{\mu_0}{2}j \tag{14-32}$$

可见，无限大载流导体薄板两侧的磁场均匀分布，且大小相等、方向相反。

14-9 洛伦兹力

NOTE

在磁场中运动的电荷将受到磁力的作用，磁力取决于运动电荷的电荷量 q、电荷的运动速度 $\boldsymbol{v}$ 和电荷在该时刻所在处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

根据 14-4 节中对运动电荷在磁场中所受磁力的讨论可知，一个以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的电荷 q 在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中所受的磁力可用矢量表示为

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{14-33}$$

必须指出，这个公式的正确性只能从实验中加以确定。

从(14-33)式可见，运动电荷所受的磁力的大小为

$$F_m = qvB\sin\theta \tag{14-34}$$

式中 θ 为运动速度 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角。

磁力的方向垂直于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所在的平面。如果运动电荷的电荷量 q 是正的，力的方向与矢量 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 的方向一致；如果运动电荷的电荷量 q 为负，则其受力的方向与 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 的方向相反。

既然磁力永远垂直于带电粒子的速度方向，那么磁力对带电粒子就不做功。因此，恒定磁场对带电粒子的作用力是不能够改变带电粒子的能量的。

如果同时存在电场和磁场，则作用于带电粒子的力等于

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{14-35}$$

上式是洛伦兹(H.A.Lorentz)从实验中得出的，因而这个力就称为洛伦兹力。

若电荷 q 以速度 $\boldsymbol{v}$ 平行于一根载有电流 I 的无限长直导线运动，则作用于电荷的磁力的大小为

$$F_m = qvB = qv\frac{\mu_0 I}{2\pi b} \tag{14-36}$$

式中 b 为从电荷到导线的距离。若电荷为正，且电流方向与运动电荷方向相同，则力指向导线；如果电流方向和电荷运动方向相反，则力的方向背离导线，如图 14-22 所示。

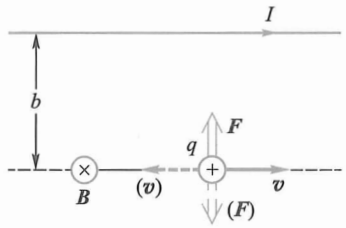


图 14-22 电荷沿平行于无限长直导线方向运动时的受力情况

现在我们研究两个带正电的点电荷 q_1 和 q_2 以远小于光速 c 的相同速度 $\boldsymbol{v}$ 分别沿两条平行直线的运动。如图 14-23 所示，在 $v \ll c$ 时，电场实际上与静止电荷的电场没有区别，因此作用于电荷的电力可以认为等于

$$F_{e1} = F_{e2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

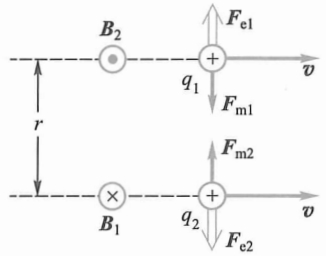


图 14-23 两个同号点电荷 q_1 和 q_2 沿平行直线运动

NOTE

根据(14-12)式和(14-33)式,得到作用于电荷上的磁力为

$$F_{m1}=F_{m2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2v^2}{r^2}$$

于是得到磁力和电力之比为

$$\frac{F_m}{F_e}=\varepsilon_0\mu_0v^2 \tag{14-37}$$

由于这一比值是量纲为 1 的,所以常量$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$应具有速度平方的量纲。令

$$c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

式中 c 是一个常量,其数值为

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

代入 ε_0、μ_0 值后得

$$c=3\times10^8\ \text{m/s}$$

可见,它实际上就是电磁波在真空中的传播速度,与实验中测定的光在真空中的速度相等。正是由于这一事实,使得光学和电磁学的研究有了重大进展,并导致光波就是电磁波这一认识的确立。

把 c 值代入(14-37)式可得

$$\frac{F_m}{F_e}=\frac{v^2}{c^2} \tag{14-38}$$

可见,磁力比电力小得多。这是由于运动电荷之间的磁相互作用是一种相对论效应(详情请参阅 14-11)。

14-10 安培定律

当载流直导线处在磁场中时,导线中每一传导电子都要受到洛伦兹力的作用,这种力的作用通过传导电子与晶格点阵之间的相互作用传递给导线,结果使载流导线在宏观上表现出受到磁场的作用力。

在载流直导线上任取一线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,截面积为 S,它在磁场中 $\boldsymbol{B}$ 中受到的磁力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$。设 n 是单位长度中传导电子的数目,故线元 $\mathrm{d}l$ 中所含传导电子的数目为 $nS\mathrm{d}l$。由于每一个传导电子所受的

洛伦兹力方向都相同，故电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的受力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=nS\mathrm{d}l e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{14-39}$$

由电流的定义可知，流过线元 $\mathrm{d}l$ 中的电流为 $I=nevS$，再考虑到负电荷的运动和正电荷的运动（即沿电流的方向）是等效的，因此有

$$\mathrm{d}l\boldsymbol{v}=v\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

于是得

$$nS\mathrm{d}l e\boldsymbol{v}=nevS\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

代入(14-39)式可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{14-40}$$

(14-40)式表示电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在磁场中受到的作用力，它是安培在实验基础上确立的，因而称为安培定律。通常人们把力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 称为安培力。

必须指出，以上我们是从磁力表达式(14-33)式出发推导出的安培定律，而事实上，磁力表达式是从实验确定的安培定律得出的。

用适当的方法对(14-40)式积分，可以求得任意载流导线上的磁力 $\boldsymbol{F}$。

NOTE

例 6

半径为 R、通有电流 I 的半圆形导线处于均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直纸面向里，求作用在导线上的安培力。

解　如图 14-24 所示。电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中受力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$，其大小为

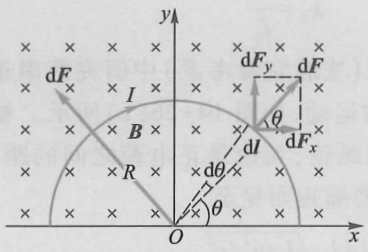


图 14-24　半圆形载流导线在磁场中的受力

$$\mathrm{d}F = I\mathrm{d}lB = IBR\mathrm{d}\theta$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 的方向沿着径矢向外。我们把各电流元受力的 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 分解为 $\mathrm{d}F_x$ 和 $\mathrm{d}F_y$ 两个分量，则由于电流分布的对称性，其中 x 方向的分量 $\mathrm{d}F_x$ 相互抵消，只剩下 y 方向的分量 $\mathrm{d}F_y=\mathrm{d}F\sin\theta$，故半圆形导线所受的合力为

$$F=F_y=\int \mathrm{d}F\sin\theta=\int_0^{\pi} IBR\sin\theta\mathrm{d}\theta=2IBR$$

其方向向上。

14-11 相对论磁学

NOTE

1. 运动电荷和电流之间的磁相互作用——磁力的推导

电学和磁学存在很密切的关系。根据狭义相对论和电荷不变性可以证明，电荷和电流之间的磁相互作用是库仑定律的结果。现在我们用一个以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 平行于无限长直载流导线 I 运动的电荷 $+q$ 为例来证明这一点。根据(14-36)式，作用于运动电荷上的磁力为

$$F=qv_0B=qv_0\frac{\mu_0 I}{2\pi b} \tag{14-41}$$

式中 b 为运动电荷 q 到载流导线的距离。力 $\boldsymbol{F}$ 的方向指向载流导线，如图 14-25 所示。

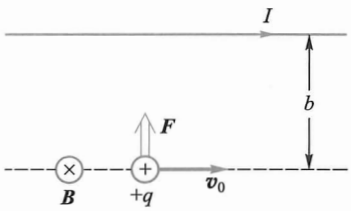


图 14-25 以速度 v_0 平行于无限长直载流导线 I 运动的电荷 $+q$ 所受的磁力

现在我们从库仑定律和狭义相对论出发，推导磁力的公式(14-41)式。我们知道，载流导线中只是传导电子在运动，正离子是静止不动的。为了使我们讨论的问题简化一些，我们对恒定载流直导线采取了更为对称的模型。我们先来研究分别由正负电荷组成但实际上重合在一条直线上的两串无限长点电荷，其中每一电荷的电荷量都是 e。由于电荷数目很多，并且彼此间的距离 l_0 很小，以至于可以不必考虑它们的不连续性，于是正负电荷的线密度数值都相等，即

$$\lambda_0=\frac{e}{l_0}$$

现在我们在 S 参考系(实验室参考系)中研究两串正负电荷都以速度 $\boldsymbol{u}$ 沿相反方向的运动，如图 14-26(a)所示。根据相对论中关于长度收缩的著名结论，无论是正电荷之间的距离，还是负电荷之间的距离，都将要缩短而变至

$$l=l_0\sqrt{1-u^2/c^2}$$

由于电荷的不变性，电荷的数值和静止时一样。结果，在 S 系中测量到的正负电荷线密度数值将发生变化，即为

$$|\lambda_+|=|\lambda_-|=\lambda=\frac{e}{l}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{14-42}$$

而以速度 $\boldsymbol{u}$ 沿相反方向运动的这两串正负电荷合起来，就相

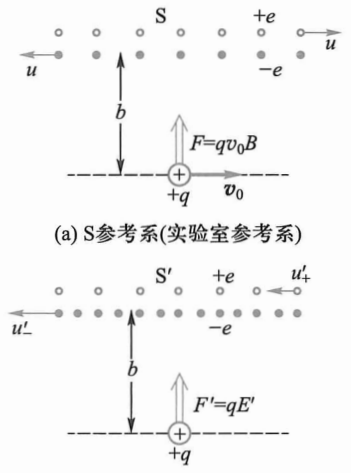


图 14-26 不同参考系中的电磁作用

当于一根无限长直电流，电流大小为

$$I=2u\lambda=\frac{2u\lambda_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{14-43}$$

由于两串正负电荷的线密度等量异号，其大小均等于 λ，因此其总电荷线密度 $\lambda_+ +\lambda_- =0$，所以在两串电荷的周围没有电场，但存在磁场，因此运动电荷 $+q$ 受到磁力的作用。把(14-43)式中的电流 I 代入(14-41)式，则磁力公式(14-41)式变为

$$F=qv_0\frac{\mu_0 u\lambda_0}{\pi b\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{14-44}$$

如果我们选取相对于电荷 $+q$ 静止的 S′参考系，在 S′系中的观察者看来，电荷 $+q$ 是静止的，而两串无限长正负电荷中的所有电荷都在运动。根据相对论，所有电荷沿运动方向的间距都要缩短，因为负电荷比正电荷运动得更快，因此负电荷串的间距比正电荷串的间距缩得更多，如图 14-26(b)所示。所以，S′系中测量到的负电荷串的电荷线密度 λ'_- 大于正电荷串的电荷线密度 λ'_+，因而无限长直电流中的总电荷线密度为负值而不为零[①]，即为

$$\lambda'=\lambda'_+ +\lambda'_- =-\frac{2\lambda_0 uv_0}{c^2\sqrt{1-v_0^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{14-45}$$

正负电荷串在 S′参考系中出现净余负电荷意味着这是一根带负电的直线，其电荷线密度为 λ'，它在空间将产生电场 $\boldsymbol{E}'$，于是对电荷 $+q$ 产生一个方向指向电荷串直线的吸引力 $\boldsymbol{F}'$。这个力不可能是磁力，因为电荷 $+q$ 不动。由上面分析可知，力 $\boldsymbol{F}'$ 显然是电力。由电力的定义，其大小为

$$F'=qE'=q\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 b}$$

将(14-45)式中的 λ' 的大小代入上式得

$$F'=q\frac{u\lambda_0 v_0}{\pi\varepsilon_0 bc^2\sqrt{1-v_0^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

因为 $c^2=\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$，代入上式后可得

$$F'=qv_0\frac{\mu_0 u\lambda_0}{\pi b\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} \tag{14-46}$$

现在我们已经从相对论得到了在 S′参考系中作用在电荷 $+q$ 上的力 F'。

① 详细推导可参见 E.M.珀塞尔所著的《伯克利物理学教程》第二卷的 215~219 页。

NOTE

由上述分析可见，力并不是一个不变量。在由一个惯性参考系过渡到另一个惯性参考系时，力要按相当复杂的规律进行变换。在特殊的情况下，例如，在我们所考察的问题中，可以证明，力的变换公式为

$$F = F'\sqrt{1-v_0^2/c^2} \tag{14-47}$$

式中 F 是在 S 参考系（实验室参考系）中测量到的作用在电荷 $+q$ 上的磁力，$\boldsymbol{F}'$ 是电荷静止参考系中电荷受到的力。如果把（14-47）式与（14-46）式、（14-44）式进行比较，可知，它就是以速度 v_0 沿平行于无限长直电流 I 运动的电荷 $+q$ 所受到的磁力，即

$$F = qv_0\frac{\mu_0 I}{2\pi b} \tag{14-48}$$

综上所述，我们从库仑定律和相对论的结论出发，并利用电荷不变性，推导出了运动电荷 $+q$ 所受磁力的公式。

必须指出的是，力 F 和 F' 是同一个力分别在 S 系和 S′系中确定的值。在 S 系中，力表现为纯磁力，在 S′系中，力表现为电力和磁力之和。因此磁力和电力在不同参考系中可以互相转化。

2. $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的相对论变换

上面得到的结果表明：电场和磁场不是相互独立存在的，而是不可分割地联系在一起并组成一个统一的电磁场。在某些特定的参考系中，电磁场可以表现为纯电场或纯磁场，但在其他参考系中，同一个场却是电场和磁场的综合。

在不同的惯性系中，同一电荷组合的电场和磁场将是不同的。当 S′惯性系相对于 S 惯性系沿 x 轴方向以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 运动时，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的变换公式为

$$\begin{cases} E_x' = E_x, & E_y' = \dfrac{E_y - v_0 B_z}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}, & E_z' = \dfrac{E_z + v_0 B_y}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} \\ B_x' = B_x, & B_y' = \dfrac{B_y + \dfrac{1}{c^2}v_0 E_z}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}, & B_z' = \dfrac{B_z - \dfrac{1}{c^2}v_0 E_y}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} \end{cases} \tag{14-49}$$

式中 E_x、E_y、E_z、B_x、B_y、B_z 是 S 系中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的分量，而带撇的类似符号是 S′系中 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{B}'$ 的分量。电磁场的这六个分量，在与之作相对运动的参考系看来，已混在一起了。

关于（14-49）式中场的变换公式的推导已超出大学物理学

的范围，故我们不再一一加以叙述。

NOTE

(14-49)式表示的电磁场，用数学语言来说，已不是一个矢量，而是一个张量。在这里我们不想再扩大这种数学语言，还是用矢量来表示电场和磁场。如果将矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 以及 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{B}'$ 分解为平行于运动电荷速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和垂直于 $\boldsymbol{v}_0$ 的两个分量；而 $\boldsymbol{v}_0$ 的方向就是(14-49)式中正 x 轴(或正 x'轴)的方向，垂直于 $\boldsymbol{v}_0$ 的方向就是 y 轴的方向或 z 轴的方向。这时矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可分别表示为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{//}+\boldsymbol{E}_{\perp},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{//}+\boldsymbol{B}_{\perp}$$

于是可将(14-49)式改写成矢量形式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'_{//}&=\boldsymbol{E}_{//},\quad \boldsymbol{E}'_{\perp}=\frac{\boldsymbol{E}_{\perp}+\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}_{\perp}}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\\ \boldsymbol{B}'_{//}&=\boldsymbol{B}_{//},\quad \boldsymbol{B}'_{\perp}=\frac{\boldsymbol{B}_{\perp}-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{E}_{\perp})}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\end{aligned}\tag{14-50}$$

在 $v_0\ll c$ 的情况下，(14-50)式可以简化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'_{//}&=\boldsymbol{E}_{//},\quad \boldsymbol{E}'_{\perp}=\boldsymbol{E}_{\perp}+(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}_{\perp})\\ \boldsymbol{B}'_{//}&=\boldsymbol{B}_{//},\quad \boldsymbol{B}'_{\perp}=\boldsymbol{B}_{\perp}-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{E}_{\perp})\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'&=\boldsymbol{E}'_{//}+\boldsymbol{E}'_{\perp}=\boldsymbol{E}_{//}+\boldsymbol{E}_{\perp}+(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}_{\perp})=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}_{\perp})\\ \boldsymbol{B}'&=\boldsymbol{B}'_{//}+\boldsymbol{B}'_{\perp}=\boldsymbol{B}_{//}+\boldsymbol{B}_{\perp}-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{E}_{\perp})=\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{E}_{\perp})\end{aligned}\tag{14-51}$$

然而，矢量 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{B}_{//}$ 为同一方向，它们的矢积 $\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}_{//}=\boldsymbol{0}$，所以有

$$(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}_{//})+(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}_{\perp})=(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}_{\perp})$$

类似地有

$$(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{E}_{//})+(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{E}_{\perp})=(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{E}_{\perp})$$

考虑到上述关系式，(14-51)式可改写成

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B})\\ \boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{E})\end{cases}\tag{14-52}$$

由此可见，在S′惯性系相对于S惯性系的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 远小于真空中的光速 c($v_0\ll c$)的情况下，电场和磁场的变换关系就是按(14-52)式进行的。

例 7

如图 14-27 所示，一根均匀带电无限长直线静止时，电荷线密度为 λ_0。若带电直线以速度 v_0（$v_0 \ll c$）向左运动，则在实验室中测得与直线距离为 r 处的 P 点的电场和磁场各为多少？

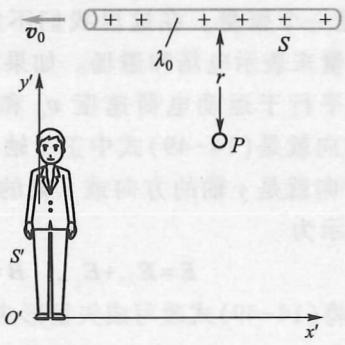


图 14-27 以速度 v_0（$v_0 \ll c$）向左运动的带电直线

解 设相对于带电直线静止的参考系为 S 系，则在 S 系中测得 P 点的电场强度为

$$E=\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

方向垂直带电直线向下，而 P 点的磁感应强度为

$$B=0$$

若设实验室参考系为 S′系，则 S′系相对于 S 系（带电直线）以速度 v_0 沿正 x'方向运动。在 $v_0 \ll c$ 的情况下，根据（14-52）式，得到在实验室参考系中测得的 E' 和 B' 分别为

$$E'=E$$

$$B'=-\frac{1}{c^2}v_0 E=-\frac{\varepsilon_0\mu_0 v_0\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{\mu_0 v_0\lambda_0}{2\pi r}$$

负号表示 $\boldsymbol{B}'$的方向与 $\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{E}$ 的方向相反，即垂直纸面向上。

例 8

如图 14-28 表示一根不带电荷但载有电流 I 的直线和一手拿电荷 $+q$、以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 向右运动的观察者。试问在 $v_0 \ll c$ 的情况下，观察者在电荷 $+q$ 处测到的电场和磁场各为多少？

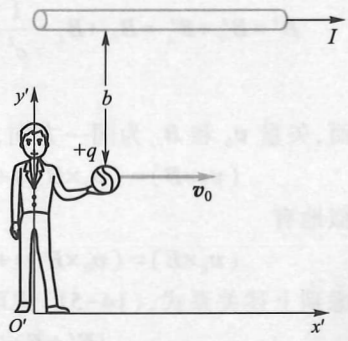


图 14-28 以速度 v_0 向右运动的观察者测量到的 E'和 B'

解 设以相对于直线静止的实验室参考系为 S 系，则在 S 系中，直线周围的电场强度为 $E=0$。若设 $+q$ 到直线的垂直距离为 b，则在 $+q$ 处的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

设以手拿电荷 $+q$、以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 向右运动的观察者为 S′系，则在 S′系中看来，由于相对论效应，直线上的负电荷线密度大于正电荷线密度，因此他将测量到直线上有净余负电荷。在 $v_0 \ll c$ 的情况下，根据（14-52）式，他在电荷 $+q$ 所在处测得的电场强度为

$$E'=E+v_0 B=\frac{\mu_0 v_0 I}{2\pi b}$$

其方向垂直直线向上。

他在电荷 $+q$ 所在处测得的磁感应强度为

$$B'=B-\frac{1}{c^2}v_0E=\frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

其方向垂直图面向里。

14-12 均匀磁场对载流线圈的作用

NOTE

1. 载流线圈在均匀磁场中所受合力为零

这里我们只讨论任意形状的载流线圈在均匀磁场中所受的磁场作用力。由安培定律，作用于载流线圈任意电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 上的力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

载流线圈所受的合力等于

$$\boldsymbol{F}=\oint I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

将常量 I 和 $\boldsymbol{B}$ 提到积分号之外，得到

$$\boldsymbol{F}=I\left[\left(\oint \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)\times\boldsymbol{B}\right] \tag{14-53}$$

因为式中积分 $\oint \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{0}$ 等于零，所以 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$。因此，载流线圈在均匀磁场中所受的合力等于零。不论线圈形状如何（包括非平面的），这个结论都是正确的。均匀磁场是载流线圈所受合力为零的关键。

2. 载流线圈在均匀磁场中所受的磁力矩

我们仅限于讨论任意形状的平面载流线圈。为了叙述方便，我们规定线圈的正法线方向 $\boldsymbol{e}_n$ 与线圈中电流 I 的方向满足

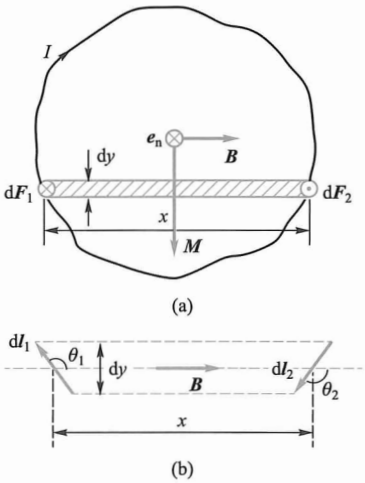


图 14-29 任意形状平面线圈在磁场中所受的磁力矩

NOTE

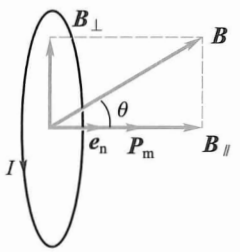


图 14-30 线圈正法线 e_n 与磁场 B 成任意角度

右手螺旋定则。设线圈正法线 $\boldsymbol{e}_n$ 垂直于磁场 $\boldsymbol{B}$，如图 14-29(a)所示。我们沿磁场 $\boldsymbol{B}$ 方向把线圈分割成宽度为 dy 的许多小窄带，图 14-29(b)是其中一条窄带的放大图。磁场对窄带两端的电流元 $Id\boldsymbol{l}_1$ 和 $Id\boldsymbol{l}_2$ 作用力的大小分别为

$$dF_1 = IBdl_1\sin\theta_1 = IBdy$$

$$dF_2 = IBdl_2\sin\theta_2 = IBdy$$

上述结果表明：作用在 dl_1 和 dl_2 上的两力大小相等，方向相反，其合力为零，但不作用在同一直线上，故产生一力偶。由于力偶的力矩是对某一点而言的，并且与该点的选择无关，因此其力矩可写成

$$dM = IBxdy = IBdS$$

式中 x 为 dl_1 和 dl_2 之间的距离，dS 为窄带的面积。由于力矩 $d\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{B}$，从而可将上式表示为矢量形式：

$$d\boldsymbol{M} = Id\boldsymbol{S}(\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{B})$$

将上式对所有窄带求和，得到作用在整个线圈上的总力矩为

$$\boldsymbol{M} = \int Id\boldsymbol{S}(\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{B})$$

考虑到磁场是均匀的，所以对任意条窄带来说，$\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{B}$ 均相同，故可以移到积分号之外，即

$$\boldsymbol{M} = I(\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{B})\int dS = IS(\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{B}) \qquad (14-54)$$

式中，S 为载流线圈面积。

$IS\,\boldsymbol{e}_n$ 是载流线圈的磁矩(magnetic dipole moment)，即

$$\boldsymbol{p}_m = IS\boldsymbol{e}_n$$

于是，可以把(14-54)式写成如下形式：

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}_m\times\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{p}_m\perp\boldsymbol{B}\text{ 时} \qquad (14-55)$$

可以证明，如果载流线圈的正法线 $\boldsymbol{e}_n$ 与磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向一致，则整个线圈所受合力矩为零。作用于线圈上各电流元 $Id\boldsymbol{l}$ 的磁力既不会使线圈转动，也不会将它从原位置移开，而只能使线圈在其平面内受到拉伸。若 $\boldsymbol{e}_n$ 与 $\boldsymbol{B}$ 方向相反，则磁力使线圈收缩。

在线圈的正法线 $\boldsymbol{e}_n$ 与磁场 $\boldsymbol{B}$ 成任意角度的情况中，可将 $\boldsymbol{B}$ 分解为垂直于 $\boldsymbol{e}_n$ 的分量 $\boldsymbol{B}_\perp$ 和平行于 $\boldsymbol{e}_n$ 的分量 $\boldsymbol{B}_{//}$，如图 14-30 所示。分量 $\boldsymbol{B}_{//}$ 只能产生使线圈拉伸或压缩的力，而其值等于 $B_\perp = B\sin\theta$ 的分量 $\boldsymbol{B}_\perp$ 使线圈产生力矩，即

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}_m\times\boldsymbol{B}_\perp$$

由图 14-30 可见，

$$\boldsymbol{p}_m\times\boldsymbol{B}_\perp = \boldsymbol{p}_m\times\boldsymbol{B}$$

因而在最普遍的情况下，均匀磁场中作用于任意形状的平面载流

线圈的磁力矩由下式决定：

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\times\boldsymbol{B} \tag{14-56}$$

综上所述，任意形状的载流平面线圈在均匀外磁场中所受的合力为零，但受到一个磁力矩的作用，这个磁力矩总是试图把线圈的磁矩转到与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 一致的方向。当 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角 $\theta=\pi/2$ 时，磁力矩 $\boldsymbol{M}$ 最大；当 $\theta=0$ 时，磁力矩为零。

例 9

一电流计的线圈所包围的面积是 $6\times10^{-3}\ \mathrm{m}^2$。线圈共有 200 匝，线圈中的导线通有电流 $I=1\times10^{-5}$ A。将其放在 $B=0.1$ T 的均匀磁场中，其所受的最大磁力矩是多少？

解　线圈在磁场中所受磁力矩为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\times\boldsymbol{B}$，$M$ 最大时

$$\begin{aligned}M_{\max}&=p_{\mathrm{m}}B=NISB\\&=200\times10^{-5}\times6\times10^{-3}\times0.1\ \mathrm{N\cdot m}\\&=1.2\times10^{-6}\ \mathrm{N\cdot m}\end{aligned}$$

14-13 等离子体的磁约束

NOTE

众所周知，太阳巨大的辐射能主要来源于核聚变，因此解决能源问题的终极目标被聚焦在核聚变上。为了实现可控的核聚变，需要把核燃料加热到 $10^7\sim10^9$ K 以上的点火温度，然而在如此高的热核反应温度下，物质早已进入一种新的状态，即等离子态（也称物质的第四态）。

等离子体主要由电子和正离子所组成，它们的电荷体密度大体相等，因此整体来说等离子体呈电中性。然而等离子体中的粒子都在作高速运动，会向各处运动而散开。为了实现热核反应的人工控制，必须将等离子体限制在某个区域，不让它们四处飞散，而且约束足够长的时间，以保持足够高的密度。

热核聚变研究中主要用磁约束或惯性约束的方法约束等离子体，其中磁约束就是利用磁场将等离子体运动范围限定在一定区域的方法。

若一个电荷量为 q、质量为 m 的带电粒子在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，当运动方向与磁场方向平行时，粒子所受的洛伦兹力为零，粒子沿 $\boldsymbol{B}$ 方向作匀速直线运动。当运动方向与磁场方向垂

直时，粒子将以 $\boldsymbol{B}$ 方向为轴而作匀速圆周运动。更一般的情况下，粒子的运动速度可分解为平行于 $\boldsymbol{B}$ 的分量 $\boldsymbol{v}_{//}$ 和垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的分量 $\boldsymbol{v}_{\perp}$，粒子的运动可表现为两种运动的叠加，即以 $\boldsymbol{B}$ 的方向为轴的等间距螺旋线运动。其中圆周运动的周期为 $T=\dfrac{2\pi m}{Bq}$，圆周的半径为 $R=\dfrac{mv_{\perp}}{qB}$。

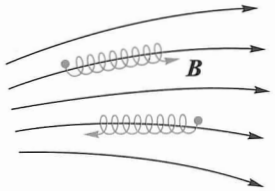


图 14-31 带电粒子的螺旋线运动

很明显，粒子圆周运动的半径 R 与磁感应强度的大小 B 成反比，即磁场越强，R 就越小，粒子离轴线越近。这表明，在很强的磁场中，带电粒子将被约束在某条磁感线附近很小的区域内运动。因此带电粒子只能在某条磁感线附近并沿着磁感线作螺旋线的纵向运动，如图 14-31 所示，其轨道的轴线称为引导中心。除非粒子之间发生碰撞，否则其引导中心不可能从一条磁感线跳到另一条磁感线上。

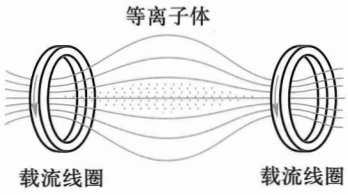


图 14-32 磁镜

然而，沿磁场方向运动的带电粒子并没有受到洛伦兹力，故粒子还可能从磁场的两端逃逸。为了实现热核反应的人工控制，不仅要求横向约束等离子体的引导中心，还需要对它们进行纵向约束。最简单的纵向约束方法就是使用“磁镜”，如图 14-32 所示。

一个作圆周运动的带电粒子，可以等效为一个圆电流，电流为

$$I=\frac{q}{T}=\frac{Bq^2}{2\pi m}$$

该粒子的等效磁矩为

$$p_m=IS=\frac{Bq^2}{2\pi m}\pi R^2=\frac{mv_{\perp}^2/2}{B}$$

可以证明，非均匀磁场中磁感应强度的梯度不太大时，带电粒子的磁矩 p_m 是个常量。因此当 $\boldsymbol{B}$ 的大小增加时，$\dfrac{1}{2}mv_{\perp}^2$ 也相应增加。由于洛伦兹力不做功，带电粒子的总动能 $\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}mv_{\perp}^2+\dfrac{1}{2}mv_{//}^2$ 也保持不变，显然 $\dfrac{1}{2}mv_{//}^2$ 将减小。如果磁场足够大，$\dfrac{1}{2}mv_{//}^2$ 可以减小到零，这时带电粒子在引导中心方向上的纵向运动受到完全的抑制，接着带电粒子向相反的方向运动，就像光线碰到反射镜一样反射。

利用同方向电流的两个圆形载流线圈，可以产生两端较强而中央较弱的磁场分布。带电粒子在该磁场中运动时，相当于在磁场区域的两端给它们各放置一面“镜子”。速度纵向分量 $v_{//}$ 不太

大的带电粒子只能在该区域两端的磁镜之间来回运动，无法逃脱磁场的约束。

然而，用磁镜约束带电粒子运动的方法有一个缺陷，即总有一些速度纵向分量较大的粒子会越过区域两端的磁镜而逃脱磁场的约束。避免该缺陷的改进方法是采用环形结构的磁场，如图14-33所示。

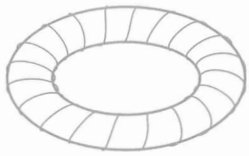


图14-33　环形磁场结构

环形磁场结构这种装置仍然存在缺陷，像螺绕环一样，在它的横截面上磁场的分布并不是均匀的，造成的结果是容易将等离子体推向外壁而失去约束。解决的方法是加上轴向的磁场而实现等离子体的箍缩，从而实现较好的约束效果。这种装置称为托克马克装置，是目前最常用的受控热核反应的约束装置，如图14-34所示。

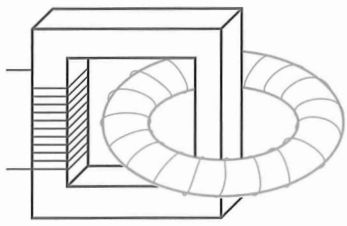


图14-34　托卡马克装置

本章摘要

NOTE

1. 电流：$I=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\int_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

2. 电动势：$\mathscr{E}_{AB}=\int_{A(内)}^{B}\boldsymbol{E}_K\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$　或　$\mathscr{E}=\oint_L \boldsymbol{E}_K\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

其中 E_K 为非静电性电场强度。

3. 平行载流导线中的每一根在单位长度上所受到的磁力为

$$F_m=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}$$

式中，b 为两导线间的距离；$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{N/A^2}$，是磁学常量。

4. 运动电荷的磁场：$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e}_r)}{r^2}$，　$v\ll c, q>0$

运动电荷的电场大小：$E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\dfrac{1-v^2/c^2}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}$

当 $v\ll c$ 时，有 $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$。

5. 毕奥-萨伐尔定律

电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 产生的磁场：$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2}$

长直载流导线的磁场：$B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$，式中 r_0 为场点到长直导线的距离；θ_1 和 θ_2 分别是导线两端电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与径矢

NOTE

$\boldsymbol{r}$ 间的夹角。

无限长载流导线的磁场：$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$

圆电流圆心处的磁场：$B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

6. 磁场的高斯定理：$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$

7. 安培环路定理：$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 \sum_{(L内)} I$

载流长圆形螺线管的磁场：$B=\mu_0 nI$，式中 n 为单位长度的线圈匝数。

载流密绕螺绕环磁场：$B=\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$，式中 N 为螺绕环线圈总匝数。

无限大均匀载流导体薄板的磁场：$B=\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{j}$。两侧磁场均匀分布，且大小相等，方向相反。

8. 洛伦兹力

运动电荷在同时存在电场和磁场时的受力：

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B},\quad q>0$$

电荷 $+q$ 以速度 $\boldsymbol{v}$ 平行于无限长载流导线运动时所受的磁力为 $F=qv\dfrac{\mu_0 I}{2\pi b}$。式中 b 为电荷 $+q$ 到导线的距离。

9. 安培定律

电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的受力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$。

一段载流导线在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的受力为 $\boldsymbol{F}=\int_L I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$。

10. 相对论磁学

根据相对论的结论和电荷不变性，电荷和电流之间的磁力是库仑定律的必然结果。在两个不同的惯性系中，在特殊的情况下，可以证明，力的变换公式为

$$F=F'\sqrt{1-v_0^2/c^2}$$

式中 F 是在 S 系中测到的力，F' 为在 S′系中测到的力，v_0 为 S′系相对于 S 系的速度，即运动电荷 $+q$ 的速度。

利用狭义相对论可以证明，电场和磁场不可分割地联系在一起并组成统一的电磁场。

11. 均匀磁场对载流线圈的作用

载流线圈所受合力等于零。

载流线圈所受磁力矩为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\times\boldsymbol{B}$。

思考题

14-1 磁感线与电场线在表征场的性质方面有哪些相同之处？有哪些不同之处？

14-2 为什么我们不把运动电荷所受磁力的方向定义为磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的指向？

14-3 两个相距不远的点电荷 q_1 和 q_2，都相对于参考系 S 以相同的速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，它们之间除电力以外，还有磁力作用。若将其中一个电荷选为参考系 S′，则在参考系 S′中两电荷都是静止电荷，它们之间只剩下电力，磁力“消失”了。这是为什么？这种现象说明了什么物理本质？

14-4 一所带电荷量为 q 的粒子在均匀磁场中运动。试判断下列各说法是否正确，并说明理由。

（1）只要速度大小相同，所受的洛伦兹力就一定相同；

（2）速度相同，电荷量分别为 $+q$ 和 $-q$ 的两个粒子，它们所受的洛伦兹力大小相等、方向相反；

（3）质量为 m，电荷量为 q 的带电粒子，受到洛伦兹力作用，其动能和动量都保持不变；

（4）洛伦兹力总与速度方向垂直，所以带电粒子运动的轨迹必定是圆。

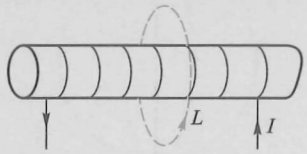
14-5 在某些电子仪器中，常把那些载有大小相等但方向相反的电流的导线扭在一起，其用意何在？

14-6 用安培环路定理能否求出下列两种情况下的磁感应强度？说明理由。

（1）有限长载流直导线产生的磁场；

（2）圆电流产生的磁场。

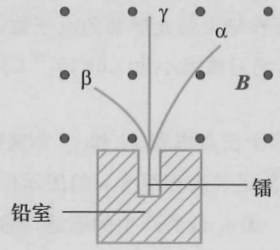
14-7 载流长直螺线管内部 $B_{内}=\mu_0 nI$，外部 $B_{外}=0$，因此在螺线管外面作环绕一周的环路 L，其环流 $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$。但从安培环路定理来看，环路 L 中有电流 I 通过，故其环流应为 $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I$，这是为什么？



思考题 14-7 图

14-8 有人说：“在没有电流的空间区域里，如果磁感线是一些同方向的平行直线，则磁场一定均匀。”该说法是否正确？试用安培环路定理来证明。

14-9 如图所示，放射性元素镭放出的射线进入磁场后分成三束，向左偏转的叫 β 射线，向右偏转的叫 α 射线，不偏转的叫 γ 射线。试分析这三种射线中的粒子是否带电。它们分别带正电还是带负电？

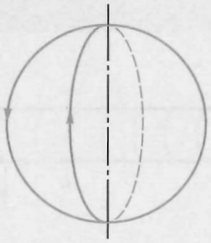


思考题 14-9 图

14-10 试比较毕奥-萨伐尔定律 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2}$ 与点电荷的电场强度公式 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ 的相似和差别之处。

14-11 如果想让一个质子在地球磁场中一直沿赤道运动，我们应向东发射它还是向西发射它？

14-12 如图所示，有两个竖直放置的载流圆环，它们的直径几乎相等，可绕同一竖直轴转动。当两圆环所在的平面相互垂直时，在两圆环中通以大小相同的电流，试问这两个圆环将如何运动？



思考题 14-12 图

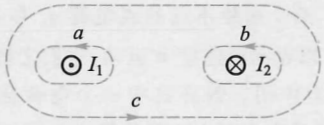
14-13 安培定律 $d\boldsymbol{F}=Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ 的三个矢量中，哪两个矢量始终正交？哪两个矢量之间可以有任意的角度？

14-14 两根载有等量但流向相反电流的无限长直导线平行放置，$I_1=I_2=I$，如图所示，构造三个闭合回路 a、b、c。

（1）试分别写出对各回路的安培环路定理表达式；

（2）试问在每个回路中 $\boldsymbol{B}$ 的大小是否相等？

（3）试问在回路 c 中，各点的 B 是否为零？



思考题 14-14 图

习题

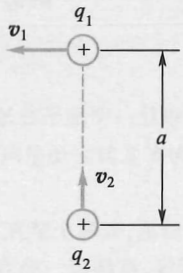
14-1 已知电视显像管中一电子束的电流为 1.6 μA，试求每秒撞击荧光屏幕的电子数。（每个电子所带的电荷量绝对值大小为 1.6×10^{-19} C）

14-2 两个正点电荷 q_1 和 q_2 分别以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 运动，当它们运动到相距为 a 的图示位置时：

（1）求 q_1 在 q_2 处所产生的磁感应强度和作用在 q_2 上的力；

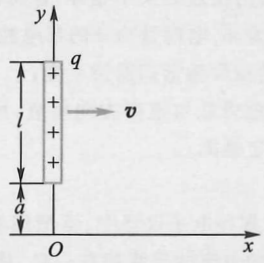
（2）求 q_2 在 q_1 处所产生的磁感应强度和作用在 q_1 上的力；

（3）它们之间的相互作用力满足牛顿第三定律吗？为什么？



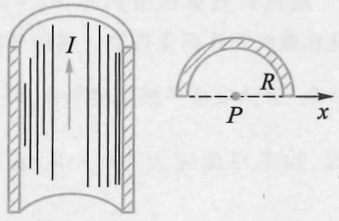
习题 14-2 图

14-3 有一均匀带电细棒以速度 $v=1$ m/s 沿图中 x 轴正方向运动，棒长 $l=0.1$ m，所带电荷量 $q=10^{-10}$ C。试求棒运动到图示位置时坐标原点 O 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。（图中 $a=0.1$ m）



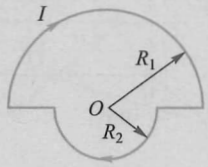
习题 14-3 图

14-4 在半径 $R=0.01$ m 的无限长半圆筒形金属薄壁上，自下而上地通过电流 $I=5.0$ A。设电流均匀地分布在薄壁上，如图所示，试求轴线上任意一点 P 处的磁感应强度的大小和方向。

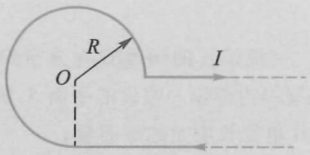


习题 14-4 图

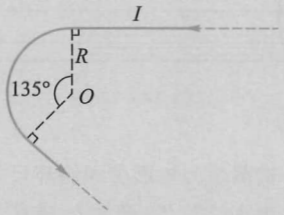
14-5 若通有电流 I 的导线弯曲成如图所示的形状(直线带虚线的部分伸长至无限远),试分别求出 O 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。



(a)



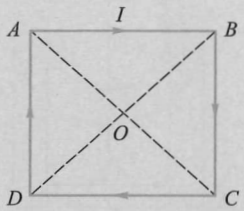
(b)



(c)

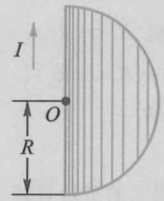
习题 14-5 图

14-6 如图所示,正方形线圈 $ABCD$ 的边长为 0.1 m,载有电流 0.5 A,试求正方形中心 O 处磁感应强度的大小。



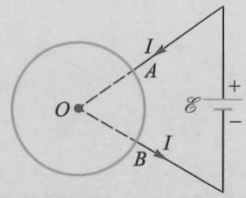
习题 14-6 图

14-7 在半径为 R 的木球上密绕着细导线,相邻的线圈彼此平行地靠着,以单层排列并盖住半个球面,共有 N 匝,如图所示,当导线中通有电流 I 时,求球心 O 处的磁感应强度。



习题 14-7 图

14-8 如图所示,两根直导线沿半径方向引到导线环上的 A、B 两点,并在很远处与电源相连。已知导体圆环的粗细和密度都是均匀的,求环中心 O 点的磁感应强度。



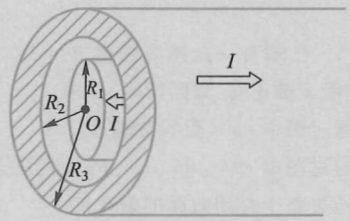
习题 14-8 图

14-9 某地区的一条高压输电线在地面上空约 5 m 处,通过的电流大小为 1.8×10^{3} A。

(1) 试求该电流在地面上所产生的磁感应强度大小;

(2) 在该地区,地磁场大小为 6.0×10^{-5} T,试比较输电线产生的磁场和地磁场的大小。

14-10 由同轴实心圆柱形导体与圆筒形导体构成一长的同轴电缆,其尺寸如图所示。使电缆中的电流 I 从导体圆柱输出,从导体圆筒流回。设电流都是均匀分布在导体的横截面上的,求下列各处的磁感应强度:



习题 14-10 图

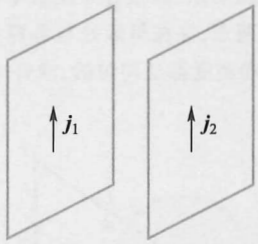
（1）导体圆柱内（$r<R_1$）；

（2）两导体之间（$R_1<r<R_2$）；

（3）导体圆筒内（$R_2<r<R_3$）；

（4）电缆外（$r>R_3$）。

14-11 两无限大的平行导体平面分别载有均匀分布的电流，面电流密度分别为 j_1 和 j_2，且 $j_1>j_2$，如图所示。试求两平面间和两平面外的磁感应强度。

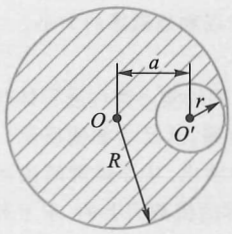


习题 14-11 图

14-12 在半径为 R 的长直圆柱导体内部，与轴线平行地挖去一块半径为 r（$r<R/2$）的长直圆柱体，两圆柱体轴线距离为 a，其横截面如图所示。设该导体通有均匀分布的电流 I，试求：

（1）圆柱导体轴线上的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$ 的大小；

（2）圆柱体空心轴线上的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0'$ 的大小。



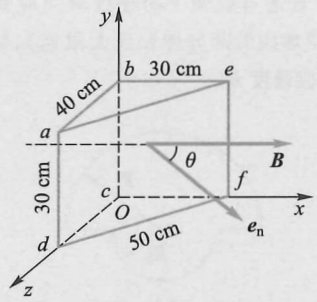
习题 14-12 图

14-13 已知有一磁感应强度 $B=2.0$ T 的均匀磁场，方向沿 x 轴正向，如图所示，试求：

（1）通过图中 $abcd$ 面的磁通量；

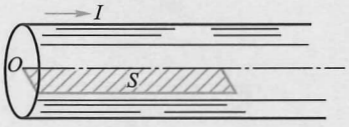
（2）通过图中 $efcb$、$adfe$、abe、dcf 面的磁通量；

（3）通过整个封闭曲面的磁通量。



习题 14-13 图

14-14 一根很长的铜线载有分布均匀的电流，$I=10$ A。在铜线内部作一假设的平面 S，如图所示，试求通过平面 S 单位长度上的磁通量。

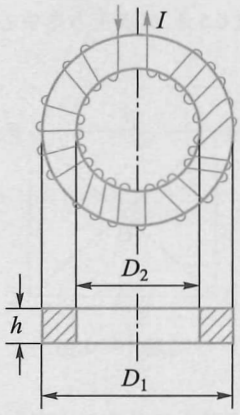


习题 14-14 图

14-15 横截面为矩形的螺绕环尺寸如图所示，外直径为 D_1，内直径为 D_2，高为 h，绕有 N 匝线圈，并通有电流 I，试求：

（1）环内磁感应强度的分布；

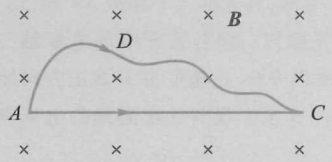
（2）通过螺绕环截面的磁通量。



习题 14-15 图

14-16 如图所示，ADC 为弯成任意形状的导线，导线置于与均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直的平面内。试证明：通过相

同恒定电流 I 的直导线 AC 与导线 ADC 所受的磁力相等。



习题 14-16 图

14-17 目前正在研究的一种电磁导轨炮(理论上子弹的出口速度可达到 10 km/s)的原理如图所示。子弹置于两条平行导轨之间,通以电流后子弹会被磁力加速而以高速从出口射出。以 I 表示电流,r 表示导轨(视为圆柱)半径,a 表示两轨面之间的距离。将导轨近似地按无限长处理,证明子弹受的磁力可近似地表示为

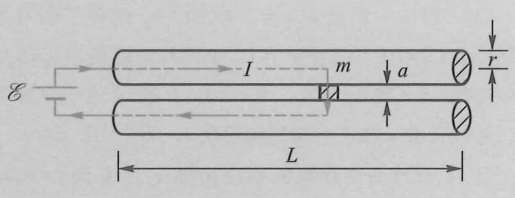
$$F=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{a+r}{r}$$

设导轨长度 $L=5.0$ m,$a=1.2$ cm,$r=6.7$ cm,子弹质量为 $m=317$ g,发射速度为 4.2 km·s^{-1}。

(1) 设子弹从导轨的末端起动,求该子弹在导轨内的平均加速度是重力加速度的几倍。

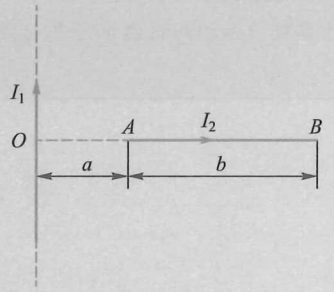
(2) 通过导轨的电流应多大?

(3) 若能量的转化效率为 40%,则该子弹发射需要多大功率的电源(单位:千瓦)?



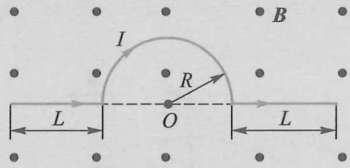
习题 14-17 图

14-18 如图所示,一长直导线通有电流 I_1,旁边放有一长为 b、带有电流 I_2 的导线 AB,其近端与长直导线距离为 a,求导线 AB 所受的磁力和对 O 点的力矩。



习题 14-18 图

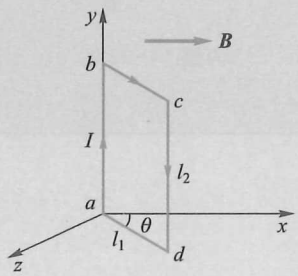
14-19 载有电流 I 的一根直导线中部被弯成半径为 R 的半圆形导线,如图所示。现将其置于垂直于平面向外的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中,求该导线所受的磁力。



习题 14-19 图

14-20 目前,有科学家在研究用超导材料做成的导线建造巨大的电磁铁以储存用电峰值期间所需要的能量。在一种设计方案中,以半径 100 m 的圆形线圈来承载 150 000 A 的电流,但这样大的电流在传输过程中会产生平均磁感应强度为 5 T 的磁场,从而使线圈受到磁力的作用,为了克服这种磁力,常将线圈放在凿进岩层的山洞里以获得对结构的支持。假如磁场方向与圆形线圈的平面垂直,试问线圈承受的张力为多大?(线圈的形变忽略不计)

14-21 如图所示,矩形线圈共有 20 匝,其边长分别为 $l_1=0.050$ m 和 $l_2=0.10$ m,线圈平面与 xy 平面成 $\theta=30°$ 的角,整个线圈可绕 y 轴旋转。今将线圈通上 0.1 A 的电流,并放在磁感应强度为 0.50 T 的均匀磁场中,磁场方向沿 x 轴正方向,试求作用在该线圈上的力矩。



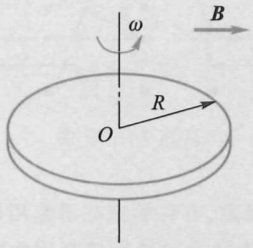
习题 14-21 图

14-22　如图所示，一半径为 R 的塑料圆盘以角速度 ω 绕通过其中心且与盘面垂直的轴转动。

（1）当有电荷量为 $+q$ 的电荷均匀分布于圆盘表面时，求圆盘中心点 O 的磁感应强度；

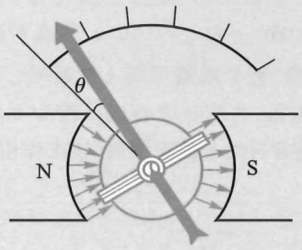
（2）求此时圆盘的磁矩；

（3）若将上述圆盘置于与圆盘表面平行的均匀外磁场 $\boldsymbol{B}$ 内，试证明：磁场 $\boldsymbol{B}$ 作用于圆盘的力矩大小为 $M=\dfrac{q\omega R^2 B}{4}$。



习题 14-22 图

14-23　如图所示，磁表式电流计线圈共有 250 匝，线圈长为 0.02 m，宽为 0.01 m，线圈所在处磁感应强度为 $B=0.2$ T。当线圈偏转 θ 角时，游丝（即弹簧）产生的扭力矩 $M=C\theta$。设扭转系数 $C=3.3\times10^{-8}\ \mathrm{N\cdot m\cdot deg^{-1}}$，当线圈中通以电流后，线圈偏转 30°。问流过的电流多大？



习题 14-23 图

14-24　在参考系 S 中坐标原点处的电场强度大小为 3×10^6 V/m，其方向与 x 轴成 30°角，与 y 轴成 60°角，在 xOy 平面内。参考系 S′中的坐标轴与 S 系中的轴平行，S′系以 $0.6c$ 的速度沿 x 轴正方向相对于 S 系运动，试求在 S′系中观测者观测到的电场和磁场的大小和方向。

14-25　一电容器由两平行的长方形板组成，两板之间的距离为 2.0×10^{-2} m；板的东西方向长度为 0.2 m，南北方向长度为 0.1 m。若电容器接到 300 V 的电源上充电后，断开电源，此时极板带有多少电荷？两板间的电场强度多大？在实验室中电容器是静止的，在相对于实验室以速率 $0.6c$ 向东运动的参考系中测量时，极板上带有多少电荷？板间的电场强度多大？若在向上以 $0.6c$ 速率运动的参考系测量，结果如何？

14-26　一架喷气式飞机在地球磁场的垂直分量为 6×10^{-5} T（方向指向地面）的地方以 $v_0=278$ m/s 的速度朝正北方向飞行。求：

（1）飞行员测到的飞机外的电场；

（2）飞机机翼上是否带电。

14-27　一质量为 $m=1.7\times10^{-27}$ kg 的粒子带有电荷量 $q=1.6\times10^{-19}$ C，在 $B=1.1$ T 的均匀磁场中运动；$\boldsymbol{B}$ 的方向沿着 z 轴正方向。当 $t=0$ 时，粒子位于坐标原点，并具有沿 x 轴正方向的初速度 $v_0=6.0\times10^5$ m/s。

（1）设计一个计算机程序来画出 $t=0$ 到 $t=6.5\times10^{-8}$ s 时间内粒子的位置及相应的速度，取时间间隔 $\Delta t=3\times10^{-11}$ s。

（2）在计算精度内，粒子的速度大小是否为常量？若不是，减小时间间隔重新计算。

（3）计算粒子运动的轨道半径并与值 $mv/(Bq)$ 比较。

习题答案

第十五章　物质中的磁场

在上一章中，我们讨论了真空中的恒定磁场。如果把某一物质放入磁场中，由于物质和磁场的相互作用，磁场将发生变化。从这个意义上来说，我们把这些物质称为磁介质，即在磁场作用下能够获得磁矩的物质。



本章补充资源

一些物质的磁效应是十分微弱的，若磁介质内部的磁场比原来真空中的磁场稍强，则这类物质称为顺磁质，如铝、锰、铂等；而若磁介质内部的磁场比原来真空中的磁场稍弱，则这类物质称为抗磁质，如水、氯化钠、水银等。除此之外，像铁、钴、镍等磁介质内部的磁场比原来真空中的磁场明显增大，这类物质称为铁磁质。本章首先对这些磁性材料的宏观现象及其规律作一些分析，然后探讨各种磁效应的微观本质。

15-1　磁介质的磁化

NOTE

在外磁场作用下，磁介质能够获得磁矩的现象称为磁介质的磁化。磁化后的磁介质产生的附加磁场 $\boldsymbol{B}'$ 与外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 的叠加，便产生合磁场

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}' \tag{15-1}$$

为了解释磁介质的磁化现象，安培假设：磁介质的每个分子内部存在一种等效的圆电流，即分子电流[①]。每一个分子电流都具有磁矩，称为分子磁矩，从而在其周围的空间里产生磁场。在没有外磁场时，由于各分子磁矩的取向杂乱无章，磁介质的合磁矩等于零，因而它们产生的磁场等于零，对外不显示磁性。在外磁场作用下，各分子磁矩在外磁场方向取向排列趋向整齐，即磁介质发生磁化，合磁矩不等于零。在这种情况下，各分子电流的磁场已不能互相抵消，从而产生附加磁场。为了表征磁介质的磁

① 现在我们知道，原子是由带正电的原子核和绕核旋转的电子组成，电子不仅绕核转，而且还有自旋。原子、分子内电子的这些运动形成分子电流。

NOTE

化程度，可以引入磁化强度（magnetization）$\boldsymbol{M}$ 的概念，即

$$\boldsymbol{M}=\frac{\sum \boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}}{\Delta V} \tag{15-2}$$

式中 ΔV 是取自考察点附近的物理上无限小的体积，$\sum \boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$ 表示体积元 ΔV 内各分子磁矩的矢量和。磁化强度反映了单位体积磁介质内的合磁矩。如果磁介质的磁化是不均匀的，则磁化强度是位置的函数。

15-2 磁场强度

1. 束缚电流

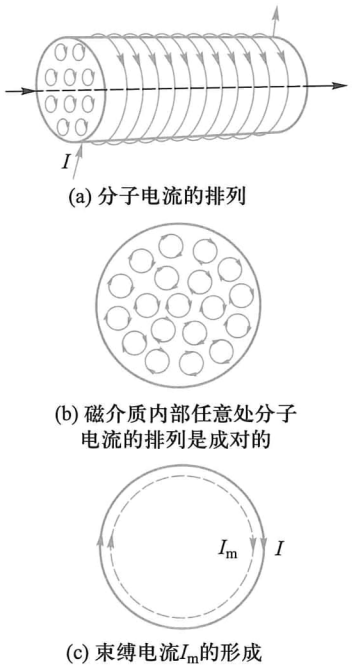


图 15-1 充满磁介质的长直载流螺线管

考虑一无限长直载流螺线管，管内充满磁介质（如铁芯），电流在管内产生均匀磁场。在外磁场作用下，磁介质中分子电流的磁矩将趋向磁场的方向排列起来，这时磁介质被磁化。图 15-1 是磁介质磁化的微观机制和横截面图。由图可见，由于分子电流的环绕方向一致，在磁介质内部任意位置上，通过的分子电流都是成对的，而且方向相反，它们的效果互相抵消。只有在截面的边缘上，分子电流才未被抵消，形成和截面边缘重合的圆电流。对磁介质整体来说，未被抵消的电流沿圆柱面流动，宏观上我们将它称为束缚电流，通常用 I_{m} 表示。

2. 束缚电流与磁化强度的关系

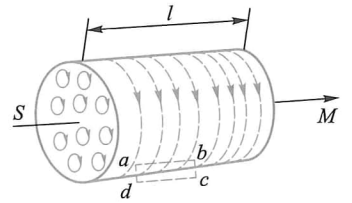


图 15-2 束缚电流与磁化强度的关系

正如电介质中极化强度 $\boldsymbol{P}$ 与束缚电荷之间存在关联一样，磁介质中磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 与束缚电流之间也有一定的关系。下面我们通过特例来说明。

如图 15-2 所示，在磁介质中取长为 l、截面积为 S 的圆柱体体积。设 j_{m} 为磁介质表面单位长度上的束缚电流，称为束缚电流线密度，则该圆柱体表面的总束缚电流为

$$I_{\mathrm{m}}=j_{\mathrm{m}}l$$

由磁矩的定义，该段磁介质中的总磁矩为

$$\left|\sum \boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\right|=I_{\mathrm{m}}S=j_{\mathrm{m}}lS$$

则根据磁化强度的定义，有

$$M=\frac{\left|\sum \boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\right|}{\Delta V}=\frac{j_{\mathrm{m}} lS}{lS}=j_{\mathrm{m}} \tag{15-3}$$

下面我们再来计算磁化强度沿闭合回路的线积分。在图 15-2 中，取一矩形闭合回路 $abcd$，其中 ab 在磁介质内部，平行于圆柱体轴线且与 $\boldsymbol{M}$ 也平行；而 bc、ad 两边垂直于柱面，故与 $\boldsymbol{M}$ 垂直，同时 cd 在磁介质外。于是 $\boldsymbol{M}$ 对闭合回路 $abcd$ 的线积分为

$$\oint_L \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{ab} \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=M\cdot ab$$

将(15-3)式中的 M 值代入上式得

$$\oint_L \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=j_{\mathrm{m}}\cdot ab=\underset{(L\text{内})}{I_{\mathrm{m}}} \tag{15-4}$$

这里 I_{m} 是通过闭合回路的束缚电流。

(15-4)式告诉我们：磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 对闭合回路的线积分等于通过该回路所包围的束缚电流。虽然它是从均匀磁介质及矩形闭合回路的特例中推导出来的，但却普遍适用于任何情况。

3. 磁场强度　磁介质中的安培环路定理

现在考虑有磁介质时安培环路定理的形式。在有磁介质存在的磁场中任取一积分回路 L，这时穿过回路 L 的不但有传导电流，还有束缚电流，根据安培环路定理，有

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\left(\sum_{(L\text{内})} I+\underset{(L\text{内})}{I_{\mathrm{m}}}\right) \tag{15-5}$$

式中传导电流 I 是已知、可测量的；而束缚电流是不能直接测量的，因而是未知的。因此，在安培环路定理的使用中要设法避开它，为此利用(15-4)式，得到

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\left(\sum_{(L\text{内})} I+\oint_L \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)$$

或

$$\oint_L \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_{(L\text{内})} I$$

现在我们定义一个新的物理量，称为磁场强度(magnetic field strength)$\boldsymbol{H}$，即

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M} \tag{15-6}$$

NOTE

这样，有磁介质存在时的安培环路定理可以简洁地表示为

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_{(L内)} I \tag{15-7}$$

(15-7)式表明，$\boldsymbol{H}$ 的环流等于穿过闭合回路所包围的传导电流的代数和，与磁介质的束缚电流无关。这使我们联想到，引入电位移 $\boldsymbol{D}$ 后，我们能在电介质存在的情况下把高斯定理写成只包含自由电荷的形式。

磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 与电位移 $\boldsymbol{D}$ 相似。最初，曾经有人认为自然界中存在类似于电荷的磁荷，因而磁学是根据与电学的类比发展起来的，于是在历史上人们就把 $\boldsymbol{B}$ 称为磁感应强度，而把 $\boldsymbol{H}$ 称为磁场强度。迄今为止，由于尚未找到磁荷存在的确切证据，于是人们才明白，被称为磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的那个量实际上并不与电位移 $\boldsymbol{D}$ 相似，而是与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 相似。但是，由于长期的使用习惯，所以磁感应强度、磁场强度的说法一直沿用至今。

在真空中，$\boldsymbol{M}=0$，因此 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu_0$。对于无限长直电流，它在真空中产生的磁场强度为

$$H=\frac{B}{\mu_0}=\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi b}=\frac{I}{2\pi b} \tag{15-8}$$

由上式可见：磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的量纲等于电流的量纲除以长度的量纲。因此，在 SI 中，磁场强度的单位为安培/米(A/m)。

4. 相对磁导率

对于各向同性的磁介质，磁化强度与磁场强度成正比，即在磁介质中每一点处，有

$$\boldsymbol{M}=\chi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H} \tag{15-9}$$

式中 χ_{m} 是一个反映磁介质磁学特性的常量，称为磁化率(magnetic susceptibility)。它是一个量纲为一的量。实验指出：对于弱磁性(非铁磁)物质，在不太强的磁场中，χ_{m} 与 H 无关。

将(15-9)式代入(15-6)式得

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\chi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H}$$

由此得到

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}})} \tag{15-10}$$

其中量纲为一的常量

$$\mu_{\mathrm{r}}=1+\chi_{\mathrm{m}} \tag{15-11}$$

称为磁介质的相对磁导率(relative permeability)。

将(15-11)式代入(15-10)式,得

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0\mu_r} \tag{15-12}$$

或

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\mu_r\boldsymbol{H} \tag{15-13}$$

例 1

在螺绕环的导线内通有 1 A 电流,环上所绕线圈共有 800 匝,环的平均周长为 0.5 m。实验测得环内磁感应强度为 $B=0.5$ T。设环内磁场均匀。求:(1)环内磁场强度;(2)磁化强度;(3)磁化率;(4)束缚电流线密度和相对磁导率。

解 (1) 由磁介质存在时的安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=NI$$

得

$$H=\frac{NI}{l}=\frac{800\times 1}{0.5}\ \mathrm{A/m}=1\ 600\ \mathrm{A/m}$$

(2) $M=\dfrac{B}{\mu_0}-H=\dfrac{0.5}{4\pi\times 10^{-7}}-1\ 600\ \mathrm{A/m}$

$=3.984\times 10^5\ \mathrm{A/m}$

(3) $\chi_m=\dfrac{M}{H}=\dfrac{3.984\times 10^5}{1\ 600}=249$

(4) $j_m=M=3.984\times 10^5\ \mathrm{A/m}$, $\mu_r=1+\chi_m=250$。

15-3 顺磁性与抗磁性

分子磁矩不等于零的物质是顺磁质(paramagnetic),顺磁质所表现的磁性称为顺磁性。顺磁质在外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中磁化后产生的附加磁场 $\boldsymbol{B}'$的方向和 $\boldsymbol{B}_0$ 的方向相同,下面我们来讨论顺磁性的微观本质。

在外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 的作用下,分子中沿轨道运动的电子就如同一只陀螺,因此电子应具有回转仪在外加作用力下运动的一切特点,包括电子的进动。如图 15-3 所示,分子电流具有的分子磁矩为 $\boldsymbol{p}_m$,由于旋转着的电子在磁场中受到磁力矩 $\boldsymbol{M}_B=\boldsymbol{p}_m\times\boldsymbol{B}_0$ 的作用,根据角动量定理 $\boldsymbol{M}_B\mathrm{d}t=\boldsymbol{L}'-\boldsymbol{L}$,电子产生进动,即电子除参与绕核的轨道运动和自旋外,还要附加一个以外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 为轴的转动。若以面对 $\boldsymbol{B}_0$ 的方向看,电子进动的方向是逆时针转向。电

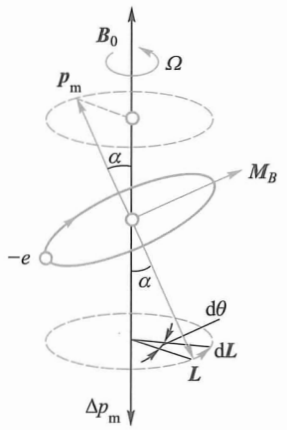


图 15-3 电子在外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中的进动

NOTE

子的进动也相当于一个圆电流，考虑到电子带负电，因此，进动产生的附加磁矩 $\Delta \boldsymbol{p}_m$ 的方向与外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 的方向相反。可以证明：如果电子沿轨道运动的方向与前述相反，而电子进动的方向仍为逆时针。因此，附加磁矩 $\Delta \boldsymbol{p}_m$ 的方向仍和 $\boldsymbol{B}_0$ 相反。

在顺磁质中，每个分子的分子磁矩有一定的量值 $\boldsymbol{p}_m$，而且要比附加磁矩 $\Delta \boldsymbol{p}_m$ 大得多，即 $\boldsymbol{p}_m \gg \Delta \boldsymbol{p}_m$，以至 $\Delta \boldsymbol{p}_m$ 可以忽略不计。因此，分子磁矩是顺磁质产生磁效应的主要原因。外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 不但产生附加磁矩，而且还对分子磁矩 $\boldsymbol{p}_m$ 有取向作用，使得 $\boldsymbol{p}_m$ 向着与外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 一致的方向偏转。由于附加磁矩 $\Delta \boldsymbol{p}_m$ 由进动产生，所以沿着 $\boldsymbol{B}_0$ 方向的分子磁矩 $\boldsymbol{p}_m$ 总是远远大于附加磁矩 $\Delta \boldsymbol{p}_m$，故合磁矩将沿着 $\boldsymbol{B}_0$ 方向，因而附加磁场 $\boldsymbol{B}'$ 也和 $\boldsymbol{B}_0$ 相同，从而表现为顺磁性。

在顺磁质中，外磁场力图使分子磁矩 $\boldsymbol{p}_m$ 沿着 $\boldsymbol{B}_0$ 方向取向，然而分子热运动又力图使 $\boldsymbol{p}_m$ 沿着各个方向的分布均匀。结果，沿着磁场的方向便建立起分子磁矩的某一优势取向，$\boldsymbol{B}_0$ 越大，优势取向作用越强，而温度越高，优势取向作用越弱。

1895 年，居里(P.Curie)在实验中发现，顺磁质的磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 与外磁场的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$ 成正比，而与温度成反比，即

$$M = C\frac{B_0}{T} \tag{15-14}$$

式中，C 是居里常量，T 为热力学温度。(15-14)式称为居里定律。从上述的物理意义来看，居里定律是十分合理的。

磁介质的分子磁矩可以用量子力学的基本原理计算出来。为此，我们不妨先讨论一下分子磁矩的来源。近代科学研究表明，在原子或分子中，电子的运动包括轨道运动和自旋运动两部分。绕原子核旋转运动的电子相当于一个电流环，从而有一定的磁矩，称为轨道磁矩；与电子自旋运动相联系的则是自旋磁矩。下面我们扼要地叙述一下如何计算分子磁矩。假设电子是在半径为 r 的圆形轨道上，则电流环的电流等于 $I=\dfrac{-e}{T}=\dfrac{-e}{2\pi r/v}=\dfrac{-ev}{2\pi r}$，故轨道磁矩大小为

$$\mu_L = IS = \frac{-ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{-evr}{2} = \frac{-e}{2m}(mvr)$$

式中 mvr 即为电子的轨道角动量大小 L，故

$$\boldsymbol{\mu}_L = \frac{-e}{2m}\boldsymbol{L}$$

以后我们在量子力学中将会学到，一个电子的轨道角动量大小 $L=n\dfrac{h}{2\pi}$，这里 n 称为量子数，$h=6.63\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$，称为普朗克常

量。可见，轨道磁矩是量子化的，因此当 $n=1$ 时，得轨道磁矩的最小绝对值为

$$\mu_B=\frac{e}{2m}\frac{h}{2\pi}=9.3\times10^{-24}\ \mathrm{A\cdot m^2}$$

式中 μ_B 是轨道磁矩的基本单位，称为玻尔磁子。

由量子力学同样可得到电子自旋磁矩为

$$\mu_S=\frac{-e}{m}S$$

式中 μ_S 为电子的自旋磁矩大小，S 为电子的自旋角动量大小。由于自旋角动量是量子化的，所以自旋磁矩也是量子化的。

在原子和分子内一般不只有一个电子，分子磁矩 $\boldsymbol{p}_m$ 应是分子内部所有电子轨道磁矩和自旋磁矩的矢量和。

根据上述简单分析，我们大致可以了解到：顺磁性的量子理论考虑到了分子磁矩相对于外磁场只能够有分立的取向这样的一个事实，即在外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 作用下，$\boldsymbol{p}_m$ 在空间的取向是量子化的。详细介绍已超出本书的研究范围，这里不再展开讨论了。

如果某类磁介质的分子磁矩 $\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{0}$，即分子中电子的轨道磁矩和自旋磁矩的矢量和等于零，这样的物质称为抗磁质（diamagnetism），抗磁质表现出的磁性称为抗磁性。抗磁质在外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中磁化后产生的附加磁场 $\boldsymbol{B}'$ 的方向与 $\boldsymbol{B}_0$ 相反。对于抗磁性的微观机理可作如下解释。

抗磁质在外磁场的作用下产生的附加磁矩 $\Delta\boldsymbol{p}_m$ 是抗磁质产生磁效应的唯一原因。附加磁矩 $\Delta\boldsymbol{p}_m$ 的方向与外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 的方向相反，因而附加磁场 $\boldsymbol{B}'$ 和 $\boldsymbol{B}_0$ 也相反，从而表现为抗磁性。

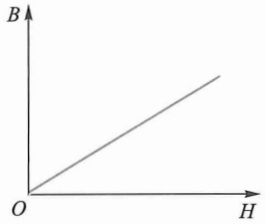
这里必须指出：抗磁质的分子磁矩虽然等于零，但是就如前面所指出的那样，具有相反磁矩的电子所产生的附加磁矩总是与磁场方向相反，因此总的附加磁矩不等于零。

15-4 铁磁性

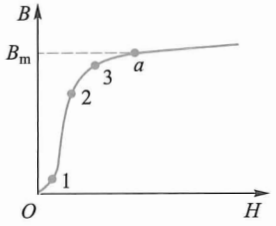
在没有外磁场作用的情况下就具有磁化强度的物质属于另一类磁介质。由于铁是这类物质中最具代表性的，所以就把这一类物质称为铁磁质（ferromagnetic）。这里必须强调的是，铁磁质仅在处于结晶状态时才具有铁磁性。

铁磁质是强磁性物质，其磁化强度比属于弱磁性物质的顺磁质和抗磁质的磁化强度高出 10^{10} 个数量级。

1. 铁磁质的磁化规律



(a) 弱磁性物质的磁化曲线



(b) 铁磁质的磁化曲线

图 15-4　磁介质的磁化曲线

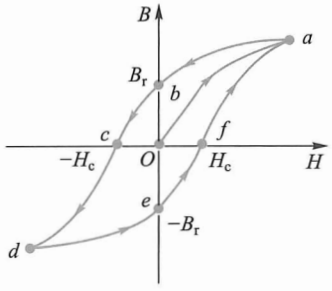


图 15-5　磁滞回线

铁磁质的磁化规律实际上研究的就是 M 和 H 或 B 和 H 之间的依赖关系，这种关系曲线称为磁化曲线（magnetization curve）。

弱磁性物质（顺磁质和抗磁质）的 $B-H$ 关系是线性的，铁磁质的 $B-H$ 曲线却有着比较复杂的关系，如图 15-4 所示。

实验表明，当磁场强度 H 从零开始增加时，磁感应强度 B 随之增加（$O-1$ 段），H 再继续增大时，B 先经过一段急剧增加的过程（1-2 段），然后缓慢增加（2-3 段），接着在曲线 3-a 段，$B-H$ 间呈线性变化。到达 a 点后，H 再继续增大时，B 几乎不再增加，这时铁磁质的磁化达到饱和，饱和时的磁感应强度 B_m 称为饱和磁感应强度。从未磁化到饱和磁化的这段磁化曲线，称为铁磁质的起始磁化曲线。

当铁磁质的磁化达到饱和之后，减小磁场强度 H，这时 B 的值也要减小，但不沿原来的起始磁化曲线 Oa 下降，而是沿着曲线 ab 下降，如图 15-5 所示。当 $H=0$ 时，磁感应强度 B 并不等于零，而是保留一定的大小 B_r，B_r 称为剩余磁感应强度。这就是铁磁质的剩磁（remanence）现象。它说明当 $H=0$ 时，磁化并未消失。要使 B 继续减小，必须使磁场强度 H 反向，即加上反方向的磁场。当 $H=-H_c$ 时，磁感应强度才能变为零。磁场强度 H_c 称为矫顽力（coercive force），矫顽力 H_c 的大小反映了铁磁质保留剩磁的能力。当 $B=0$ 时，铁磁质将完全退磁。

B 随 H 变化的全部过程构成了闭合曲线 $abcdefa$，它显示出铁磁质中磁感应强度 B 值的变化总是落后于磁场强度 H 的变化，这种现象称为磁滞（magnetic hysteresis），它是铁磁质的重要特性之一，因此这一闭合曲线又称为磁滞回线（hysteresis loop）。不同的铁磁质有不同的磁滞回线，它们的主要区别是矫顽力的大小。

实验表明，铁磁质在交变磁场作用下反复磁化的过程中要发热，从而引起能量损失。这种能量损失称为磁滞损耗。而且磁滞回线所包围的面积越大，磁滞损耗也越大。

2. 铁磁质的分类

从铁磁质的性能和用途来说，可按矫顽力的大小分为软磁材料和硬磁材料两大类。矫顽力较小的铁磁质（H_c 小于 10^3 A/m）

称为软磁材料；矫顽力较大的铁磁质（H_c 为 $10^4 \sim 10^6$ A/m）称为硬磁材料。

NOTE

（1）软磁材料

矫顽力小，意味着磁滞回线狭长，它所包围的面积小，从而在交变磁场中的磁滞损耗小。因此软磁材料适合制作在交变磁场中使用的电子元件的材料，如各种电感元件、变压器、镇流器和发电机中的铁芯。

（2）硬磁材料（永磁体）

永磁体是外加磁场强度去掉后（即 $H=0$）仍保留较强的剩余磁感应强度的物质。用于制造永磁体的材料的矫顽力越大，永磁体越容易保持较强的剩磁，因此永磁体是一种硬磁材料。硬磁材料的特征是具有较宽的磁滞回线。在各种电气设备，如电表、扬声器、电话机和录音机等中，都需要永磁体。这里特别值得一提的是，1998 年 6 月 2 日随航天飞机送上太空的阿尔法磁谱仪中的永磁体就是由中国的科学家成功制造的。

评价硬磁材料性能的指标主要是矫顽力 H_c 和剩磁 B_r。

3. 磁畴理论

铁磁性的微观理论基础是弗伦克尔（Я.И.Френкелъ）和海森伯（W.K.Heisenberg）于 1928 年奠定的。实验表明，对铁磁质的磁性有贡献的是电子的自旋磁矩。在没有外磁场的条件下，铁磁质晶体中能够产生一种迫使各电子自旋磁矩矢量彼此平行排列的力[①]，结果形成一个个小小的自发磁化的区域，这种区域称为磁畴（magnetic domain）。在每一个磁畴的范围内，铁磁质自发磁化到饱和状态，因此有一定的磁矩。铁磁质在未磁化时，各磁畴内的自发磁化磁矩方向是杂乱无章的，因此整个物质的合磁矩等于零，如图 15-6（a）所示，于是在宏观上不显示出磁性。

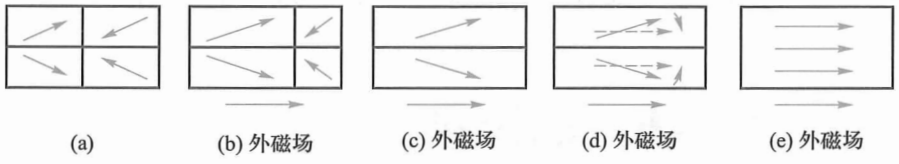


图 15-6 铁磁质的磁化过程

① 由于电子有自旋磁矩，磁矩又产生磁场，所以电子之间可以通过磁矩相互作用。磁矩沿着磁场方向排列最稳定，相应能量也最低，因此电子磁矩平行排列时能量最低、最稳定。

NOTE

加上外磁场后，在铁磁质磁化过程的不同阶段，磁场对磁畴产生不同的作用。开始时，外加磁场比较弱，可以观察到各磁畴边界的移动，结果发现：磁矩 $\boldsymbol{p}_m$ 的方向与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 成较小角度的磁畴的体积逐渐增大，而磁矩 $\boldsymbol{p}_m$ 与外磁场成较大角度的磁畴的体积逐渐缩小，如图 15-6(b)所示。随着外磁场的增大，这种过程不断地进行下去，直到角度较小的磁畴完全地把角度较大的磁畴吞并为止，如图 15-6(c)所示，继而发生各磁畴的磁矩向外磁场方向的转动。在这种情况下，单个磁畴范围内的各电子磁矩将同时转向而不影响它们之间的严格平行性，如图 15-6(d)所示。这时，铁磁质就显示出宏观的磁性。当所有磁畴的磁矩都与外磁场方向一致时，铁磁质的磁化就达到饱和，如图 15-6(e)所示。

磁畴理论能解释剩磁、磁滞和磁滞损耗等现象。实践证明，固体并不是理想的完整结构，在晶体中往往存在着各种缺陷，这些缺陷阻碍了磁畴壁的运动，使磁畴的运动成为一个不可逆的过程。因此，当外磁场逐渐减小时，铁磁质中的缺陷和内应力就阻碍磁畴恢复到原来的状态，使 B 在随 H 变化的过程中不能简单地按原来的曲线返回，这是产生磁滞现象的主要原因。甚至在外磁场停止作用，即 $H=0$ 时，铁磁质中各磁畴的某种排列还被部分地保留下来，这使物质保留部分磁性，这就是所谓剩磁现象。另外，当铁磁质反复磁化时，磁畴壁在运动中不断地受到缺陷和杂质的阻碍，消耗掉一部分能量，使铁磁质发热，这就是磁滞损耗。

磁畴理论还能解释在高温或强烈震动时的去磁作用。在高温下，由于铁磁质中分子的剧烈热运动可瓦解磁畴内电子自旋磁矩的有规则排列，从而破坏了磁畴。居里发现，对于任何铁磁质，都存在一个临界温度。高于这一温度时，磁畴完全解体，从而失去铁磁性质，铁磁质变为顺磁质。这一温度称为居里点。铁的居里点为 768℃，镍的居里点为 365℃。

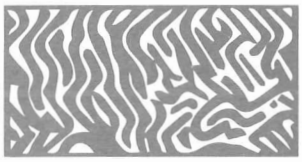


图 15-7 显示磁畴结构的铁粉图形

现在，磁畴的存在已被实验证实，将铁粉撒在抛光去磁过的铁磁质的表面上，在电子显微镜中就能观察到磁畴的结构。图 15-7 就是显示磁畴结构的铁粉图形。实验检测到，磁畴线度的数量级为 1~10 μm，体积约为 $10^{-8}m^3$，其形状十分复杂。

15-5 磁记录

磁记录和存储技术历史悠久，存储容量大，成本低，生产工艺成熟，质量稳定，在各行各业中都有着广泛的应用。如录音机、录

NOTE

像机、磁盘、磁卡、信用卡以及磁卡式车票等，都是利用铁磁材料的磁性来记录信息的。随着信息量的爆炸式增长，对信息存储技术提出了越来越高的要求，虽然现在出现了多种新的数据存储方法，磁记录数据存储方式受到了很大的冲击和挑战，但是在要求超高存储容量的情况下，磁记录仍然是不可替代的存储技术之一。

早期的磁记录采用纵向磁记录材料，即记录在磁层表面上信号的磁化方向与记录材料的运动方向一致，这种磁记录方式主要应用于磁带录音等。随着电视技术的发展，为了记录视频信号，出现了横向磁记录材料，即记录在磁层表面上的信号磁化方向与记录材料运动方向垂直或接近于垂直。

随着科技的发展，特别是以数字逻辑电路为基础的数字计算机技术的飞速发展，需要极大地提高介质的存储密度，人们首次提出垂直磁记录的概念，即记录在磁层表面上的剩余磁化方向和磁介质运动方向及记录材料表面垂直。近年来，垂直磁记录技术被广泛地应用于高密度的硬磁盘中。

垂直磁记录技术中采用单极磁头实现数据的写入，如图 15-8 所示。因为信号写入磁极非常窄，因此可以提供很高的磁通密度，并通过介质的软磁层完成闭合，对记录层的磁矩进行垂直定向，从而实现数据的写入。而回路的另一磁极较宽，产生的磁通密度比较低，不会改写数据。

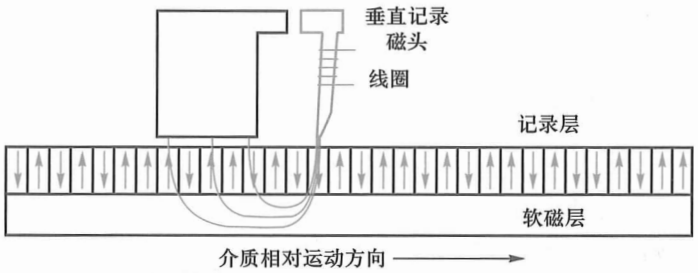


图 15-8 垂直记录写入模式

垂直磁记录技术可以大大提高数据的记录密度，然而记录密度越高对数据读取磁头的灵敏度、分辨率和信噪比等要求也越高。目前最常用的数据的读取方式是使用的巨磁电阻 GMR（giant magnetoresistance）磁头，研究表明，磁阻比（MR）为 20% 的 CIP-GMR（current-in-plane GMR）磁头，可稳定可靠地读出记录密度小于 200 Gb/in^2 的信号。随着磁盘记录密度的进一步提高，人们开始考虑使用 CPP-GMR（current-perpendicular-plant GMR）磁头和隧道型磁电阻 TMR（tunneling-magnetoresistance）磁头。前者的特点是低电阻和大 MR 值，信噪比较高。后者采用 MgO 隧道阻挡层，可使 TMR 磁头的 MR 值高达 100%，其灵

NOTE

敏度高于 GMR 磁头。

近年来，传统机械硬盘的存储密度已经接近极限。因此，新型存储技术的研发显得迫在眉睫。从硬盘的结构上，人们主要开发了叠瓦式磁记录（shringle magnetic recording，SMR）技术、二维磁记录（two-dimensional magnetic recording，TDMR）和晶格式磁记录（bit-patterned magnetic recording，BPMR）。这些新型磁记录技术的优点是对硬盘驱动器的整个制造工艺改变较小，比较容易实现。但是缺点是对磁记录密度的提升并不明显。从介质磁信号的写入方式上，则研发了能量辅助磁记录（energy-assisted magnetic recording），即微波辅助磁记录（microwave-assisted magnetic recording）技术以及热辅助磁记录（heat-assisted magnetic recording）技术。微波辅助磁记录技术的核心应用微波辅助磁翻转效应（microwave-assisted switching，MAS），即通过极高频率的微波磁场向存储单元注入能量，将磁矩完全翻转。热辅助磁记录技术的思想来源于“磁光盘”，是能量辅助磁记录另一种模式。在记录数据的过程中，利用激光加热介质使其温度接近居里点，以降低矫顽力，从而降低写入难度；数据记录完成后，降低介质温度，恢复较高的矫顽力，以保证记录数据的稳定性。因此，能量辅助磁记录技术是通过不同的手段向存储介质注入能量，辅助磁场完成数据的写入，有望将硬盘存储面密度提升一个数量级。

本章摘要

1. 磁介质的分类

顺磁质：被磁场吸引，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}'$ 同向
抗磁质：被磁场排斥，$\boldsymbol{B}_0$ 与 $\boldsymbol{B}'$ 反向
} 弱磁性物质。

铁磁质：强磁性物质。

2. 磁介质的磁化

磁介质在外磁场作用下能够获得磁矩的现象称为磁介质的磁化，其合磁场为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}'$$

其中 $\boldsymbol{B}_0$ 为外磁场，$\boldsymbol{B}'$ 为磁化后的附加磁场。

3. 磁化强度 $\boldsymbol{M}$：描述磁介质的磁化程度

$$\boldsymbol{M}=\frac{\sum \boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}}{\Delta V}$$

式中 $\sum \boldsymbol{p}_m$ 为体积元 ΔV 内分子磁矩的矢量和。

NOTE

4. 磁场强度 $\boldsymbol{H}$

$\boldsymbol{H}$ 是一个辅助量，与电介质中的电位移 $\boldsymbol{D}$ 相似。

在磁介质中的安培环路定理：$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_{(L内)} I$，式中 $\sum_{(L内)} I$ 为环路所包围的传导电流代数和。

5. 三个磁矢量的关系

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}, \quad \chi_m \text{ 为磁化率}$$

相对磁导率（或磁导率）：$\mu_r = 1 + \chi_m$。

磁介质中任意点处的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的关系式为：$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H}$。

对于真空中的磁场：$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$。

6. 相对磁导率

顺磁质的相对磁导率 $\mu_r > 1$，抗磁质的相对磁导率 $\mu_r < 1$，它们的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 成正比关系。

铁磁质的相对磁导率 $\mu_r \gg 1$，且不是常量，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 不是简单的正比关系，而是比较复杂的函数关系。

7. 磁畴理论：铁磁性的现代理论

软磁材料：矫顽力 H_c 小。

硬磁材料：矫顽力 H_c 大。

思考题

15-1 试分析下列说法是否正确？

（1）安培环路定理 $\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_{(L内)} I$ 表明：若闭合回路 L 内没有传导电流，则回路 L 上各点的 $\boldsymbol{H}$ 必为零；

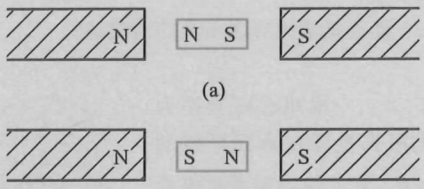
（2）$\boldsymbol{H}$ 仅与传导电流有关；

（3）对于各向同性的非铁磁质，不论是抗磁质还是顺磁质，$\boldsymbol{B}$ 总与 $\boldsymbol{H}$ 同方向；

（4）对于所有磁介质而言，$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0 \mu_r}$ 均成立。

15-2 试分别说明顺磁质和抗磁质在外磁场中产生磁化的微观原因和宏观表现。

15-3 把两种不同的磁介质放在磁铁的两个不同磁极之间，它们磁化后变成磁体，但磁极的位置不同，如图所示。试指出哪一种是顺磁质，哪一种是抗磁质。



思考题 15-3 图

15-4 试分析下列情况：

（1）磁铁为什么能吸引小铁钉之类未被磁化的铁制物体？

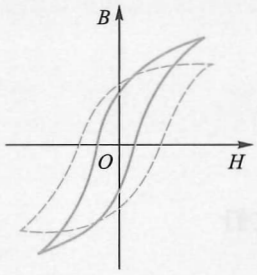
（2）钢铁厂搬运出炉的高温钢锭时，为什么不能用安全的电磁铁起重机搬运？

15-5 什么是矫顽力？软磁材料与硬磁材料的

矫顽力各有什么特点？

15-6 为什么一块永久磁铁由高处掉到地板上时，其磁性就可能会减弱？把一根铁条南北放置，敲它几下，就可能出现磁性，这又是什么道理？

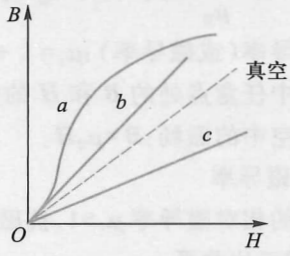
15-7 如图所示是两种不同铁磁质的磁滞回线，问用哪一种铁磁质来制造永久磁铁较合适？用哪一种铁磁质来制造便于产生变化磁场的电磁铁较合适？



思考题 15-7 图

15-8 一种介质能否既是电介质又是磁介质？

15-9 如图所示，三条实线分别表示不同磁介质的磁化曲线，虚线表示在真空中的 $B-H$ 关系，试指出哪一条是表示顺磁质的，哪一条是表示抗磁质的，哪一条是表示铁磁质的。



思考题 15-9 图

习题

15-1 地球的地磁矩为 $6.4\times10^{21}\ \mathrm{A\cdot m^2}$，如果用一绕地球赤道的单匝线圈来产生如此大的磁矩，则：

（1）该线圈中需通入多大的电流？

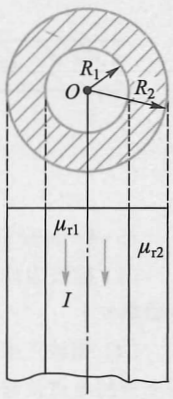
（2）此装置产生的磁场能否正好抵消地面上空各点的地磁场？

（3）能否抵消地球表面处的地磁场？

15-2 一根相对磁导率为 μ_{r1} 的无限长直圆柱形铜导线的半径为 R_1，其上均匀地通过电流 I。铜导线外包一层相对磁导率为 μ_{r2} 的圆筒形不导电的磁介质，如图所示。试求：

（1）磁介质内、外的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的分布；

（2）外层磁介质外表面上的束缚电流线密度。



习题 15-2 图

15-3 有一铁环，平均周长为 0.3 m，截面积为 $1.0\times10^{-4}\ \mathrm{m^2}$，其上均匀绕有 300 匝线圈。当每匝线圈内通过的电流为 0.032 A 时，铁环内的磁通量为 2.0×10^{-6} Wb，试求：

（1）铁环内的磁场强度和磁化强度；

（2）束缚电流线密度；

（3）铁环的相对磁导率。

15-4 一个通电的空芯长直螺线管内部的磁感应强度为 6.5×10^{-4} T，当插入铁芯后，其内部的磁感应强度变为 1.4 T，试求铁芯内部的磁场强度和相对磁导率。

15-5 一个铁原子的磁矩为 $1.8\times10^{-23}\ \mathrm{A\cdot m^2}$。设一根铁棒长为 0.05 m，截面积为 $1.0\times10^{-4}\ \mathrm{m^2}$。当其磁化后，铁棒中所有铁原子的磁矩都整齐排列，此时其总磁矩为 $7.57\ \mathrm{A\cdot m^2}$。

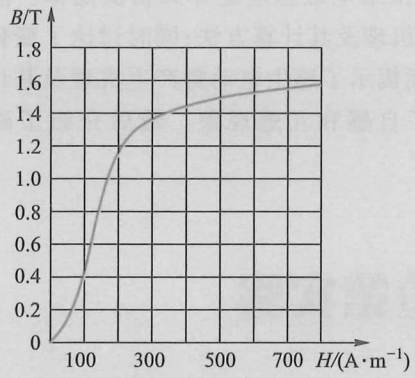
（1）试求铁棒中的磁化强度；

（2）若要这根铁棒在 $B_0=1.5$ T 的均匀外磁场中

转到与磁场正交的位置，需要多大的转动力矩？

15-6 有一根均匀磁化的铁棒，其矫顽力为 $H_c = 4.0\times10^3$ A/m，现将它放入长为 0.12 m、绕有 60 匝线圈的长直螺线管中退磁，问线圈中至少需通以多大的电流？

15-7 退火纯铁的起始磁化曲线如图所示。一长直螺线管用这种纯铁做芯，在该长直螺线管上的导线中通入 6.0 A 的电流时，管内产生 1.2 T 的磁场。如果抽出铁芯，要使管内产生同样的磁场，需要在导线中通入多大的电流？



习题 15-7 图

15-8 一个闭合的铁环平均周长为 0.45 m，其上均匀密绕着 300 匝线圈。如果需要在该铁环内产生 0.9 T 的磁感应强度。试求下列两种情况下线圈上需通过的电流：

（1）铁环材料为铸铁；

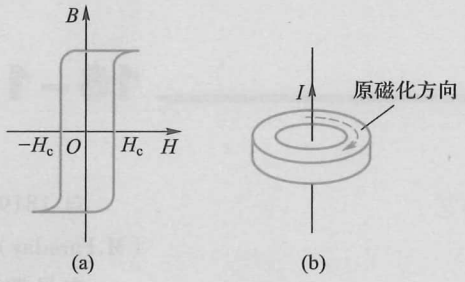
（2）铁环材料为硅钢片。

（已知铸铁在 $B = 0.9$ T 时，$H_1 = 0.9\times10^4$ A·m^{-1}；硅钢片在 $B = 0.9$ T 时，$H_2 = 2.6\times10^2$ A·m^{-1}）

15-9 铁氧体的磁滞回线接近矩形，如图(a)所示，铁氧体的这种特性常被用来制造电子计算机存储元件的环形磁芯。这种环形磁芯外直径为 8×10^{-4} m，内直径为 5×10^{-4} m，高为 3×10^{-4} m，其矫顽力 $H_c = 500/\pi$ A/m，如图(b)所示。假设磁芯已被磁化，现在其中心轴处通过线性电流 I 产生反向磁场，若反向磁场一旦超过矫顽力，其磁化方向就会反转。试问：

（1）当 I 多大时，磁芯中磁化方向开始反转？

（2）要使磁芯中从内到外的磁化方向全部反转，则 I 至少为多大？



习题 15-9 图

习题答案

第十六章　电磁感应



本章补充资源

电磁感应就是磁产生电的效应，是电磁学中最重大的发现之一，它从另一方面揭示了电与磁之间的密切联系。电磁感应的发现不仅推动了电磁理论的发展，而且在当代电工和电子学技术领域得到了广泛的应用。

本章首先介绍了法拉第电磁感应定律和楞次定律。然后分析了动生电动势的产生机理及其计算方法；同时讨论了变化的电场激发磁场的问题，进而揭示了感生电动势产生机理及其计算方法；在此基础上，讨论了自感和互感现象。最后介绍了磁场的能量。

16-1　法拉第实验

NOTE

自 1819 年奥斯特发现电流能够产生磁场之后，法拉第（M.Faraday）开始潜心研究磁场产生电流的效应。

在早期的实验研究中，法拉第发现恒定电流对附近的线圈并不产生影响，这使他感到困惑，但是他的实验研究工作一直没有停下来。其中一个实验的装置是这样的：有两个靠得很近的线圈，其中一个线圈和电流计一起组成一个回路，另一个线圈和电池连接并通上电流，结果发现电流计的指针不发生偏转，即线圈中没有电流产生，这让法拉第感到十分失望。直到 1831 年法拉第重复做这一实验时，一次偶然的机会，他发现电流在接通或断开时，电流计指针有一轻微的摆动。他敏锐地意识到线圈中的电流不是由恒定电流感应产生的，而是由变化的电流感应产生的。通过对电磁感应现象的进一步研究，他总结出了著名的电磁感应定律。

下面，我们通过法拉第的实验来阐述什么是电磁感应现象，产生电磁感应的条件是什么。

1. 磁铁与线圈的相对运动

图 16-1(a)表示一个线圈 H_1 的两端连接在电流计上，由于没有电源，电流计指针不会发生偏转。但如果我们把条形磁铁插入线圈，在磁铁插入的过程中，电流计指针就发生偏转，这表明线圈中有电流产生。如果磁铁和线圈保持相对静止，电流计指针就不偏转。如果把磁铁从线圈内抽出，电流计指针又发生偏转，但偏转方向与磁铁插入时相反，这表明电流的方向与前面相反。

在实验中，磁铁插入或抽出的速度越快，电流计指针偏转的角度越大，这表明产生的电流越大。

2. 线圈与线圈的相对运动

如图 16-1(b)所示，用另一个与电源相连接的线圈 H_2 来代替条形磁铁重复上面的实验，可以发现：在线圈 H_2 移近或离开线圈的过程中，线圈 H_1 中有电流流过；相对运动的速度越快，产生的电流越大；在线圈移近或离开两种情况下，电流方向相反。

上述两个实验中产生电流的起因究竟是它们和线圈间的相对运动，还是在线圈 H_1 处磁场的变化呢？为搞清这个问题，我们继续观察下面一个实验。

3. 两线圈相对静止，一线圈中的电流变化

如图 16-1(c)所示，通电线圈 H_2 和线圈 H_1 靠近，但彼此保持相对静止。在线圈 H_2 的电路中接入一个开关，在开关接通或断开的瞬间，亦即当线圈 H_2 中的电流发生变化时，与 H_1 相连的电流计指针就发生短暂的偏转。在开关接通和断开两种情况下，线圈 H_1 中的电流方向是相反的；但在开关保持接通或断开状态时，线圈 H_1 中并没有电流产生。

实验表明，线圈 H_2 和线圈 H_1 之间并没有相对运动。它和前面两个实验有一个共同点，那就是线圈 H_1 处的磁场都发生了变化。只不过前者是通过相对运动使线圈 H_1 处的磁场变化，而这个实验是通过线圈 H_2 中的电流变化使磁场发生变化。于是我们

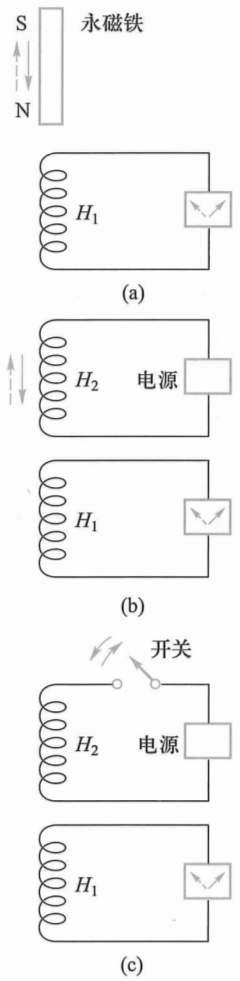


图 16-1 电磁感应现象的实验

NOTE

认识到，只要使线圈 H_1 处的磁场变化，H_1 中就会产生电流，但这样的认识是否很全面呢？

4. 导线在均匀磁场中作切割磁感线的运动

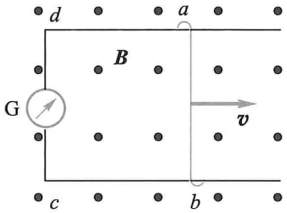


图 16-2 导线切割磁感线

NOTE

如图 16-2 所示，将一导线框 *abcd* 置于一均匀稳定的磁场中，当导线 *ab* 朝右边运动时，电流计的指针发生偏转，即线框中产生电流。导线 *ab* 滑得越快，电流计指针偏转的角度越大，即线框中的电流越大；若导线 *ab* 沿反方向运动，则电流的方向也相反。

这个实验中，当导线 *ab* 滑动时，线框所在处的磁场并没有发生变化，只是线框的面积发生了变化，结果同样产生了电流。由此可见，把电流的起因完全归结为磁场的变化，是不全面的。

上述实验中电流计所指示的电流，都称为感应电流（induction current）。从引起的效果来看，磁场的变化和线框面积的变化都导致线圈或线框中的磁通量 Φ_m 发生变化。

从上述的四个实验现象中，我们可以得到结论：当穿过闭合回路的磁通量发生变化时，回路中就产生感应电流。这就是产生感应电流的条件。

闭合回路中有感应电流产生时，就意味着回路中有电动势存在。这种由于磁通量变化而引起的电动势称为感应电动势（induction electromotive force）。感应电动势比感应电流更能反映电磁感应现象的本质。实际上，当回路不闭合的时候，也会发生电磁感应现象，这时并没有产生感应电流，但感应电动势却依然存在。另外，感应电流的大小是随着回路中电阻的变化而改变的，但感应电动势的大小却与回路中的电阻无关。因此，电磁感应现象可以理解为：当穿过导体回路的磁通量发生变化时，回路中就产生感应电动势。

16-2 法拉第电磁感应定律与楞次定律

通过上述的电磁感应实验，法拉第敏锐地察觉到穿过线框的

磁通量 Φ_m 的变化是产生感应电动势的起因，而且穿过导线回路的磁通量变化得越快，感应电动势越大；在不同的条件下，感应电动势的方向也不同。在大量精确实验的基础上，经过十年的不懈努力，法拉第得出结论：导体回路中的感应电动势 $\mathscr{E}$ 等于通过回路的磁通量随时间的变化率的负值。如果磁通量的变化率用韦伯/秒(Wb/s)为单位，则感应电动势的单位为伏[特](V)，用公式表示为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} \tag{16-1}$$

(16-1)式得出的结论，实现了法拉第“把磁变成电”的愿望，并仿照静电感应的含义把这种现象称为电磁感应，人们通常把它称为法拉第电磁感应定律(Faraday's law of electromagnetic induction)，简称法拉第定律。

如果回路不是单匝线框而是多匝线圈，且假定每一匝中通过的磁通量 Φ_m 相同，则每一匝线圈都要产生相同的感应电动势。若线圈的匝与匝之间是互相串联的，则整个线圈的总感应电动势就等于各匝所产生的感应电动势之和，即

$$\mathscr{E}=-N\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}(N\Phi_m)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \tag{16-2}$$

式中 $\Psi=N\Phi_m$ 称为磁通匝链数。

到现在为止，我们还没有说明感应电动势的方向。感应电动势的方向可以通过楞次定律(Lenz's law)来确定。这一定律是楞次(H.F.Lenz)于1834年在大量实验的基础上推断出来的。楞次定律的内容是：

闭合回路中感应电流的方向，总是使感应电流所产生的通过回路面积的磁通量，去反抗引起感应电流的磁通量的变化。

事实上，法拉第定律中的负号就表示这个“反抗”的意思。

楞次定律只适用于闭合回路。如果回路不闭合，通常我们可以把它设想为闭合回路，并考虑这时产生感应电流的方向，然后据此求出感应电动势的方向。

利用楞次定律来判断感应电流方向的步骤为：首先判明产生磁通量的磁场沿什么方向穿过闭合回路，磁通量发生什么变化(增加还是减少)；然后根据楞次定律确定感应电流产生的磁场沿何方向(与原来磁场同向还是反向)；最后由感应电流产生的磁场方向并借助右手定则确定感应电流的方向。

利用楞次定律可以判断16-1节中法拉第的第一个实验中感应电流的方向。图16-3表示把磁铁的N极推向线圈时，通过线圈的磁通量增加。按照楞次定律，感应电流产生的磁场要反抗这种增加，因而其方向必须从左到右穿过该线圈平面。根据右手螺

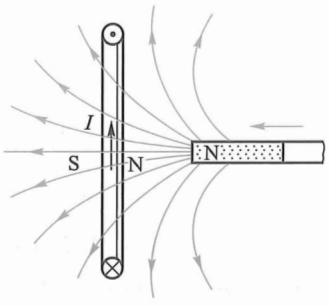


图16-3 感应电流的方向

NOTE

旋定则可确定出感应电流在线圈中沿逆时针方向，于是线圈中感应电动势的方向也就确定了。

用楞次定律来确定感应电流的方向是符合能量守恒定律的。我们知道，感应电流在闭合回路中流动时将释放出焦耳热，显然这些热能只能从其他形式的能量转化而来。在上述例子中，当磁铁被推向线圈时，总要受到一个感应电流产生的反抗力，后者将阻止磁铁的运动，因此外力必须做功。这个功正好等于线圈中所消耗的焦耳热。因为只有外力做功，才能在线圈中维持感应电流，而由于感应电流的流动，线圈中会产生焦耳热。这足以证明焦耳热的来源是外力所做的功。如果我们使线圈回路断开，再做这个实验，回路中就没有感应电流，不会产生焦耳热，磁铁上也没有受到反抗力，因而使磁铁运动就无须做功。但是，回路中仍然有感应电动势，只不过不产生感应电流。

虽然楞次定律直观地解释了法拉第电磁感应定律中负号的含义，但仍然有一些定义需要阐明。首先是磁通量的定义，对于闭合回路，如果规定回路的法线方向不同（可以两个方向任意选取），磁通量可以差一个负号，这样电动势的方向就有些含糊。我们将法线方向和电动势的绕行方向用右手定则联系起来，法拉第电磁感应定律的含义就确切了。如图 16-3 所示，如果我们规定线圈法线方向和磁铁运动方向一致，这时磁通量为正，对时间的导数也为正，电动势为负。那么电动势的方向如何呢？根据右手定则（法线方向和电动势绕行方向的关系），此时电动势假设的方向为上面进，下面出。

由于这个方向的电动势为负，所以实际的电动势是上面出，下面进，如图 16-3 所示。可以改变法线定义方向，那么电动势假设的方向也相反，而最后结论不会改变。这就是法拉第电磁感应定律中负号的确切含义。

对于一个电阻为 R 的闭合回路，感应电流为

$$I=-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} \tag{16-3}$$

式中电流的方向就是电动势的方向，与磁通量的法线方向捆绑在一起。

例 1

一圆形线圈半径为 $R=0.1$ m，线圈内均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向垂直纸面向里，其大小为 $B=6-1.5t$（SI 单位）。求线圈中的感应电动势。

解 如图 16-4 所示，对于均匀磁场

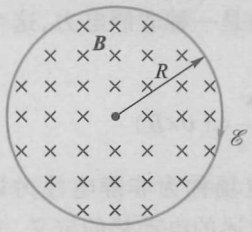


图 16-4 线圈中的感应电动势

$$\Phi_m = BS = (6 - 1.5t)\pi R^2 \quad (\text{SI 单位})$$

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = 1.5\pi R^2$$

$$= 1.5\times 3.14\times (0.1)^2\ \text{V} = 4.7\times 10^{-2}\ \text{V}$$

由于磁通量是减小的，所以由楞次定律可知，感应电动势的方向是沿顺时针方向的。

例 2

一铁芯上绕有 $N = 50$ 匝的线圈，铁芯中每一匝线圈产生的磁通量为 $\Phi_m = 4\times 10^{-5}\cos(100\pi t)$（SI 单位），求任意时刻的感应电动势。

解 由法拉第电磁感应定律有

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$= 50\times 4\times 10^{-5}\times 100\pi\sin(100\pi t)$$

$$= 0.2\pi\sin(100\pi t)\ (\text{SI 单位})$$

可以看出：$\mathscr{E}$ 的大小、方向是随时间按正弦规律变化的。

16-3 动生电动势

法拉第电磁感应定律告诉我们，当穿过回路的磁通量 Φ_m 发生变化时，回路中就产生感应电动势。按照引起磁通量变化原因的不同，感应电动势可以分为两种：一种是在恒定磁场中运动的导体中产生的感应电动势，习惯上称为动生电动势（motional electromotive force）；另一种是导体不动，由磁场变化产生的感应电动势，称为感生电动势（induced electromotive force）。

我们先讨论动生电动势。如图 16-5 所示，长度为 l 的导线 ab 在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中以速度 $\boldsymbol{v}$ 向右运动时，导线 ab 中的自由电子也以速度 $\boldsymbol{v}$ 向右运动。结果，每一个自由电子都将受到洛伦兹力：

$$\boldsymbol{F} = -e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad (16\text{-}4)$$

式中 $-e$ 为电子的电荷量，$\boldsymbol{F}$ 的方向由 a 指向 b。在洛伦兹力作用下，自由电子将沿 ab 方向运动，即电流是沿 $adcb$ 方向的。若导

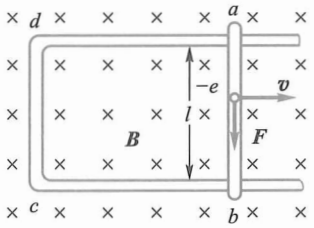


图 16-5 动生电动势

NOTE

线 ab 不与线框相连接，则洛伦兹力使自由电子聚集在 b 端，使 b 端带负电、a 端带正电，导线 ab 可看成一个电源。

作用在电子上的洛伦兹力是一种非静电力，这个力的作用等效于一个电场强度为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{K}}=\frac{\boldsymbol{F}}{-e}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

的力场对电子的作用。这个电场称为非静电性力场，相应地 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{K}}$ 为非静电性电场强度。根据前述的电动势的定义，非静电性电场强度 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{K}}$ 沿回路的环流就是回路中的动生电动势之值：

$$\mathscr{E}=\oint \boldsymbol{E}_{\mathrm{K}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_b^a \boldsymbol{E}_K\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_b^a (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (16-5)$$

式中 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{K}}$ 只有在导线 ab 上才不为零，在回路的其他导线上均为零。

从以上讨论可以看出：动生电动势只存在于运动的这一段导线上；不动的导线上没有电动势，它只是提供电流流动的通路。如果仅有一段导线在磁场中运动，而没有回路，则该段导线中没有感应电流，但仍可能有动生电动势。至于运动导线在什么情况下才有电动势，关键是看导线在磁场中是如何运动的。若导线沿切割磁感线的方向运动，就会产生动生电动势。

动生电动势的方向可由楞次定律判断。上例中 $\mathscr{E}$ 的方向是从 b 指向 a。由于运动导线相当于一个电源，而在电源内部，电动势的方向是由低电势指向高电势的，因此 a 点的电势比 b 点高。

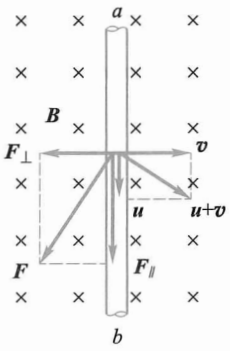


图 16-6 总洛伦兹力不做功

在推导动生电动势的公式(16-5)式的讨论中，非静电力是洛伦兹力，因此根据电动势的定义，动生电动势是由洛伦兹力做功引起的。这一结果表面上看似乎与以前阐述的洛伦兹力不可能对电荷做功的结论有矛盾，其实并不矛盾。因为(16-4)式中出现的力并不是作用于电子上的总洛伦兹力，而只是总洛伦兹力中由速度 $\boldsymbol{v}$ 引起的平行于导线方向的一个分力 $\boldsymbol{F}_{//}$，在这个分力的作用下，电子将以速度 $\boldsymbol{u}$ 沿导线运动，因此就产生一个垂直于导线的洛伦兹分力 $\boldsymbol{F}_{\perp}$。如图 16-6 所示，

$$\boldsymbol{F}_{\perp}=-e(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$$

由于 $\boldsymbol{F}_{\perp}$ 垂直于导线，故它对 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{K}}$ 的环流量无贡献。

于是，作用于电子的总洛伦兹力为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{//}+\boldsymbol{F}_{\perp}=-e(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{B}$$

它与电子的合成速度 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 垂直，故总的洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$ 对电子不做功。但 $\boldsymbol{F}$ 的一个平行于导线的分力 $\boldsymbol{F}_{//}$ 对电子做正功，形成动生电动势；而另一个垂直于导线的分力 $\boldsymbol{F}_{\perp}$ 因方向与 $\boldsymbol{v}$ 相反，故它阻碍导体运动，做负功。可以证明，两个分力所做的功的代数和为零。可见，总洛伦兹力的作用并不提供能量，而只是传递能量，因

此为使运动导线以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，需要在其上加一个外力，它克服洛伦兹力的一个分力 $\boldsymbol{F}_{\perp}$ 做功，并通过另一个力 $\boldsymbol{F}_{//}$ 转化为感应电流所释放的能量（焦耳热）。

例 3

一根长为 L 的铜棒在垂直于均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 的平面内以一端点 O 为圆心，以角速度 ω 旋转，如图 16-7 所示。求铜棒两端之间产生的感应电动势。

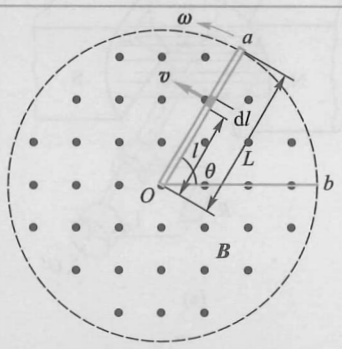


图 16-7 例 3 图

解 因铜棒旋转时棒上各点线速度不一样，故必须积分。假设动生电动势的方向为 O 指向 a，在棒上任取一线元 $\mathrm{d}l$，它与 O 点距离为 l。当线元 $\mathrm{d}l$ 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，而 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 垂直时，$\mathrm{d}l$ 上产生的动生电动势为

$$\mathrm{d}\mathscr{E}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=Bv\mathrm{d}l$$

由于每一线元 $\mathrm{d}l$ 的线速度 $v=\omega l$，而且均与 $\boldsymbol{B}$ 垂直，所以整根铜棒的感应电动势为

$$\mathscr{E}_{Oa}=\int\mathrm{d}\mathscr{E}=\int_0^L Bv\mathrm{d}l=\int_0^L B\omega l\mathrm{d}l=\frac{1}{2}B\omega L^2$$

因 $\mathscr{E}_{Oa}>0$，所以铜棒电动势的方向从 O 指向 a。

例 4

三角形金属框 ABC 放在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，$\boldsymbol{B}$ 平行于边 AC。当金属框绕 AC 边以角速度 ω 转动时（图 16-8），求各边的感应电动势和回路的总感应电动势。

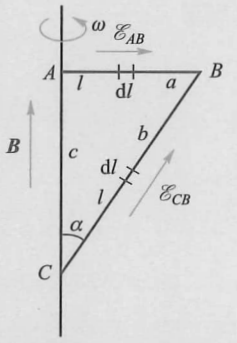


图 16-8 例 4 图

解 由动生电动势公式得

$$\mathscr{E}_{AB}=\int_A^B(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^a vB\mathrm{d}l$$

$$=\int_0^a\omega lB\mathrm{d}l=\frac{1}{2}\omega Ba^2$$

$$\mathscr{E}_{CB}=\int_C^B(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$=\int_0^b vB\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{d}l$$

$$=\int_0^b\omega B\sin^2\alpha\, l\mathrm{d}l$$

$$=\omega B\sin^2\alpha\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}\omega Ba^2$$

$$\mathscr{E}_{AC}=0$$

各段感应电动势的方向如图 16-8 所示。

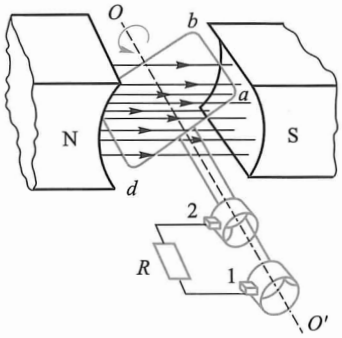
回路的总感应电动势为

$$\mathscr{E}_{总}=\mathscr{E}_{AB}+\mathscr{E}_{BC}+\mathscr{E}_{CA}$$

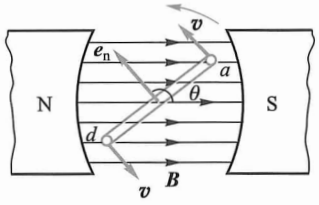
$$=\mathscr{E}_{AB}-\mathscr{E}_{CB}-\mathscr{E}_{AC}=0$$

可见，三角形线框的感应电动势为各边感应电动势的代数和，求和时应注意各边电动势的方向。

16-4　发电机和电动机的原理



(a)



(b)

图 16-9　交流发电机原理

交流发电机(AC current generator)是根据电磁感应原理制成的,是动生电动势的典型例子。图 16-9 是交流发电机的原理示意图。图 16-9(a)中 $abcd$ 是单匝矩形线圈,可以绕固定轴 OO' 在均匀磁场中转动,$\boldsymbol{B}$ 的方向与 OO' 轴垂直。线圈的两个引线端 1 和 2 接在两个与线圈一起转动的铜环上,铜环通过两个带有弹性的金属触头与外电路接通。当线圈在汽轮机或水轮机的带动下,在均匀磁场中转动时,线圈的 ab 边和 cd 边切割磁感线,线圈中就产生感应电动势。若外电路是闭合的,则在线圈和外电路组成的闭合回路中就出现感应电流。

在线圈的转动过程中,感应电动势的大小和方向都在不断变化。下面我们用(16-5)式来计算感应电动势。设线圈的 ab 和 cd 边长均为 l_1,bc 和 da 边长均为 l_2,线圈面积为 $S=l_1l_2$。在某一时刻,线圈处于如图 16-9(b)所示的位置,线圈平面法线 $\boldsymbol{e}_n$ 的方向与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向的夹角为 θ。于是,在 ab 边中产生的感应电动势为

$$\mathscr{E}_{ab}=\int_a^b(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^{l_1}vB\sin\theta\mathrm{d}l=vBl_1\sin\theta$$

同理,在 cd 边中产生的感应电动势为

$$\mathscr{E}_{cd}=\int_c^d(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^{l_1}vB\sin(\pi-\theta)\mathrm{d}l=vBl_1\sin\theta$$

NOTE

由于在线圈回路中,这两个电动势方向相同,而 bc 和 da 边又不产生感应电动势,所以整个回路中的感应电动势为

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_{ab}+\mathscr{E}_{cd}=2vBl_1\sin\theta$$

设线圈转动的角速度为 ω,并设 $t=0$ 时,$\theta=0°$,则得

$$\theta=\omega t,\quad v=\frac{l_2}{2}\omega$$

代入上式得

$$\mathscr{E}=2\frac{l_2}{2}\omega Bl_1\sin(\omega t)=BS\omega\sin(\omega t)=\mathscr{E}_0\sin(\omega t)$$

式中 $\mathscr{E}_0=BS\omega$ 表示线圈中最大感应电动势的量值。

这一结果也可以用法拉第电磁感应定律分析。当线圈处于图 16-9(b)的位置时,通过线圈的磁通量为

$$\Phi_m=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=BS\cos\theta$$

于是有

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}=BS\omega\sin(\omega t)=\mathscr{E}_0\sin(\omega t)$$

可见，两种方法所得结果相同。

NOTE

从上述结果可以看出，感应电动势随时间按正弦曲线变化，这种电动势称为交变电动势，简称交流电。交变电动势的大小和方向都是不断地变化的，当线圈转动一周时，电动势的大小和方向又恢复原状，即电动势进行了一次完全的变化。电动势进行一次完全变化所需的时间称为交流电的周期，用符号 T 表示。1 s 内电动势所作完全变化的次数，称为交流电的频率，我国所用的交流电频率为 50 Hz。周期和频率的关系为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{\nu}$$

当线圈中产生感应电流时，线圈在磁场中要受到磁力的作用，磁力矩的方向与线圈角速度的方向相反，阻碍线圈的转动。因此，为了继续发电，外力要对线圈做功，这在工程上一般是通过动力机（汽轮机、水轮机）来实现的。所以，从能量的观点来看，发电机就是利用电磁感应把机械能转化为电能的装置。

在工程上，实用的交流发电机是将线圈固定（即定子），且线圈分布于圆周上，而磁场在转动。这个磁场是由通电的电磁铁（即转子）产生的。由于大型发电机产生的电压较高，电流很大，所以线圈中产生的焦耳热也很大，为了散热，发电机必须做得很大。为了解决这个难题，浙江大学的电机专家在 1958 年发明了用冷水通过线圈导线内部来使之冷却的发电机——双水内冷发电机，从而把发电机的制造技术向前推进了一大步。

如果先对磁场中的线圈通以电流，则线圈将在磁力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\times\boldsymbol{B}$ 的作用下发生转动，这就是电动机的原理。但线圈一旦转动起来，由于线圈中磁通量的变化，便会产生一个与通电电流方向相反的感应电动势，从而消耗电能，因此电动机是把电能转化成机械能的装置。由以上分析可见，发电机与电动机的结构实际上是一样的，它们都是一种能量转化装置，区别在于使用目的不同。

16-5 感生电动势

电磁感应的另一种情形为导体回路并不运动，但由于磁场变化，通过回路的磁通量发生变化，因而在回路中产生感生电动势。那么，产生感生电动势的非静电力是什么呢？它似乎既不与导体

NOTE

中的化学过程有关，也不与热过程有关，同样它也不可能是磁力，因为导体不动，磁力对静止的电荷不产生作用力。麦克斯韦在分析了一些电磁现象之后，敏锐地指出，即使不存在导体回路，变化的磁场也会在其周围激发一种电场——感应电场（induced electric field）。由于这种电场的电场线是闭合的，像涡旋一样，所以为了与静电场区别，就把这种电场称为涡旋电场，其电场强度用 $\boldsymbol{E}_{旋}$ 表示。产生感生电动势的非静电力正是来源于涡旋电场对电荷的作用力。也就是说，是涡旋电场引起了感生电动势。如果有导体回路，涡旋电场对电荷的作用力将使导体回路中出现感应电流；即使无导体回路，涡旋电场照样存在。换句话说，变化磁场周围存在的感应电场与空间有无导体无关。由于涡旋电场的存在已被许多实验事实所证实，于是麦克斯韦就把原来仅对导体回路适用的法拉第电磁感应定律推广到对空间任意闭合回路都是适用的。

按照麦克斯韦的思想，涡旋电场 $\boldsymbol{E}_{旋}$ 与静止电荷所产生的静电场 $\boldsymbol{E}$ 之间的共同点就是对电荷都有作用力，但它们之间也有着本质的区别：静电场是由电荷激发的，是保守力场，即有势场；而涡旋电场是由变化的磁场激发的，其电场线是闭合的，因而是非保守力场。

根据法拉第电磁感应定律，对空间任意闭合回路 L，有

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} \tag{16-6}$$

由电动势的定义，闭合回路 L 中的感生电动势为

$$\mathscr{E}=\oint_{L}\boldsymbol{E}_{旋}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{16-7}$$

如果把(16-6)式和(16-7)式联立，得

$$\oint_{L}\boldsymbol{E}_{旋}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} \tag{16-8}$$

同样，电场的绕行方向和闭合回路的法线方向成右手定则。(16-8)式是电磁学的基本方程之一。

例 5

在半径为 $R=0.10$ m 的圆柱形空间内有一垂直纸面向里的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$（虚线代表磁场的边界），B 随时间以 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t=0.10$ T/s 的速率增加，求空间各处涡旋电场的电场强度 $\boldsymbol{E}_{旋}$。

解 如图 16-10 所示，由对称性分析可知，涡旋电场的电场线是以 O 为圆心的同心圆，并且圆环上涡旋电场 $\boldsymbol{E}_{旋}$ 大小相等。现以 O 为圆心、r 为半径作一闭合回路，回路绕行方向为顺时针，并假设涡旋电场 $\boldsymbol{E}_{旋}$ 为顺时针切向。

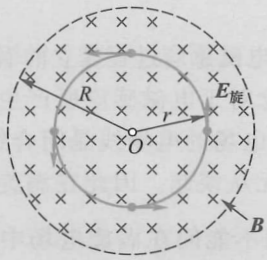


图 16-10 在 $dB/dt>0$ 的均匀磁场中产生的涡旋电场

(a) 当 $r<R$ 时，通过这回路的磁通量 Φ_m 为

$$\Phi_m = B\pi r^2$$

由(16-8)式得

$$\oint_L \boldsymbol{E}_{旋} \cdot d\boldsymbol{l} = E_{旋} \cdot 2\pi r = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

解得

$$E_{旋} = -\frac{1}{2} r \frac{dB}{dt}$$

式中负号表明，涡旋电场 $\boldsymbol{E}_{旋}$ 有反抗磁场变化的作用，它的实际方向与假设方向相反，即 $\boldsymbol{E}_{旋}$ 沿圆环的切线方向且指向逆时针一边，因而涡旋电场的电场线为逆时针绕向。注意 $E_{旋}(r)$ 与 $\frac{dB}{dt}$ 有关而与 B 无关。假定 $r=0.05$ m，将题设有关数据代入上式，得 $\boldsymbol{E}_{旋}$ 的大小为

$$E_{旋} = \frac{1}{2} r \frac{dB}{dt} = \frac{1}{2} \times 0.05 \times 0.10 \text{ V/m}$$
$$= 2.5 \times 10^{-3} \text{ V/m}$$

(b) 当 $r>R$ 时，通过该回路的磁通量为

$$\Phi_m = B\pi R^2$$

必须指出，此处被回路所包围的面积中，一部分面积(即 πR^2)在磁场范围以内，对磁通量是有贡献的；一部分面积在磁场范围以外，此时由于 $B=0$，所以对磁通量没有贡献。

同样，由(16-8)式得

$$\oint_L \boldsymbol{E}_{旋} \cdot d\boldsymbol{l} = E_{旋} \cdot 2\pi r = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

解得

$$E_{旋} = -\frac{1}{2} \frac{R^2}{r} \frac{dB}{dt}$$

假定 $r=0.15$ m，代入数据后，得 $\boldsymbol{E}_{旋}$ 的大小为

$$E_{旋} = \frac{1}{2} \frac{R^2}{r} \frac{dB}{dt} = \frac{1}{2} \times \frac{(0.1)^2}{0.15} \times 0.10 \text{ V/m}$$
$$= 3.3 \times 10^{-3} \text{ V/m}$$

对于 $r=R$，上述 $E_{旋}$ 的两个表达式应有同样的结果，这是意料之中的。图 16-11 是 $E_{旋}$ 与 r 的关系曲线。

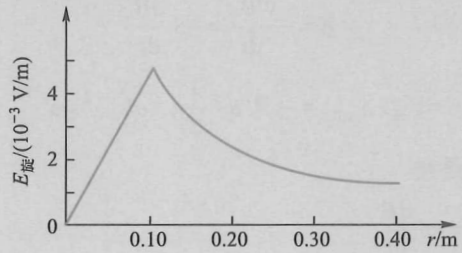


图 16-11 $E_{旋}$ 与 r 的关系曲线

图 16-12 表示可以应用法拉第电磁感应定律的四个回路。这四个回路具有相同的形状和面积，但却处于不同的位置。回路 1 和回路 2 的感生电动势 $\mathscr{E}$ 相同，因为这两个回路都处在变化着

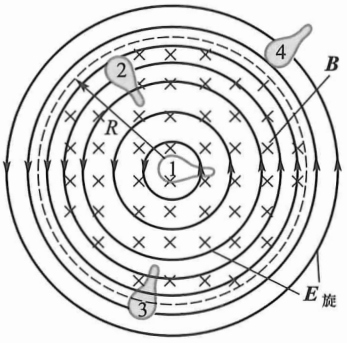


图 16-12 涡旋电场中的四个回路

的磁场之中，具有相同的面积，因而有相同的数值$\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$。必须指出，虽然这两个回路的电动势 $\mathscr{E}=\oint_L \boldsymbol{E}_{旋}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 相同，但是，正如电场线所表示的那样，两个回路周围电场 $\boldsymbol{E}_{旋}$ 的分布并不相同。回路 3 的感生电动势小些，因为这个回路的 Φ_{m} 与$\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$都较小，回路 4 的感生电动势为零。

我们要再次强调的是，由电磁感应过程建立的涡旋电场是一个非保守力场。电势这个概念对于电磁感应所产生的涡旋电场而言是无从定义的，因为涡旋电场的电场线是闭合线，沿着闭合线，哪点电势高、哪点电势低无从谈起。因此在涡旋电场中计算电动势 $E=\oint_L \boldsymbol{E}_{旋}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 时，我们不能问在涡旋电场中哪一点电势高、哪一点电势低。

例 6

如图 16-13 所示，半径为 $R=0.10$ m 的圆柱形空间中有一均匀磁场 $\boldsymbol{B}$，方向垂直纸面向里。设磁场以$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=1.0$ T/s 增加，已知 $\theta=\frac{\pi}{3}$，$|Oa|=|Ob|=0.04$ m，求等腰梯形导线框 $abcd$ 内感生电动势的大小和方向。

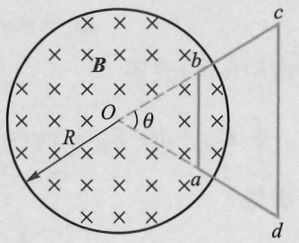


图 16-13 例 6 图

解 由已知得

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=-S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$S=S_{扇}-S_{\triangle Oab}=\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}(|ab|)^2\sin\frac{\pi}{3}$$

于是得

$$\mathscr{E}=-S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$=-\left[\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}(|ab|)^2\sin\frac{\pi}{3}\right]\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$=-\left[\frac{1}{2}\times(0.10)^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times(0.04)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\times1.0\ \mathrm{V}$$

$$=-4.54\times10^{-3}\ \mathrm{V}$$

负号表示感生电动势反抗原来磁通量的变化，其方向为 $c\to b\to a\to d$，即沿逆时针方向。

在结束感生电动势这一小节时，我们需要指出感生电动势和动生电动势的划分不是绝对的。如习题 16-8 中，在导线静止的参考系中，磁场不变而线圈在运动，因此产生动生电动势，空间中

没有感生电场。而在线圈静止的参考系中，线圈不动而导线在运动，磁场在改变，空间中有感生电场，因此产生感生电动势。这再次显示出电磁场的相对性。

16-6 涡电流

许多电磁设备中存在大块密实的金属制品（如发电机和变压器中的铁芯），当这些金属块处于变化的磁场中或相对于磁场运动时，在它们的内部也会产生感应电流。如图 16-14 所示，在圆柱形的铁芯外绕有通有交变电流的线圈，这时铁芯就处在交变磁场中。铁芯可看成是由一系列半径不同的圆柱状薄壳组成，每层薄壳形成一个闭合回路。在交变磁场中，通过这些薄壳的磁通量都在不断变化，因此在每一层薄壳中将产生感应电动势，在薄壳的回路中产生感应电流。这些感应电流的电流线呈闭合的涡旋状，因此这种感应电流称为涡电流（eddy current），简称涡流。由于大块金属的电阻很小，所以涡电流可以很大。

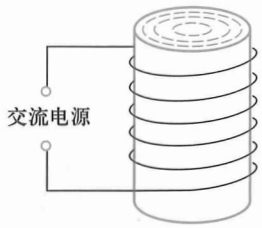


图 16-14 涡电流

涡电流在金属内流动时，会释放出大量的焦耳热。涡电流的这种热效应被用来制成高频感应电炉，这种设备可用于冶炼金属。高频感应电炉的结构及原理如图 16-15 所示，坩埚外面绕有线圈。当线圈同大功率高频交变电源接通时，高频交变电流将在线圈内激发很强的高频交变磁场，这时放在坩埚内的待冶炼金属因电磁感应而产生涡电流，进而释放出大量的焦耳热，使金属块熔化。由于这种加热和冶炼方法的优点是无接触加热，因此在真空技术方面，人们常利用这种方法加热被抽真空的仪器内的金属，去掉吸附在金属上的气体。例如在制造电子管时，常常应用感应加热的方法隔着玻璃壳使金属电极加热，温度升高，使电极上的气体放出，同时进行抽真空把玻璃壳内的气体排出电子管外。此外，由于这种加热方法是在金属内部各处同时加热，而不是把热量从外面传入，因此加热的效率很高。目前，高频感应电炉已广泛用于冶炼特种钢、难熔或活泼性较强的金属，以及生产半导体材料的工艺中。这里值得一提的是，浙江大学的电机专家曾在 20 世纪 70 年代研制出中频感应电炉，为国家作出了很大的贡献。



图 16-15 高频感应电炉结构及原理

NOTE

以上虽然列举了一些应用涡电流热效应创造生产效益的例子，但在许多情况下，涡电流所引起的发热是有害的。例如，变压器和电机的铁芯在交变磁场中会产生涡电流，这不但损耗了大量

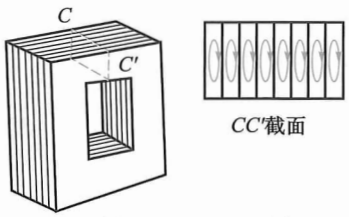


图 16-16 变压器铁芯中减少涡电流的办法

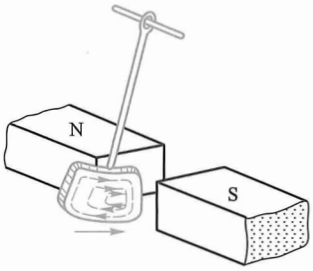


图 16-17 电磁阻尼原理

NOTE

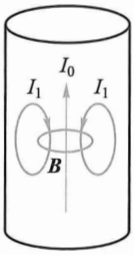


图 16-18 产生趋肤效应的原因——涡电流

的电能，而且因发热量很大，温度很高，极易烧毁这些设备和破坏绝缘材料的绝缘性。为了减少涡电流，通常采用片状且表面绝缘的硅钢片叠合起来代替整块铁芯，并使硅钢片平面与磁感线平行，如图 16-16(a)所示。这样，涡电流就受到绝缘层的限制，只能在各自的薄片内流动，如图 16-16(b)所示。于是，因为电阻的增加，涡电流大大减少，从而减少了电能的损耗。

涡电流除产生热效应外，它也会产生机械效应，这种效应也在实践中有着广泛的应用。例如，它可用作电磁阻尼，其原理如图 16-17 所示，把一块扇形铝板悬挂在磁铁的两极之间，形成一个复摆。当铝板进入磁场时，由于穿过运动铝板的磁通量发生变化，铝板内产生涡电流。根据楞次定律，涡电流的作用总是尽可能强烈地反抗引起涡流的原因，因此铝板受到一个阻尼力的作用而迅速地停止下来。这种起源于电磁感应的阻尼，称为电磁阻尼。这种装置的优点在于阻尼仅在铝板运动时才会产生，而当铝板摆锤静止时即消失，因此电磁阻尼仪器完全不会阻止系统准确地抵达平衡位置。在现今的许多电磁仪表中，为了使测量时指针能够迅速稳定下来，常常把仪表指针的轴接在铝板的转轴上。指针一摆动，铝板内就产生涡电流，而由于电磁阻尼的作用，指针很快地就稳定在平衡位置上。

在直流电路中，均匀导线横截面上的电流密度是均匀的。但是在交流电路中，随着频率的增加，导线截面上的电流分布越来越向导线表面集中，这种现象称为趋肤效应。

趋肤效应使导线的有效截面积减少了，从而使导线的等效电阻增加，所以在高频下导线的电阻会显著地随频率增加。为了减少趋肤效应，在频率不太高时，可将相互绝缘的细导线编织成辫线，以代替总截面积相同的实心导线。

产生趋肤效应的原因是：在通有交变电流的导线中产生涡电流 I_1，其取向将削弱导线内部的电流而增强靠近表面处的电流，结果是交变电流沿横截面的分布不均匀，电流好像被“挤”到导线表面附近，如图 16-18 所示。

趋肤效应在工业上可用于金属表面淬火：用高频强电流通过一块金属，则由于趋肤效应，它的表面首先被加热，并迅速达到淬火的温度，而内部温度仍较低；这时马上使之冷却，金属表面就会变得很硬，但内部仍保持原有的韧性。在高频电路中，由于趋肤效应，导线的内部变成是多余的，所以高频电路中采用的是管状导线。

例 7

将一个圆柱形金属块放在高频感应电炉中加热，如图 16-19 所示。设感应电炉线圈产生的磁场为均匀磁场，磁感应强度的方均根值为 B，频率为 ν；圆柱形金属块的直径和高分别为 D 和 h，电导率为 σ。若忽略涡电流产生的磁场，试证明圆柱形金属块内涡电流产生的平均热功率为

$$\overline{P}=\frac{1}{32}\pi^3\nu^2\sigma B^2D^4h$$

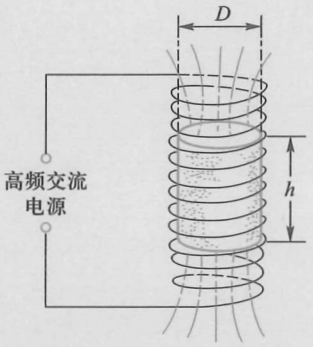


图 16-19 高频感应电炉

证明 由题意，线圈产生的磁场随时间变化的规律为

$$B_t=B_0\sin(\omega t)=B_0\sin(2\pi\nu t)$$

在圆柱形金属块内取半径为 r、厚度为 $\mathrm{d}r$ 的导体薄圆筒，在此薄圆筒内产生的感应电动势的大小为

$$\mathscr{E}=\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[B_0\sin(2\pi\nu t)\cdot\pi r^2]$$

$$=2\pi^2r^2\nu B_0\cos(2\pi\nu t)$$

感应电动势在薄圆筒内引起的涡电流所产生的瞬时热功率为

$$\mathrm{d}P=\frac{\mathscr{E}^2}{R}=\frac{[2\pi^2r^2\nu B_0\cos(2\pi\nu t)]^2}{\frac{2\pi r}{\sigma h\mathrm{d}r}}$$

$$=2\pi^3\nu^2\sigma hB_0^2\cos^2(2\pi\nu t)\cdot r^3\mathrm{d}r$$

整个圆柱形金属块内涡电流产生的瞬时热功率为

$$P=\int\mathrm{d}P=\int_0^{D/2}2\pi^3\nu^2\sigma hB_0^2\cos^2(2\pi\nu t)\cdot r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{32}\pi^3\nu^2\sigma hD^4B_0^2\cos^2(2\pi\nu t)$$

故在一个周期内的平均热功率为

$$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^TP\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{32}\pi^3\nu^2\sigma hD^4\cdot\frac{1}{T}\int_0^TB_0^2\cos^2(2\pi\nu t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{32}\pi^3\nu^2\sigma B^2D^4h$$

式中，$B^2=\frac{1}{T}\int_0^TB_0^2\cos^2(2\pi\nu t)\mathrm{d}t$，即 B 为方均根值。可见，频率 ν 越高，平均热功率越大。

16-7 自感现象

如果一个线圈中的电流发生变化，它所激发的磁场通过线圈自身的磁通匝链数也将变化，使线圈自身产生感应电动势。这种因线圈中电流变化而在线圈自身中产生的电磁感应现象称为自

NOTE

感现象(self-induction),由此而产生的电动势称为自感电动势(self-induced electromotive force)。自感电动势同其他感应电动势一样,遵从法拉第电磁感应定律。

根据毕奥-萨伐尔定律,磁感应强度 B 与产生该磁场的电流 I 成正比。由此可知,穿过线圈回路的磁通匝链数 Ψ 与线圈中的电流 I 成正比:

$$\Psi = LI \tag{16-9}$$

式中比例系数 L 称为自感系数,简称自感(inductance),与线圈中的电流无关[①],仅由线圈的大小、几何形状以及匝数决定。当线圈中的电流改变时,Ψ 也随之改变。如果我们考虑的回路是一个 N 匝线圈,且假设通过每一匝线圈的磁通量都是 Φ_m,则该回路的磁通匝链数 $\Psi = N\Phi_m$,因此根据法拉第电磁感应定律,整个线圈中的自感电动势为

$$\mathscr{E}_L = -N\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(N\Phi_m)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \tag{16-10}$$

式中负号表示自感电动势将反抗回路中电流的改变。

在 SI 中,自感的单位是这样定义的:当线圈中通有 1 A 的电流时,产生的总磁通量等于 1 Wb,这时线圈的自感称为 1 亨[利],国际符号用 H 表示:

$$1\text{H} = \frac{1\ \text{Wb}}{1\ \text{A}}$$

自感的国际单位制单位是为纪念亨利(J.Henry)而命名的,亨利是与法拉第同时代的美国物理学家。

由楞次定律可以判断自感电动势的方向。当电流 I 增大时,自感电动势 $\mathscr{E}_L$ 与 I 方向相反;当电流减小时,自感电动势 $\mathscr{E}_L$ 与 I 方向相同。

自感系数一般不易计算,通常用实验来测定。只有少数几种特殊自感器件的自感,可以用简单的方法来计算。

对于附近没有铁磁质的密绕螺线管来说,当螺线管的长度比其宽度来说足够长时,就可认为它是无限长的。当螺线管通有电流 I 时,管内将激发出一个均匀磁场,其磁感应强度为

$$B = \mu_0 nI$$

式中 n 为单位长度上的匝数。通过螺线管的总磁通量为

$$\Psi = N\Phi_m = NBS = nl \cdot \mu_0 nI \cdot S = \mu_0 n^2 lSI \tag{16-11}$$

式中 N 为总匝数,l 为螺线管长度,S 为横截面积。

---

① 这是指不存在磁介质的情况。若存在磁介质,L 还与磁介质的性质有关。若磁介质是非线性的,如铁磁质,还会与线圈中的电流有关。

由(16-9)式得

$$L=\frac{\Psi}{I}=\mu_0 n^2 lS=\mu_0 n^2 V \qquad (16-12)$$

式中 $V=lS$ 是螺线管的体积。

(16-12)式表明,长为 l 的一段螺线管的自感,与螺线管的体积成正比,与其单位长度上匝数的平方成正比。上述分析是近似的,实际测得的自感比按上述公式计算的结果要小些。这是因为计算中,我们假定整个螺线管中的磁场均匀,都等于 $\mu_0 nI$;而对于有限长的螺线管,由于存在着边缘效应,其两端的磁场只有中间部分磁场的一半,所以实际磁通匝链数要相应地小些。

例 8

设传输线为两个同轴长圆筒组成,半径分别为 R_1 和 R_2,如图 16-20 所示。电流 I 由内圆筒一端流入,由外圆筒的另一端流回,求此传输线上一段长度为 l 的自感系数。

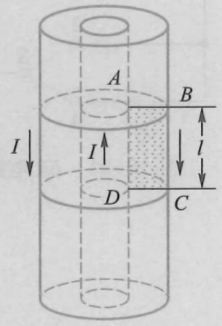


图 16-20 长为 l 的传输线的自感

解 由于磁场分布具有轴对称性,可用安培环路定理求出两圆筒之间的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

而在内圆筒之内和外圆筒之外的空间中,磁感应强度均为零。

在长度为 l 的截面 $ABCD$ 中,与轴线距离为 r 处取面元 $\mathrm{d}S=l\mathrm{d}r$,则通过该面元的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi_m=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=B\mathrm{d}S=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\mathrm{d}r$$

于是,通过截面 $ABCD$ 的总磁通量为

$$\Phi_m=\int\mathrm{d}\Phi_m=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0}{2\pi}Il\ln\frac{R_2}{R_1}$$

由公式 $\Phi_m=LI$ 可知,长度为 l 的传输线的自感系数为

$$L=\frac{\Phi_m}{I}=\frac{\mu_0}{2\pi}l\ln\frac{R_2}{R_1}$$

自感现象在电工和电子技术中应用十分广泛,利用线圈能够阻碍电流变化的特性,可以稳定电路里的电流。日光灯电路中的镇流器就是利用自感现象来点亮日光灯管和限制电路中的电流的。电子线路中常用自感线圈与电容器组成谐振电路以产生电磁振荡。

在某些情况下,自感现象也有很大危害。例如具有大自感线圈的电路在切断时,由于电路中电流变化很快,因而在电路中产生很大的自感电动势,从而导致开关处产生强烈的电弧,这可能会烧坏电闸开关或击穿线圈本身的绝缘层,因此要采取相应的“灭弧”措施,以避免损失。

16-8 LR 电路

由于自感的作用，一个由自感与电阻组成的 LR 电路在接通或切断时，电路中的电流不会突变，而是经历一个暂态过程，逐渐达到稳态。下面，我们分情况进行研究。

1. 电路接通时的电流

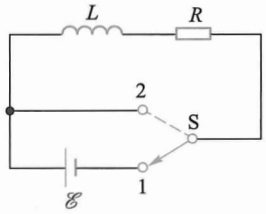


图 16-21 LR 电路

如图 16-21 所示的电路中，当开关 S 拨向 1 时，LR 电路接上电源，由于自感的作用，在电流从零开始增长的过程中，电路中出现自感电动势 $\mathscr{E}_L$：

$$\mathscr{E}_L=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

根据楞次定律，自感电动势 $\mathscr{E}_L$ 是反抗电流的增加的。

设电源电动势为 $\mathscr{E}$，内阻为零，某瞬间电路中的电流为 I，由闭合电路的欧姆定律得

$$\mathscr{E}+\mathscr{E}_L=\mathscr{E}-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=IR$$

或

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+IR=\mathscr{E} \tag{16-13}$$

这是电路中变化着的电流 I 所满足的微分方程。用分离变量法求解，可写成

$$\frac{\mathrm{d}I}{\frac{\mathscr{E}}{R}-I}=\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

对上式两边进行积分，并注意到初始条件：$t=0$ 时，$I=0$，于是有

$$\int_0^I\frac{\mathrm{d}I}{\frac{\mathscr{E}}{R}-I}=\int_0^t\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

积分后得

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}) \tag{16-14}$$

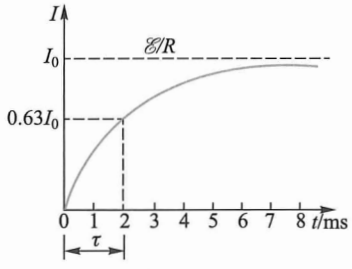


图 16-22 电路接通时电流的增长

(16-14)式表示的函数关系可用图 16-22 表示。它说明电路接通时，电流按指数规律逐渐由零增大到稳定值 $I_0=\mathscr{E}/R$。电路中的比值 L/R 具有时间的量纲，不同的 L/R 值，电流达到稳定

值的过程持续时间不同，当 $t=\tau=L/R$ 时，

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}(1-\mathrm{e}^{-1})=0.63\frac{\mathscr{E}}{R}=0.63I_0$$

即电路中的电流达到稳定值的 63%。当 $t=5\tau$ 时，$I=0.994I_0$。可见，当经过 5τ 的时间后，电流的增长过程基本结束。由此可见，$\tau=L/R$ 标志着 LR 电路中电流增长过程持续时间长短的程度，我们把 τ 称为 LR 电路的时间常量(inductive time constant)或弛豫时间。L 越大，R 越小，则 τ 越大，电流增长得越慢。

2. 电路切断时的电流

在图 16-21 中，在开关拨向 2 之前，电路中的电流为 I_0；当开关由 1 拨向 2 时，电路中的外加电动势 $\mathscr{E}$ 没有了，电路中的电流开始减小，并即刻产生一个反抗这一电流减小的自感电动势 $\mathscr{E}_L$。由闭合电路欧姆定律得

$$-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=IR$$

或

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}I=0$$

分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}I}{I}=-\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

两边积分，并利用初始条件 $t=0$ 时，$I=I_0$，得

$$I=I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \tag{16-15}$$

(16-15)式表示的函数关系如图 16-23 所示。由此可见，电路中的电流并不立即变为零，而是按(16-15)式的指数规律减小。在经过一段时间，常量 $\tau=L/R$，电流降低为原稳定值的 $1/\mathrm{e}$(约 37%)。因此，电流递减的快慢可用同一时间常量 τ 来表征。

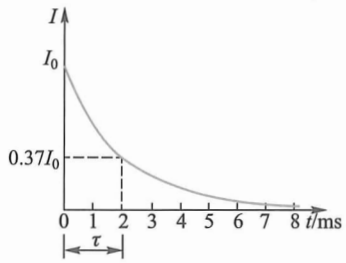


图 16-23 电路切断时电流的衰减

16-9 互感

考虑两个彼此靠近的回路 1 和 2。当回路 1 中的电流变化时，它激发的变化磁场在邻近的回路 2 中产生感应电动势，如

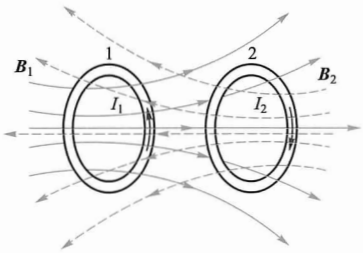


图 16-24 互感现象

图 16-24 所示。同样，回路 2 中的电流变化时，也会在回路 1 中产生感应电动势，这种现象称为互感（mutual induction），所产生的感应电动势称为互感电动势。这种称呼说明互感现象是两个回路之间的相互作用，而自感现象只涉及一个回路。

现在我们来半定量地研究互感现象。设两个回路的相对位置固定，则由回路 1 中的电流 I_1 所产生的穿过回路 2 的磁通量 Φ_{21} 和 I_1 成正比，即

$$\Phi_{21}=M_{21}I_1 \tag{16-16}$$

当电流 I_1 变化时，回路 2 中将产生感应电动势

$$\mathscr{E}_{21}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t}=-M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{16-17}$$

同样，回路 2 中电流 I_2 所产生穿过回路 1 的磁通量与 I_2 成正比，即

$$\Phi_{12}=M_{12}I_2 \tag{16-18}$$

当电流 I_2 变化时，回路 1 中将产生感应电动势

$$\mathscr{E}_{12}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t}=-M_{12}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \tag{16-19}$$

式中比例系数 M_{21} 和 M_{12} 称为回路的互感（mutual inductance）。相应的计算表明：在没有铁磁质的情况下，这两个系数永远是相等的，可统一用 M 来表示，即

$$M_{21}=M_{12}=M$$

式中 M 只和两个回路的形状、大小、相对位置以及回路磁介质的磁导率有关，M 的单位和自感系数 L 相同，用亨[利]表示。如果回路周围有铁磁性物质，那么 Φ_{21} 与 I_1 之间（或 Φ_{12} 与 I_2 之间）就没有简单的线性正比关系，互感电动势 $\mathscr{E}_{21}$ 与电流变化率 $\mathrm{d}I_1/\mathrm{d}t$ 之间（或 $\mathscr{E}_{12}$ 与 $\mathrm{d}I_2/\mathrm{d}t$ 之间）也没有简单的线性正比关系。

当两个回路是匝数分别为 N_1 和 N_2 的载流线圈时，根据法拉第电磁感应定律，有

$$\mathscr{E}_{21}=-N_2\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t},\quad \mathscr{E}_{12}=-N_1\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t}$$

相应的感应电动势仍可表示为

$$\mathscr{E}_{21}=-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t},\quad \mathscr{E}_{12}=-M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

不过这时应改用磁通匝链数与电流之间的关系来表示：

$$N_2\Phi_{21}=MI_1,N_1\Phi_{12}=MI_2 \tag{16-20}$$

两个线圈的互感系数通常是用实验测定的，只有一些简单的情况才能计算。

互感现象在工程中有着广泛的应用，例如可用于变压器

(transformer)、耦合器等,应用它们可以改变电压、电流,以及进行电路间的耦合等。有时互感现象也会带来不利的因素,例如,收音机各线路之间、电话线与输电线之间会产生有害的干扰,产生噪声,因此要设法改变线路和元器件的布局,以减小线路间的相互影响。

例 9

两个共轴圆线圈半径分别为 R 和 r,匝数分别为 N_1 和 N_2,两者相距为 d。设 r 很小,则小线圈所在处的磁场可视为均匀磁场。求它们的互感系数。

解 如图 16-25 所示,设半径为 R 的大线圈中有电流 I 流过,则在半径为 r 的小线圈中心处产生的磁场为

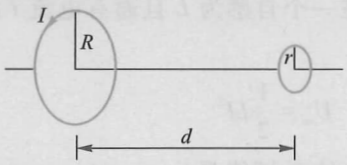


图 16-25 相距为 d 的两个同轴线圈的互感

$$B=N_1\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+d^2)^{3/2}}$$

通过小线圈的磁通匝链数为

$$\Psi_{21}=N_2BS_2=\frac{\mu_0\pi N_1N_2R^2r^2}{2(R^2+d^2)^{3/2}}I$$

因此互感为

$$M=\frac{\Psi_{21}}{I}=\frac{\mu_0\pi N_1N_2R^2r^2}{2(R^2+d^2)^{3/2}}$$

16-10 磁场的能量

电场具有能量,那么,磁场是否也具有能量呢?下面,我们通过磁场建立过程的功能关系,来回答这一问题。

我们研究图 16-21 所示的自感电路。在电源接通时,由于自感现象的存在,线圈中的电流逐步由零达到稳定值 I。在这段时间内,电路中的电流增大,因而有反方向的自感电动势 $\mathscr{E}_L$ 存在,电源不仅要供给电路中电阻产生焦耳热的能量,而且还要反抗自感电动势 $\mathscr{E}_L$ 做功。在 $\mathrm{d}t$ 时间内,电源反抗自感电动势所做的功为

$$\mathrm{d}W=-\mathscr{E}_L i\mathrm{d}t$$

式中 i 为电流的瞬时值,而自感电动势 $\mathscr{E}_L$ 为

$$\mathscr{E}_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

NOTE

因而有

$$dW = Lidi$$

在电流从零增加到稳定值 I 的过程中，线圈内逐步建立起磁场。在这整个过程中，电源反抗自感电动势所做的功为

$$W = \int dW = \int_0^I Lidi = \frac{1}{2}LI^2$$

这部分功是以能量的形式储存在线圈内的。当电源切断时，电流由稳定值 I 逐步减少到零，线圈中产生与电流方向相同的自感电动势，线圈中原已储存起来的能量通过自感电动势做功全部地释放出来。自感电动势在电流减少的整个过程中做的功为

$$W' = \int \mathscr{E}_L i dt = -\int_I^0 Lidi = \frac{1}{2}LI^2 \tag{16-21}$$

由于(16-21)式的功伴随着线圈周围空间原来存在着的磁场逐步消失，因此，做功所需的能量是磁场提供的，正是靠消耗这份能量才做功的。由此可见，在一个自感为 L 且通有电流 I 的线圈中储存的能量为

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 \tag{16-22}$$

这份能量即为电流所激发的磁场能量(magnetic energy)。很显然，在建立磁场的过程中，外界要提供能量，在磁场消失的过程中，这份能量又释放了出来。

现在我们用表征磁场本身的一些物理量来表示磁场的能量。为简单起见，以长直螺线管为例来进行讨论，于是有

$$L = \mu_0 \mu_r n^2 V, \quad B = \mu_0 \mu_r nI$$

因此(16-22)式磁场的能量可写成

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r n^2 V \left(\frac{B}{\mu_0 \mu_r n}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}V \tag{16-23}$$

上式中的 V 就是螺线管的体积。因为在长直螺线管内部，磁场是均匀的，故(16-23)式表明，长直螺线管中，磁场的能量与磁场所占的体积 V 成正比，因而单位体积内的磁能，即磁能密度(magnetic energy density)可表示为

$$u_m = \frac{U_m}{V} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} \tag{16-24}$$

利用关系式 $B = \mu_0 \mu_r H$，磁能密度也可改写成

$$u_m = \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r H^2 = \frac{1}{2}HB \tag{16-25}$$

对于不均匀磁场，空间各点的 B 和 H 不同，因而各点的磁能密度也不同，这时磁场的总能量应是磁能密度对体积的积分，即

$$U_m = \int_V u_m \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r H^2 \mathrm{d}V \qquad (16\text{-}27)$$

积分区域应遍及整个磁场空间。

例 10

在玻尔氢原子模型中，若电子绕原子核作圆周运动，轨道半径为 $R=5.3\times10^{-11}$ m，频率为 $\nu=6.8\times10^{15}$ 1/s，则此轨道中心的磁场能量密度为多大？

解 电子绕核的圆周运动可视为圆电流，其中心的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{\mu_0 e\nu}{2R}$$

$$=\frac{4\pi\times10^{-7}\times1.6\times10^{-19}\times6.8\times10^{15}}{2\times5.3\times10^{-11}}\ \mathrm{T}=13\ \mathrm{T}$$

故轨道中心的磁场能量密度为

$$u_m=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}=\frac{1}{2}\frac{(13)^2}{4\pi\times10^{-7}}\ \mathrm{J/m^3}$$

$$=6.7\times10^7\ \mathrm{J/m^3}$$

16-11 传感器

NOTE

传感器(sensor)是能感受规定的测量量并将其按一定规律转换成可用输出电信号的器件或装置。传感器的研制过程中，不仅需要结合物理学、化学、生物学、电子技术等多个学科的知识，而且需要一定的制造工艺。传感器的应用场合非常广泛和灵活，既可以用一种传感器测量一种或者多种参量(主要是非电学量)，也可以采用几种不同的传感器测量同一种非电学量。随着科学技术的高速发展，作为信息系统重要组成部分的传感器，起着越来越重要的作用。

传感器种类繁多，工作原理各不相同，组成结构千差万别，性能特点各有所长，应用领域纷繁复杂。传统的传感器主要包括电阻式传感器、电容式传感器、电感式传感器、压电式传感器、光电式传感器、热电式传感器和磁电式传感器等。现代传感器包括图像传感器、光纤传感器和半导体传感器等。当前不仅传感器自身成为信息检测技术的一个研究热点，而且它也对物理学和其他学科的发展提供了不可或缺的研究手段。

磁电式传感器又称磁电感应式传感器，它是利用电磁感应基

NOTE

本原理将诸如振动、位移、转速等非电的被测量转换成电信号的一种装置。根据法拉第电磁感应定律，无论何种原因使通过回路的磁通量发生变化，回路中产生的感应电动势与通过该回路的磁通量对时间的变化率的负值成正比。设 N 匝线圈被放置于恒定磁场内，穿过线圈每一匝的磁通量都为 Φ，则线圈内的感应电动势 $\mathscr{E}$ 与磁通量变化率 $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ 的关系为

$$\mathscr{E}=-N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

磁电式传感器的关键是让穿过线圈的磁通量发生变化，这可以利用线圈或磁场的运动来实现，也可以通过让磁场变化来获得。常用的方法之一是让线圈和磁铁之间产生相对运动，这种传感器称为动圈式磁电转换器，另一种方法是利用磁介质来改变空间的磁场分布，这种传感器称为磁阻式磁电转换器。

图 16-26 为动圈式磁电转换器的原理图。图 16-26(a)中磁铁不动，但是线圈作直线运动。设均匀磁场的磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$，当线圈在被测速度的作用下在直线上作往复运动，并在恒定磁场中切割磁感线，它产生的动生电动势为

$$\mathscr{E}=-NBl\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sin\theta=-NBlv\sin\theta$$

式中 N 为线圈的匝数，l 为线圈切割磁感线的等效长度，v 为线圈的瞬时速度，θ 为线圈运动方向与磁场方向的夹角。图 16-26(a)中，$\theta=90°$，则线圈的动生电动势可简化为

$$\mathscr{E}=NBLv$$

由上式可知，在恒定磁场中，线圈运动速度与线圈中的动生电动势成正比，这就是动圈式磁电转换器的测速原理。

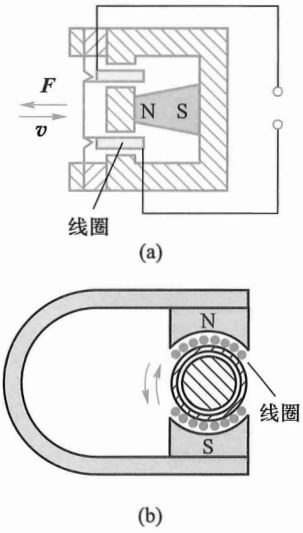


图 16-26 动圈式磁电转换器原理

图 16-26(b)的动圈式磁电转换器中磁铁不动，但是线圈作定轴转动，它可以测量物体转动的角速度。当线圈在磁场中转到某位置时，通过线圈的磁通量 $\Phi=NBS\cos\varphi$，其中 φ 为线圈平面法向与磁场的夹角，则动生电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=NBS\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=NBS\omega\sin\varphi$$

特别当 $\varphi=90°$时，动生电动势简化为

$$\mathscr{E}=NBS\omega$$

显然，由上式，最大动生电动势与角速度成正比。因此，由动生电动势可测出角速度。

磁阻式磁电转换器的工作原理有所不同，它的磁铁和线圈都不动，但是它利用磁介质的运动来改变空间的磁场分布，于是产生一个变化的磁场，从而改变通过线圈的磁通量，进而在线圈中

产生感生电动势。图 16-27(a) 所示为一种开磁路磁阻式磁电转换器,它由固定的永久磁铁、感应线圈、软铁所组成,安装在被测转轴上的齿轮可以与轴一起旋转。永久磁铁产生的磁感线通过软铁端部并对准齿轮的齿顶,当齿轮旋转时,齿的凹凸引起磁阻的变化,而使磁通量发生变化,因而在线圈中产生交变的感生电动势,变化的频率等于齿轮的齿数 z 和转速 n(r/min)的乘积,即

$$\nu=\frac{zn}{60}\ \text{Hz}$$

因此,当测得感生电动势的频率为 ν 时,可以计算出转速 n 为

$$n=\frac{60\nu}{z}\ \text{r/min}$$

图 16-27(b)所示为一种闭磁路磁阻式磁电转换器,由永久磁铁、转子、定子、线圈等组成,其基本原理与开磁路磁阻式磁电转换器类似,利用转子和定子之间的凹凸变化来改变气隙大小,从而来改变通过线圈磁通量,在线圈中产生交变感生电动势。

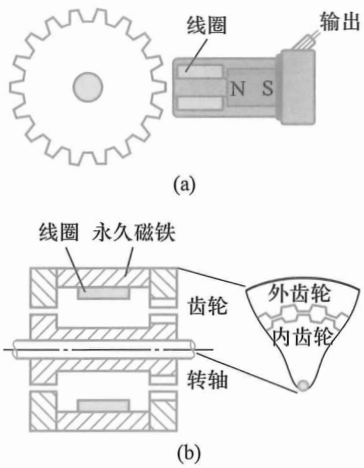


图 16-27 磁阻式磁电转换器

本章摘要

NOTE

1. 法拉第定律与楞次定律

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$$

感应电动势的方向由楞次定律得出,即感应电流的方向总是使感应电流所产生的通过回路的磁通量,去反抗引起感应电流的磁通量的变化。式中负号就表示“反抗”的意思。

2. 动生电动势

磁场不变,导体在磁场中运动而产生的感应电动势。

$$\mathscr{E}_{ab}=\int_b^a(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

交流发电机是动生电动势的典型例子。

3. 感生电动势、涡旋电场

导体不动,磁场变化引起的感应电动势:$\mathscr{E}=\oint_L\boldsymbol{E}_{旋}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$。

变化的磁场产生感应电场(或称为涡旋电场)。它是一个非

NOTE

保守力场。

4. 自感现象

自感电动势：$\mathscr{E}_L=-L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

自感：$L=\dfrac{\Psi}{I}$，其中 Ψ 称为线圈回路的磁通匝链数

5. *LR* 电路

电流不能突变。

电路接通时的电流：$I=\dfrac{\mathscr{E}}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})$

电路切断时的电流：$I=I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$

时间常量：$\tau=\dfrac{L}{R}$

6. 互感现象

互感电动势：$\mathscr{E}_{21}=-M\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$，　$\mathscr{E}_{12}=-M\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$

互感：$M=\dfrac{N_2\Phi_{21}}{I_1}$　或　$M=\dfrac{N_1\Phi_{12}}{I_2}$

7. 磁场的能量

自感为 L、通有电流 I 的线圈内的磁场能量：$U_{\mathrm{m}}=\dfrac{1}{2}LI^2$

磁场的能量密度：$u_{\mathrm{m}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{B^2}{\mu_0\mu_{\mathrm{r}}}=\dfrac{1}{2}\mu_0\mu_{\mathrm{r}}H^2=\dfrac{1}{2}HB$

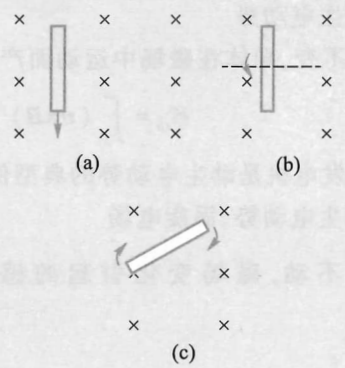
磁场的能量：$U_{\mathrm{m}}=\int_V u_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V=\int_V\dfrac{1}{2}\mu_0\mu_{\mathrm{r}}H^2\mathrm{d}V$

思考题

16-1　法拉第电磁感应定律告诉我们：当通过回路的磁通量发生变化时，回路中就要产生感应电动势。试问：有哪些方法能使通过回路的磁通量发生改变？

16-2　试分析动生电动势和感生电动势产生原因的异同点。

16-3　若一段有限长的导体棒在均匀磁场中作如图所示的运动，试分析它们能否产生感应电动势？方向如何？

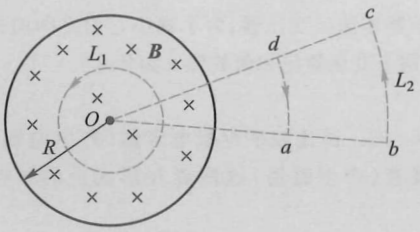


思考题 16-3 图

16-4 一半径为 R 的无限长圆柱内沿轴向充满均匀磁场 B，$\frac{dB}{dt}=K$（K 为常量）。如图所示，作两个闭合回路 L_1 和 L_2，其中 L_1 为一圆，L_2 为一扇形，试讨论以下问题：

（1）L_1 和 L_2 上每一点的 $\frac{dB}{dt}$ 是否为零？$E_{旋}$ 是否为零？$\oint_{L_1} E_{旋}\cdot d\boldsymbol{l}$ 与 $\oint_{L_2} E_{旋}\cdot d\boldsymbol{l}$ 是否为零？

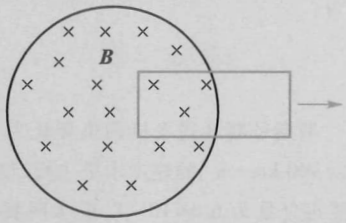
（2）若 L_1 和 L_2 均为导体回路，两回路内有无感应电流？



思考题 16-4 图

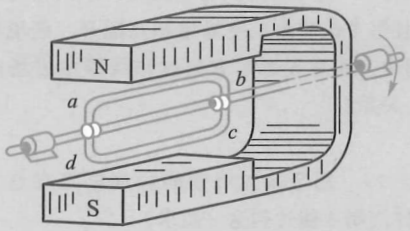
16-5 让一条形磁铁在一根很长的竖直铜管内下落，若不计空气阻力，试分析磁铁的整个运动情况。

16-6 如图所示，将一块薄铜片放在磁场中。如果我们将该铜片从磁场中拉出或推入，铜片均要受到阻力，试解释这种阻力的来源。



思考题 16-6 图

16-7 感应电动机的简单模型如图所示。当外面的磁铁按顺时针方向旋转时，闭合线圈也会在磁铁的空气隙中发生旋转。试解释线圈旋转的原因，并指出其旋转的方向。

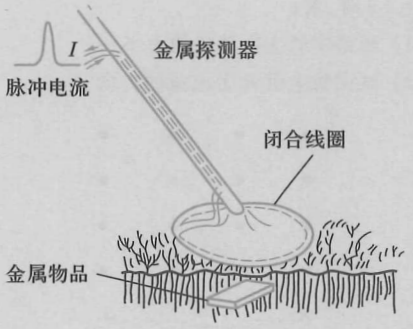


思考题 16-7 图

16-8 有两个形状完全相同的铜环和木环，使通过两环的磁通量的变化相等，问这两个环中的感应电动势和感应电场是否相同？

16-9 实验室中灵敏电流计的线圈始终处于永磁体的磁场中，当通入电流时线圈就发生偏转；切断电流后，线圈在回到原来的位置前总要来回摆动好几次。这时如果用导线将线圈的两端短路，则摆动立即停止，试问这是什么原因？

16-10 金属探测器的工作原理图如图所示。在金属探测器的探头内通入脉冲电流，利用地下金属物品发回的电磁信号，就能发现埋在地下的金属物品，试说明为什么金属物品能发回电磁信号。如果在探头内通入恒定电流，能否探测到地下的金属？



思考题 16-10 图

16-11 高频感应电炉常用来熔化金属，它的主要部件是一个铜制线圈，线圈中有一坩埚，坩埚中放有待熔的金属块。当线圈中通以高频电流时，坩埚中的金属被熔化，试分析这是什么道理？

16-12 变压器的铁芯总是用片状的铁片排列组成，而且每个铁片涂上绝缘漆相互隔开。请说明这样做的理由。铁片放置的方向应和线圈中磁场的方向有什么关系？

16-13 用金属丝绕制的标准电阻应是无自感的，怎样绕制才能达到这一要求？

16-14 如果你准备绕制一个自感较大的线圈，则应从哪些方面去考虑？

16-15 用双手各捏住变压器或电机线圈的两端，再用普通干电池接通，然后断开，如图所示。此时为什么人会有强烈的电击感觉？平时用电表来检查电机线圈是否断线时，应注意哪些事项？



思考题 16-15 图

16-16 如果电路中通有强电流，当突然打开刀闸断电时，就会有一个电火花跳过刀闸，这是为什么呢？

16-17 一般的交流收音机中都有一个输入电源变压器和输出变压器，为了减小它们之间的相互干扰，这两个变压器应如何放置？为什么？

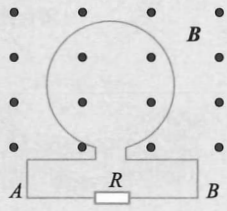
16-18 试比较平行板电容器（产生电场）与长直螺线管（产生磁场）这两者在形式上的所有相似之处。

习题

16-1 如图所示，圆形回路放在一均匀磁场中，磁场方向垂直于线圈平面向外。设通过该回路的磁通量对时间的函数关系式为 $\Phi_m = 6t^2 + 7t + 1$（SI 单位），则当 $t = 2$ s 时，求：

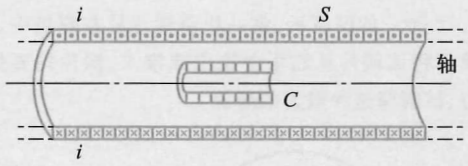
（1）回路中感应电动势的大小；

（2）试说明电阻 R 上电流的方向。



习题 16-1 图

16-2 如图所示，一长直螺线管单位长度上有线圈 2.2×10^5 匝。若每匝线圈上通有电流 $i = 1.5$ A；螺线管直径 $d = 3.2\times10^{-2}$ m，其中心处放有一个直径 $d_c = 2.1\times10^{-2}$ m 的密绕 130 匝的线圈 C。在 0.16 s 内，长螺线管中的电流从零均匀地增加到 1.5 A，试问长螺线管中的电流变化时，线圈 C 中产生的感应电动势多大？



习题 16-2 图

16-3 某型号喷气式飞机两机翼长为 47 m。如果此飞机以 960 km · h^{-1} 的速度水平飞行，设飞机所处地磁场的竖直分量为 6.0×10^{-5} T，试求两翼尖之间的感应电动势。

16-4 海洋工作者有时依靠地磁场产生的动生电动势探测海洋中水的流动速率。假设在海洋某处地磁场的竖直分量为 7.0×10^{-5} T，两个相距 2.0 m 的电极竖直插入被测的水流中，则当与两极相连的灵敏电压计指示电压为 7.0×10^{-5} V 时，水流速率为多少？

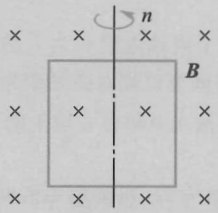
16-5 法拉第圆盘发电机是一个磁场中转动的导体圆盘。设圆盘的半径为 R，它的轴线与均匀外磁场 $\boldsymbol{B}$ 平行，圆盘以角速度 ω 绕轴线转动。已知 $R=15$ cm，$B=0.60$ T，转速 $n=30\ \mathrm{r\cdot s^{-1}}$，试计算盘边缘与盘心间的感应电动势。

16-6 如图所示，一边长为 0.05 m、由铜线做成的正方形线圈在磁感应强度 $B=0.84$ T 的均匀磁场中转动。线圈共有 10 匝，线圈绕中心轴的转速 $n=10\ \mathrm{r\cdot s^{-1}}$，转轴与 $\boldsymbol{B}$ 垂直。

(1) 试求从图示位置转过 30°时，线圈内的瞬时感应电动势。

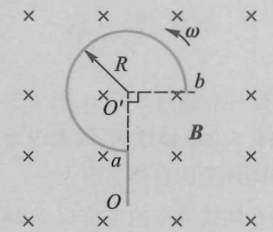
(2) 最大感应电动势为多少？这时线圈的位置如何？

(3) 由图示位置开始，经过 10 s 时线圈内的感应电动势。



习题 16-6 图

16-7 一导线被弯成如图所示的形状，放在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，圆弧 ab 为半径为 R 的 3/4 圆弧，$|Oa|=R$，若此导线以角速度 ω 绕通过 O 点并与磁场平行的轴逆时针匀速转动，求其中的动生电动势，其方向如何？

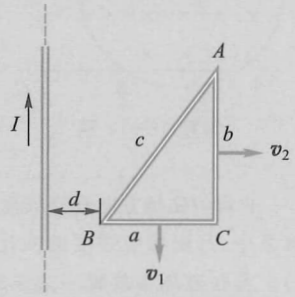


习题 16-7 图

16-8 如图所示，一恒定电流为 I 的长直导线与一直角三角形线圈 ABC 共面，AC 边与长直导线平行，其长为 b。初始时，B 点与长直导线的距离为 d，BC 边长为 a。求 t 时刻下列情况中线圈的感应电动势：

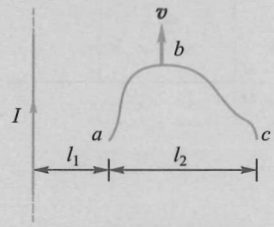
(1) 线圈以 $\boldsymbol{v}_1$ 平行于导线向下运动；

(2) 线圈以 $\boldsymbol{v}_2$ 垂直导线向右运动。



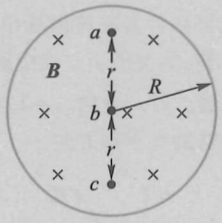
习题 16-8 图

16-9 如图所示，一无限长直导线中通有电流 I。在其右侧，有一根刚性导线 abc 以速度 $\boldsymbol{v}$ 平行于长直导线作匀速运动。若导线 abc 的近端离长直导线的距离为 l_1，求导线 abc 中的动生电动势。



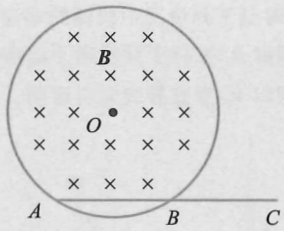
习题 16-9 图

16-10 如图所示，一个限制在半径为 R 的圆柱体内的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$，以 $0.01\ \mathrm{T\cdot s^{-1}}$ 的恒定速率减少，试计算在磁场中 a、b、c 各点处的电场，设 $r=0.05$ m。



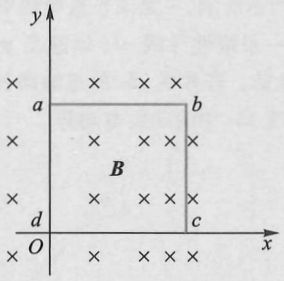
习题 16-10 图

16-11 在上题所述的磁场中放置长为 $2R$ 的金属棒，如图所示。若 $|AB|=|BC|=R$，设 $R=0.1$ m，求棒中的感生电动势。



习题 16-11 图

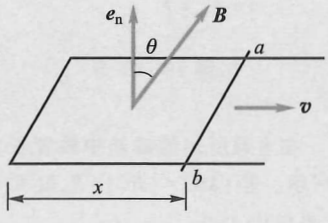
16-12 一非均匀磁场方向垂直纸面向里。在如图所示的坐标系中，其磁感应强度的变化规律为 $B=4t^2x$(SI 单位)。若在磁场中放置一边长为 2×10^{-3} m 的正方形线框 $abcd$，d 与原点 O 重合，试求当 $t=0.25$ s 时，线框中感应电动势的大小和方向。



习题 16-12 图

16-13 在交变磁场中有一半径为 r 的铝环，磁场的方向与环面垂直，磁感应强度 $B=B_m\cos(\omega t)$。若铝环的电阻为 R，忽略涡电流产生的磁场。求铝环中产生的涡电流以及时刻 t 涡电流的电功率。

16-14 一均匀磁场的磁感应强度为 $B=kt$($k>0$，为常量)；一导线回路放置在该磁场中，导线回路的法线 $\boldsymbol{e}_n$ 与 $\boldsymbol{B}$ 成 60°角，如图所示。设金属杆 ab 长为 l，且以速率 v 向右滑动。若 $t=0$ 时，$x=0$，求该导线回路任意时刻感应电动势的大小和方向。

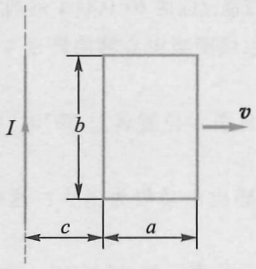


习题 16-14 图

16-15 如图所示，真空中的长直导线和矩形线圈在同一平面内。

(1) 当长直导线中通以电流 I，线圈以速度 $\boldsymbol{v}$ 向右运动时，求图示位置线圈中的感应电动势；

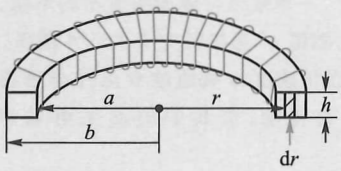
(2) 若线圈在图示位置不动，但长直导线中通有电流 $i=I_0e^{-\alpha t}$(I_0、α 为正常量)，求线圈中的感应电动势。



习题 16-15 图

16-16 一个同轴电缆长为 l，内、外圆筒半径分别为 R_1 和 R_2，中间充以相对磁导率为 μ_r 的磁介质，试用磁场能量的方法求其单位长度上的自感。

16-17 如图所示，横截面为矩形的环形螺线管，共绕有 1 000 匝，内半径 $a=0.05$ m，外半径 $b=0.1$ m，厚度 $h=0.01$ m，求其自感。



习题 16-17 图

16-18 有一半径为 0.02 m、长 0.3 m 的螺线管，上面均匀密绕有 1 200 匝线圈，线圈内为空气。问：

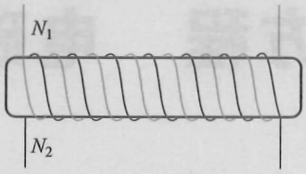
(1) 这个螺线管的自感为多大？

(2) 如果在螺线管中的电流以 3.0×10^2 A·s^{-1} 的速率改变，则在该线圈中产生的自感电动势为多大？

16-19 两个长度均为 l、横截面积均为 S 的同轴长直螺线管，匝数分别为 N_1 和 N_2，按如图所示的方式绕制。若管内充满相对磁导率为 μ_r 的磁介质，求：

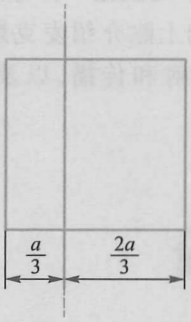
（1）两线圈之间的互感；

（2）两线圈自感与互感的关系。



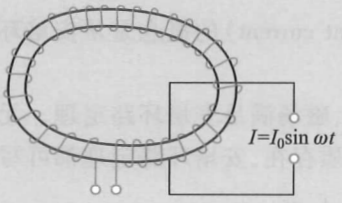
习题 16-19 图

16-20 一无限长的直导线和一正方形线圈按如图所示的位置放置（导线和线圈接触处绝缘），求线圈和导线间的互感。



习题 16-20 图

16-21 截面积为 S、单位长度上匝数为 n 的螺绕环上套有一个边长为 l 的正方形线圈，如图所示。今在正方形线圈中通以交变电流 $I=I_0\sin\omega t$，试求螺绕环中感应电动势的大小。



习题 16-21 图

16-22 把一个自感 $L=2$ H、电阻 $R=10\ \Omega$ 的线圈接到电动势 $\mathscr{E}=100$ V、内阻可忽略的电池上。

（1）求电流达到最大值时，线圈中所储存的磁场能量 $U_{m,max}$；

（2）从接通电路作为计时起点，要使线圈所储存的磁场能量达到 $U_{m,max}$ 的一半，需经过多长时间？

16-23 在一 LR 串联电路中，电流在 5.0 s 内达到稳定值的 1/3。

（1）试求此电路的时间常量 τ；

（2）要使该电路中的电流达到与稳定值仅差 0.1%，需经过几倍时间常量的时间？

16-24 （1）地磁场的磁感应强度 $B=5.0\times10^{-5}$ T，试问它的磁场能量密度为多大？

（2）假设在比地球半径小得多的距离中，磁感应强度较为恒定，并且忽略地磁极附近的磁场变化，试问从地球表面到表面上空 16 km 之间的球壳中储存了多少磁场能量？（$R_{地}=6\ 370$ km）

16-25 利用高磁导率的铁氧体材料（相对磁导率 $\mu_r=400$），可在实验室中产生 $B=0.5$ T 的强磁场。

（1）试求该磁场的能量密度 u_m；

（2）若要产生能量密度等于该值的电场，则电场强度 E 应为多大？这在实验中容易做到吗？

16-26 两根无限长平行直导线构成一电流回路，导线直径 $D=1$ mm，两导线中心相距 $d=1.0$ m，导线中电流 $I=1.0$ A。试求单位长度导线储存的磁场能量。（忽略导线内部的磁场能量）

习题答案

第十七章　麦克斯韦方程　电磁波

本章补充资源

麦克斯韦对电磁理论的主要贡献是提出了“涡旋电场”和“位移电流”两个假设，并预言了电磁波的存在。他总结了电磁场的规律，用简洁优美的数学语言将电磁场的全部性质概括成麦克斯韦方程。麦克斯韦电磁理论的主要结果是得到电磁波的传播速度与光速相等的结论，肯定了光波是一种电磁波。

本章在位移电流概念的基础上除介绍麦克斯韦电磁场理论外，还介绍了电磁波的产生、发射和传播，以及电磁波的基本性质。

17-1　位移电流

麦克斯韦(J.C.Maxwell)系统地总结了前人关于电磁理论的全部成就，并在此基础上加以发展，提出了“涡旋电场”和“位移电流”的假设，由此预言了电磁波(electromagnetic wave)的存在。关于涡旋电场及其实验验证已在第 16 章 16-5 节中讨论过了，现在介绍位移电流假设①。

位移电流(displacement current)的概念是从安培环路定理导出的。

在恒定电流的情况下，磁场满足安培环路定理。无论载流回路周围是真空还是有磁介质存在，安培环路定理都可写成

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I \tag{17-1}$$

式中 I 是穿过以闭合回路 L 为边界的任意曲面 S 的传导电流。

但是，在非恒定电流的情况下，安培环路定理就出现了困难。如前所述，电容器的充电或放电过程都是非恒定的过程，因为在此过程中导线内的传导电流将随时间变化，而且传导电流在电容器两极板之间的空间内中断了。如图 17-1 所示，在电容器的一

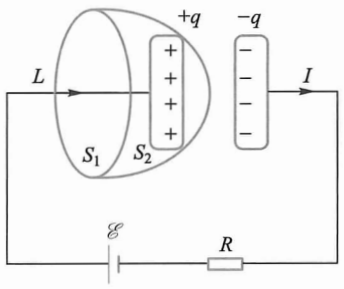


图 17-1　电容器充电时，曲面 S_1 中有电流流过，曲面 S_2 中没有电流流过

① 位移电流这个名词是由麦克斯韦首先提出的，由于历史的原因一直沿用至今。

NOTE

个极板周围取一闭合积分回路 L，并以它为边界作两曲面 S_1 和 S_2，前者与导线相交；后者通过电容器两极板之间的空间，不与导线相交。设某时刻通过导线的传导电流为 I，它穿过曲面 S_1 后，在电容器的极板上中断，故通过曲面 S_2 的传导电流为零。此时，通过以同一闭合曲线 L 所作的两个曲面上的传导电流不同。按理，同一时刻的磁场强度 H 沿同一闭合回路 L 的环流只能有一个值，现在却变成了两个：一个等于 I，一个为零。由此得出的结论是：在非恒定的情况下，(17-1)式不再是正确的。那么，在非恒定的情况下，原来的安培环路定理将作如何修正呢？它的普遍规律是什么呢？

其实在上面的讨论中，不仅暴露了矛盾，也提供了解决矛盾的线索。因为穿过 S_1 的电流 I 没有穿过 S_2，自由电荷就在电容器的极板上积累下来。根据电荷守恒定律，极板上积累的自由电荷 q 与 I 的关系为

$$I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

现考虑由 S_1 和 S_2 组成的一个闭合曲面 S。按照高斯定理，电位移通量为

$$\Phi_{\mathrm{d}}=\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=q$$

由于在导体内和平行板电容器外的空间内，$E=0$，$D=0$，所以通过 S_1 的电位移通量为零。这样，通过闭合曲面 S 的电位移通量就等于通过 S_2 的电位移通量，即

$$\Phi_{\mathrm{d}}=\int_{S_2} \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=q$$

于是可得到电路中的传导电流 I 为

$$I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_2}\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{17-2}$$

即电路中的传导电流 I 在量值上等于通过 S_2 的电位移通量的时间变化率$\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}$。麦克斯韦把$\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}$称为位移电流，并以 I_{d} 表示之。于是，在电容器极板上中断的传导电流 I 被位移电流 $I_{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}$接替下去，在形式上保持着电流的连续性，如图 17-2 所示。这样，就消除了引起矛盾的根源。

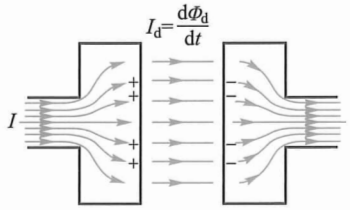


图 17-2 极板间的位移电流接替导线中的传导电流

所以，在非恒定电流的情况下，当同时考虑到有传导电流和位移电流穿过以闭合回路 L 为边界的任意曲面的情况时，安培环路定理应写为

NOTE

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I + \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} \tag{17-3}$$

这里电位移通量的法线方向与环路绕行方向成右手定则。安培环路定理的这个重要推广是由麦克斯韦做出的，这是一个极为重要的有巨大意义的贡献。

必须强调指出，位移电流纯粹是一种叫法，因为它并没有与之相应的实际电荷的定向运动。从本质上说，位移电流是随时间变化的电场，它和真实电流仅有一点是相同的，那就是位移电流的磁效应和同样大小的真实电流产生的磁效应是一样的。也就是说，电容器两极板间随时间变化的电场也要产生磁场。这一结论是普遍正确的，即变化的电场产生磁场。

凡是有随时间变化的电场的地方，都会有位移电流。在通有交变电流的导体里也会存在位移电流。但是在导体内部，与传导电流相比，位移电流通常总是小到可以忽略不计。前面我们曾提到导体中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 为零，这同样是一种近似。因为可以证明，由于导体的电导率（$\sigma = 1/\rho$）较大，所以一般说来，导体内的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 都远比两极板间的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 小，故通过曲面 S_1 的电位移通量可忽略不计，从而忽略了导体中的位移电流。

类比于传导电流，同样可引进位移电流密度的概念，用 j_{d} 表示。根据

$$I_{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

和电流密度的定义式

$$I_{\mathrm{d}} = \int_S \boldsymbol{j}_{\mathrm{d}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

得

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t} \tag{17-4}$$

即变化电场中某点的位移电流密度等于该点电位移对时间的变化率。

麦克斯韦把通过空间任意截面的传导电流和位移电流之和称为通过该截面的全电流，即

$$I_{\text{全}} = I + I_{\mathrm{d}} \tag{17-5}$$

全电流永远是连续的，不会中断的。有了全电流的概念后，(17-3)式可写成

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_{\text{全}}$$

例 1

一个平行板电容器由半径 $R=0.1$ m 的两块圆形平板组成，两板间距 $d \ll R$，如图 17-3 所示。假定电容器以均匀速率充电，因而极板间的电场以恒定的变化率 $\frac{dE}{dt}=10^{13}$ V/(m·s)变化。试求电容器两极板间的位移电流；导出平行于极板方向、与电容器中心距离为 r 处的 P 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小的表达式，并计算 $r=R$ 处 $\boldsymbol{B}$ 的数值。

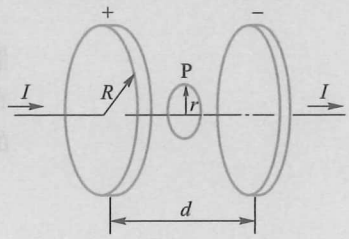


图 17-3 圆形平行板电容器

解 由于 $d \ll R$，故可认为两板间的电场均匀，边缘效应可忽略。由位移电流的定义可得

$$I_d=\frac{d\Phi_d}{dt}=\varepsilon_0\frac{dE}{dt}\pi R^2$$
$$=8.85\times10^{-12}\times10^{13}\times3.14\times(0.1)^2\ \text{A}$$
$$=2.78\ \text{A}$$

因为两板间无传导电流，所以两板间的全电流 $I_{全}=2.78$ A。

由于两板间位移电流的分布对中心轴线是对称的，所以它激发的磁场也是轴对称的。与中心轴线距离为 r 处，$\boldsymbol{B}$ 的大小相等。由普遍的安培环路定理可得

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\frac{d\Phi_d}{dt}$$

当 $r<R$ 时

$$H\cdot 2\pi r=\varepsilon_0\frac{dE}{dt}\pi r^2$$

$$H=\frac{\varepsilon_0}{2}r\frac{dE}{dt}$$

$$B=\mu_0 H=\frac{\varepsilon_0\mu_0}{2}r\frac{dE}{dt}$$

当 $r>R$ 时

$$H\cdot 2\pi r=\varepsilon_0\frac{dE}{dt}\pi R^2$$

$$H=\frac{\varepsilon_0 R^2}{2r}\frac{dE}{dt}$$

$$B=\mu_0 H=\frac{\varepsilon_0\mu_0}{2}\frac{R^2}{r}\frac{dE}{dt}$$

在 $r=R$ 处，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的数值为

$$B=\frac{\varepsilon_0\mu_0}{2}R\frac{dE}{dt}$$
$$=\frac{8.85\times10^{-12}\times4\pi\times10^{-7}}{2}\times0.1\times10^{13}\ \text{T}$$
$$=5.56\times10^{-6}\ \text{T}$$

17-2 麦克斯韦方程

位移电流的发现为麦克斯韦创立电现象和磁现象的统一理论打下了基础。这个理论能够解释当时所知道的一切实验事实并能预言一系列新现象，并在以后得到了证实。麦克斯

NOTE

韦理论的主要结果预言了以光速传播的电磁波的存在。关于电磁波的性质所进行的理论研究则使麦克斯韦得以创立光的电磁理论。

麦克斯韦总结电磁场的规律,除提出涡旋电场和位移电流的假设外,还推广了电学中的高斯定理,得出了磁学中的高斯定理在非恒定情况下仍成立的结论,并由此得到了适用于普遍情况下的麦克斯韦方程(Maxwell's equations)。

(1) 电学的高斯定理——麦克斯韦第一方程:

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_i q_i \tag{17-6}$$

它表明:在任何电场中,通过任何闭合曲面的电位移通量等于该闭合曲面内自由电荷的代数和。

(2) 磁学的高斯定理——麦克斯韦第二方程:

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{17-7}$$

它表明:在任何磁场中,通过任何闭合曲面的磁通量为零。

(3) 法拉第电磁感应定律——麦克斯韦第三方程:

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} \tag{17-8}$$

它表明:在任何电场中,电场强度沿任意闭合回路的线积分等于该回路中磁通量对时间的变化率的负值。

(4) 普遍的安培环路定理——麦克斯韦第四方程:

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I + \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} \tag{17-9}$$

它表明:在任何磁场中,磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿任意闭合回路的线积分等于通过回路的全电流。以上便是麦克斯韦方程的积分形式。

电磁理论的基础是麦克斯韦方程。麦克斯韦方程与电磁学的关系如同牛顿运动定律与经典力学的关系一样。麦克斯韦方程还推动了狭义相对论的诞生。在物体速度接近光速时,牛顿运动定律必须作较大的修改。然而,麦克斯韦方程却一点也不需要修改。

麦克斯韦方程的应用范围十分惊人,它适用于电机、广播、电视、通信、回旋加速器以及微波雷达等电磁设备。

在麦克斯韦预言电磁波存在的 20 多年之后,赫兹(H.R. Hertz)在实验室中形成了电磁波,并证实了电磁波具有麦克斯韦所预言的性质。

17-3 电磁波

1. 电磁波的产生

电磁波的产生，首先要有适当的波源——一个产生电磁振荡的源。所谓电磁振荡就是电路中电荷和电流随时间作周期性变化；产生电磁振荡最简单的电路是 LC 振荡（LC oscillator）电路，它由一个电容器与一个自感线圈串联而成，如图 17-4 所示。

假如把已充电的电容器 C 与自感线圈 L 相连接，电容器将通过自感线圈放电，电流将在自感线圈内激发磁场。根据法拉第电磁感应定律，自感线圈中将产生自感电动势来反抗电流的增大，因此在电容器放电过程中，电容器两极板上的电荷量逐渐减少，电路中的电流 I 逐渐增加，直到电容器两极板上的电荷全部消失，电路中电流达到最大值。根据能量守恒定律，这时电容器中的电场能量全部转化为线圈内的磁场能量[图 17-4(a)]。

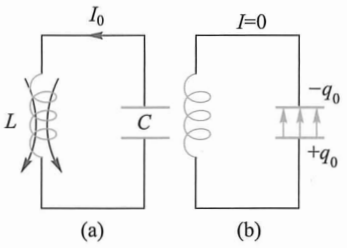


图 17-4 LC 振荡电路

NOTE

当电容器极板上电荷 $q=0$ 时，电流并不立即为零，而是逐渐减小并沿原方向继续流动，使电容器作反方向充电。这是由于在电流减小的过程中，自感线圈中激起的自感电动势和电流方向相同，从而维持了电流的继续流动。随着电容器两极板上的电荷逐渐增大，电流逐渐减小，直到电路中电流为零，极板上电荷达到最大值，这时磁场能量又全部转化成电场的能量[图 17-4(b)]。如此重复循环，直到回到原始状态，从而完成了一个完全的电磁振荡过程。之后又重复上述一系列的过程。

在上述过程中，如果电路中没有电阻，也不产生辐射，则由能量守恒定律，其总能量不变，即

$$U=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}LI^2=\text{常量}$$

式中 q 为某一时刻电容器极板上的电荷，I 为该时刻电路中的电流。对上式求导，并考虑到 $I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，并令 $\omega^2=\frac{1}{LC}$，整理后可得

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2q=0$$

这是无阻尼自由振荡的微分方程，其解为

$$q=q_0\cos(\omega t+\varphi) \tag{17-10}$$

NOTE

对时间求导数后得

$$I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-q_0\omega\sin(\omega t+\varphi)=I_0\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \quad (17-11)$$

(17-10)式和(17-11)式说明:LC 振荡电路中的电荷 q 与电流 I 都随时间作周期性变化,不断地产生电磁振荡。设 T 和 ν 分别为无阻尼自由电磁振荡的周期和频率,则有

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{2\pi}{T}$$

于是得

$$T=2\pi\sqrt{LC},\quad \nu=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (17-12)$$

可见,振荡周期和频率仅由电路本身的性质 L 和 C 决定。

上述 LC 电磁振荡仅为理想的情况。由于热损耗和电磁辐射,振荡时电荷和电流的振幅都会随时间逐渐减小,这种振荡称为阻尼振荡。如果在电路中另有一个周期性变化的电动势不断地供给能量,以补偿由于阻尼而引起的能量损耗,这种振荡则称为受迫振荡。当外加电动势的频率等于电路中无阻尼自由振荡的频率时,电流振幅达到最大值,这种现象称为电共振,由(17-12)式可以看出,通过调节电容器的电容能够达到电共振,这称为调谐。收音机中的调谐作用就是电共振现象的一种实际应用。

以上分析说明,LC 振荡电路能够产生电磁波,可作为电磁波的振源。

2. 电磁波的发射

LC 振荡电路虽然可以作为发射电磁波的振源,但要有效地把电路中的电磁能辐射出去,除了电路中必须不断地补充能量之外,还必须具备以下条件:

(1) 频率必须特别高。可以证明,电磁波在单位时间内辐射的能量与频率的四次方成正比。因此,只有振荡电路中的固有频率(即无阻尼自由振荡频率)很高时,才能有效地把电磁波能量辐射出去。而(17-12)式表明,固有频率为 $\nu=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$,要加大固有频率 ν,就必须减小电路中的 L 和 C 的值。

(2) 电路必须开放。LC 振荡电路中,电场和电能都集中在电容器中,磁场和磁能都集中在自感线圈中。为了把电磁场和电

磁能拓宽和发射到更大的空间，必须对电路中的元件 L 和 C 加以改造。

为此，我们设想把 LC 振荡电路按图 17-5 所示的顺序逐步进行改造。改造的方法是使电容器的极板面积越来越小，间隔越来越大；而使自感线圈的匝数越来越少，且把各匝拉开直至成一条直线。于是，根据平行板电容器公式 $C=\varepsilon_0 S/d$ 和自感线圈公式 $L=\mu_0 n^2 V=\mu_0 N^2 S/l$ 可知，这一方法可以使 L 和 C 的数值越来越小，从而提高固有频率 ν。而随着电路越来越开放，电场和磁场分布到周围更大的空间中，最后振荡电路完全演化成一根直导线。如图 17-5(d)所示，此时，电路两端出现正负交替的等量异号电荷，它相当于电偶极矩为 $p=ql$ 的大小和方向迅速变化的振荡偶极子。如此，它已适合作为有效发射电磁波的振源了。1888 年，赫兹用这种偶极子做了许多实验，证实了振荡偶极子能够发射电磁波；同时，还证明了电磁波与光波一样，能产生反射、折射等现象。目前实际中的广播电台和电视台的天线，都可看成是这类振荡偶极子的应用。

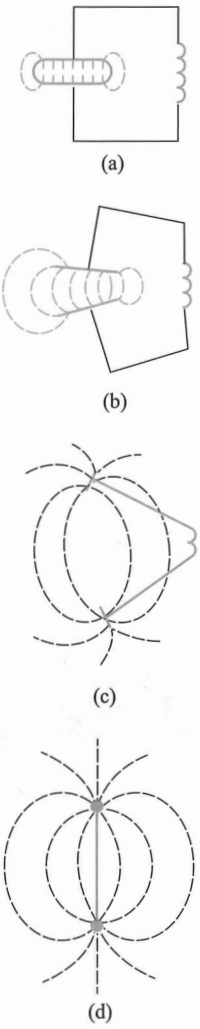


图 17-5 把 LC 振荡电路改造成振荡偶极子

3. 电磁波的传播

我们知道，波是振动在空间的传播。对于机械波，必须有传播振动的介质。例如，在真空中就不能传播声波。但是电磁波在真空中能够传播，例如发射到大气层外宇宙空间的卫星或飞船可以把无线电信号发回地球，太阳光和无线电的辐射也可以通过真空到达地球。为什么电磁波的传播不像机械波那样需要介质呢？下面我们来具体分析这个问题。

电磁波能够在空间传播，靠的是麦克斯韦的两条基本假设：一是变化的磁场激发涡旋电场，二是变化的电场激发涡旋磁场。

如图 17-6 所示，我们设想在空间某处有一个电磁振荡源。因此，有交变电场的存在，它在自己周围激发交变的涡旋磁场，而这个交变的磁场又在自己周围激发涡旋电场。交变的涡旋电场和涡旋磁场相互激发，闭合的电场线和磁感线就像链条的环节一样一个个地套连下去，在空间传播开来，形成电磁波。实际上电磁振荡是沿各个不同方向传播的，这里只是电磁振荡在某一直线上传播过程的示意图，并非真实的电场线和磁感线的分布图。

NOTE

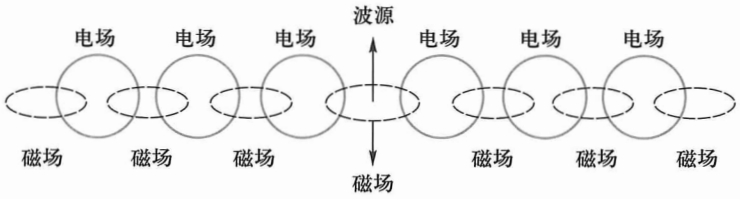


图 17-6 电磁振荡传播机理示意图

可以想象，一个振荡偶极子周围产生的电场和磁场是十分复杂的。电磁波产生之后，就脱离了振荡偶极子，因此，是变化的电场和变化的磁场的相互激发保证了电磁波的传播，就像“鸡生蛋，蛋生鸡”一直循环下去一样。如果在变化电场和变化磁场中，不存在能量损耗，这样的过程就会永远进行下去，而实际上这是不可能的。

4. 电磁波的性质

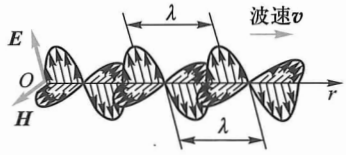


图 17-7 平面电磁波

NOTE

振荡电偶极子辐射的电磁波在距离 r 足够大时是球面波，这时波的振幅与距离 r 成反比。但在远离振荡电偶极子的空间，电磁波可看成平面波，如图 17-7 所示。下面我们简单介绍在自由空间传播的电磁波的一些普遍性质。

（1）电磁波是横波。电磁波振动的电矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁矢量 $\boldsymbol{H}$ 都与传播方向垂直。

（2）电矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁矢量 $\boldsymbol{H}$ 相互垂直，即

$$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$$

（3）任何给定点上的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都在作周期性变化，两者相位相同。

（4）$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的量值成比例。

设 E 和 H 表示 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的量值，理论计算表明，E 和 H 有如下比例关系：

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r}E=\sqrt{\mu_0\mu_r}H \tag{17-13}$$

同样可得，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的振幅 E_0 和 H_0 也有相同的比例关系，即

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r}E_0=\sqrt{\mu_0\mu_r}H_0 \tag{17-14}$$

（5）电磁波的传播速度。理论计算表明，电磁波的传播速度为

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}} \tag{17-15}$$

在真空中，$\varepsilon_r=\mu_r=1$，电磁波的速度为

NOTE

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=3.0\times10^8\ \mathrm{m/s} \tag{17-16}$$

这一结果与实验中测得的真空中的光速恰好相等，因此可以肯定光波是一种电磁波。

（6）振荡电偶极子辐射的电磁波频率等于振荡电偶极子的振动频率，E 和 H 的量值和频率的平方成正比，即

$$\begin{cases} E=\dfrac{\omega^2 p_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r v^2 r}\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{r}{v}\right)\right] \\ H=\dfrac{\omega^2 p_0\sin\theta}{4\pi v r}\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{r}{v}\right)\right] \end{cases} \tag{17-17}$$

式中，p_0 为振荡偶极子电偶极矩振幅，ω 为角频率，v 为电磁波的传播速度，r 为径矢的大小，θ 为径矢 $\boldsymbol{r}$ 与电偶极子轴线间的夹角。

5. 电磁波的能量

电磁波的传播就是变化的电磁场的传播。由于电磁场具有能量，所以电磁波也携带能量。电磁波携带的电磁能量称为辐射能。

如前所述，电场和磁场的能量体密度分别为

$$u_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2,\qquad u_m=\frac{1}{2}\mu_0\mu_r H^2$$

因而电磁场的总能量密度为

$$u=u_e+u_m=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2+\frac{1}{2}\mu_0\mu_r H^2$$

由于上述能量是 E 和 H 的函数，所以辐射能的传播方向就是电磁波的传播方向，其传播速度即为电磁波的传播速度。设 $\mathrm{d}A$ 为垂直于电磁波传播方向的截面积，在介质不吸收电磁能量的情况下，在 $\mathrm{d}t$ 时间内通过 $\mathrm{d}A$ 面积的辐射能量为 $u\mathrm{d}A v\mathrm{d}t$。设 S 表示在单位时间内通过垂直于传播方向上单位面积的辐射能，则

$$S=\frac{u\mathrm{d}A v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}A\mathrm{d}t}=uv=\frac{v}{2}(\varepsilon_0\varepsilon_r E^2+\mu_0\mu_r H^2)$$

把 $v=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}$ 和 $\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r}E=\sqrt{\mu_0\mu_r}H$ 代入上式得

$$S=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}(\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r}E\sqrt{\mu_0\mu_r}H+\sqrt{\mu_0\mu_r}H\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r}E)=EH \tag{17-18}$$

NOTE

由于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 互相垂直，又和传播方向垂直，故(17-18)式可用矢量形式表示为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{17-19}$$

式中 $\boldsymbol{S}$ 的方向就是电磁波的传播方向。$\boldsymbol{S}$ 是电磁波的能流密度矢量，称为坡印廷矢量(Poynting vector)。

电磁波中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都随时间迅速变化。在实际中重要的是平均能流密度，即它在一个周期内的平均值。对于简谐波，平均能流密度为

$$\overline{S}=\frac{1}{2}E_0H_0 \tag{17-20}$$

式中 E_0 和 H_0 是 E 和 H 的振幅。

坡印廷矢量的概念不仅适用于迅速变化的电磁场，也适用于恒定场。

例 2

在真空中有一个平面电磁波的电场强度的最大值为 $E_0=1\times10^{-4}$ V/m，则该电磁波的磁场强度的振幅 H_0 是多少？

解 由电磁波的性质得 $\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r}E_0=\sqrt{\mu_0\mu_r}H_0$，真空中

$$\sqrt{\varepsilon_0}E_0=\sqrt{\mu_0}H_0$$

$$H_0=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0=\sqrt{\frac{8.85\times10^{-12}}{4\pi\times10^{-7}}}\times1\times10^{-4}\ \text{A/m}$$
$$=2.65\times10^{-7}\ \text{A/m}$$

例 3

一广播电台的平均辐射功率为 $P=10$ kW，假定辐射出来的能流均匀地分布在以电台为中心的半个球面上。求在距离电台 $r=10^4$ m 处坡印廷矢量的平均值。若该处的电磁波可看成平面电磁波，再求该处电场强度的振幅。

解 坡印廷矢量的平均值为

$$\overline{S}=\frac{P}{2\pi r^2}=\frac{10^4}{2\times3.14\times(10^4)^2}\ \text{W/m}^2$$
$$=1.6\times10^{-5}\ \text{W/m}^2$$

因为 $\overline{S}=\frac{1}{2}E_0H_0$，真空中 $\sqrt{\varepsilon_0}E_0=\sqrt{\mu_0}H_0$，故

$$\overline{S}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2$$

$$E_0=\left(2\overline{S}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\right)^{1/2}$$

$$=\left(2\times1.6\times10^{-5}\times\sqrt{\frac{4\pi\times10^{-7}}{8.85\times10^{-12}}}\right)^{1/2}\ \text{V/m}$$
$$=0.11\ \text{V/m}$$

17-4 电磁波谱

所有电磁波都具有相同的性质和速度，它们的差别仅在于频率不同（因而波长不同），因此可以按照它们的频率（或波长）的次序排列成谱，称为电磁波谱（electromagnetic spectrum）。如图17-8所示为我们现在所知道的电磁波谱的范围。电磁波谱中各个区域的命名是根据产生和检测该区域中的波的实验方法来确定的。对于调幅（AM）波段和调频与电视（FM-TV）波段，其频率范围由法律规定，其划分十分明确。

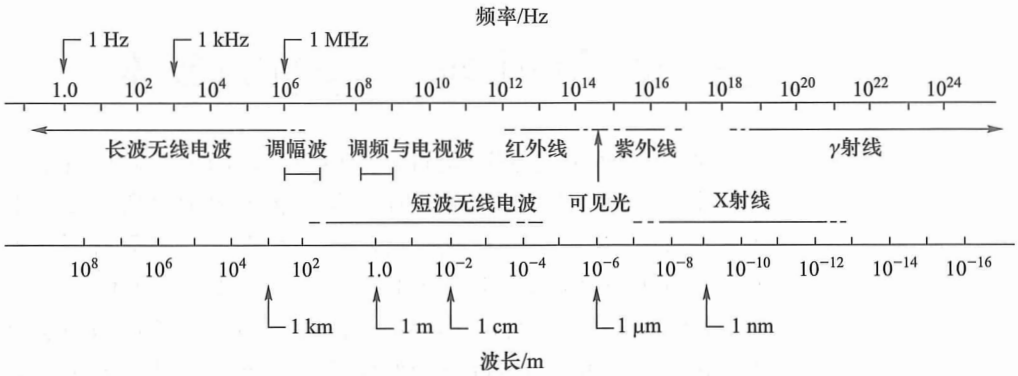


图 17-8 电磁波谱（图中频率和波长均用对数标度）

NOTE

电磁波谱中各波段的波的产生方法各不相同。无线电波由振荡电路产生，波长范围从0.001~30 000 m；红外线波段的波长范围从零点几厘米到760 nm；可见光的波长范围从400~760 nm；紫外线的波长从5~400 nm。红外线和紫外线是人眼感受不到的，只能用仪器探测。红外线、可见光和紫外线可由原子或分子激发态跃迁产生。

X射线可以由原子内层电子跃迁产生，也可通过用高速电子流轰击金属靶得到，其波长范围为10^{-13} m至10^{-7} m。

γ射线是因原子核内部衰变发出的一种波长极短的电磁波，其波长范围为10^{-10} m至10^{-9}m。

此外，宇宙中还存在其他产生机制不同、不同波段的电磁波，如同步辐射可以产生各种频率的电磁波。

太阳是我们的主要电磁辐射源，而人类也在地球上创造了许多电磁辐射源。无线电波和从雷达系统、微波炉、电话系统等装置辐射出来的微波都可能对人类的健康产生影响。

17-5 短距离无线通信技术

NOTE

无线通信(wireless communication)是利用电磁波信号在自由空间中的传播特性进行信息交换的一种通信方式。互联网技术的发展推动了无线通信技术与互联网的有机融合,互联网技术也逐渐渗透于人们的日常生活中,成为人们生活中不可或缺的重要组成部分。短距离无线通信就是距离在几百米以内的通信活动,它具有成本低、传输速率快等优点。目前,常用的短距离无线通信技术主要有以下六类。

1. Wi-Fi(wireless fideliry)技术

Wi-Fi 又称无线宽带,是目前应用最广泛的无线通信技术之一。作为一种无线联网技术,Wi-Fi 早已被数码业界所关注。手机、台式计算机、笔记本电脑、平板电视、数码相机、投影机等众多产品都可成为 Wi-Fi 终端。2019 年发布的 IEEF 802.11ax 标准(简称 Wi-Fi 6)属于双频 2.4 GHz 和 5 GHz 技术,不仅物理层提供高达4 800 Mbps 的吞吐量和低延迟,使数据传输速率有了很大的提高,而且支持智能分频技术,实现了高并发,能够连接更多的设备,进一步提高了通信质量和效率。目前,家庭、企业以及公众热点区域可常见到 Wi-Fi 技术的身影,逐渐成为当前智能家居中的核心技术。

Wi-Fi 技术的缺点:(1) 信号覆盖范围有限,尤其遇到建筑物等物理障碍时表现更加明显,导致信号覆盖不稳定。(2) 安全性较低,容易受到攻击。(3) 功耗较大,不利于电池供电的设备工作。(4) 虽然 Wi-Fi 6 已经支持高并发,但其所能容纳的终端设备仍然有限。

2. 蓝牙(bluetooth)技术

作为目前最流行的无线通信技术之一,蓝牙技术可以选择 2.4~2.5 GHz 的合适频率进行信息传送。为了确保传输数据的保密性,蓝牙技术一般必须遵守 802.15.1 协议,目前最新的标准是蓝牙协议 5.3,可提供 1 Mbps 的传输率和 10 m 的传输距离。在数据传送之前,蓝牙还需要进行认证、加密、连接等环节,以保

证安全可靠的蓝牙连接，同时也保证了安全可靠的信息传送和接收通道。

NOTE

蓝牙技术的优点：(1)功耗很低，适合用电池供电的设备，如蓝牙耳机、智能手表等。(2)无线连接，使用方便，设备之间可以随时随地进行数据传输。(3)用加密和认证等多种安全措施来保护用户数据和网络安全，安全性好。(4)是全球性的一种通信标准，受到几乎所有智能设备的支持，设备的兼容性好。

蓝牙技术的缺点：(1)传输速度较慢，最高速度仅达几十Mbps，无法满足大数据传输的需求。(2)信号覆盖范围小，一般只能达到 10 m 左右。(3)容易受到其余诸如 Wi-Fi 信号和其他蓝牙设备的无线信号干扰。(4)仅支持 7 个左右设备的连接，连接数量有限，无法满足大量设备连接的需求。

3. 紫蜂(zigbee)技术

紫蜂技术具有低延时、低频率、低耗能、低成本、高网络容量的特征，适用于短距离、低速率的信息传输，操作便利，是一种新型的无线通信技术，广泛应用于价格低廉的通信及电子移动设备之中。紫蜂技术高效的定位性能可同时作用于多设备，广泛应用于自动控制以及远程操作系统当中。

紫蜂技术工作在 2.4 GHz 频段，使用跳频技术，最高速率为 250 kbps，但当传输速率降低到 28 kbps 时，传输范围可以扩展到 134 m，可以获得更高的可靠性。除此之外，它还可以连接到 254 个节点，对网络，游戏、家电、设备和家庭自动化应用程序的支持更好。因此紫蜂技术的主要用于需要网络进行分布式管控的领域，如家电管控、门禁系统等。

紫蜂技术的优点：(1)可以采用星状、片状或网状的网络结构，最多可以构建 65 535 个节点的大型网络，容量大。(2)使用 AES-128 加密算法实现数据完整性检查和身份验证功能，安全性高。(3)功耗低，一般在待机状态下，两节 5 号干电池的设备可以使用 6 至 24 个月。

紫蜂技术的缺点：(1)传输距离短，室内环境下，传输距离为 10～100 m，室外环境下传输距离更短。(2)传输速率低，最高传输速率仅为 250 kbps。(3)通信协议复杂，应用程序的开发者需要全面深入地了解通信协议细节和网络拓扑结构等方面的知识。

NOTE

4. 红外通信(infrared data association,IrDA)技术

红外通信技术通过红外波段实现短程点对点的通信,波长在850~900 nm范围内性能最优。其传输速率最高可达16 Mbps,传输距离最远可至10 m,硬件技术和应用软件均已相当成熟,广泛应用于智能手机、平板电脑等便捷小巧的电子装置。软件上红外通信技术包含物理层规范、连接建立协议、连接管理协议在内的3种基本规范协议。硬件上则通过控制电路对逻辑设备所选择的数字信号进行调制和解调,从而实现对终端的无线控制。

红外通信技术的优点:(1)不需要申请频率的使用权,总体成本低廉。(2)设备体积小、功耗低、连接方便、简单易用,适合于移动通信。(3)数据传输率较高,适于大容量文件和多媒体数据的传输。(4)红外线的辐射角度较小,数据传输的保密性和安全性高。

红外通信技术的缺点:它是一种视距传输,两台相互对准的通信设备之间不能有其他物体的阻隔,故只能用于两台设备之间点对点的通信,因此一般也无法应用在工业网络中。

5. 近场通信(near field communication,NFC)技术

射频识别技术(RFID)或电子标签技术是目前最先进的自动识别技术之一。它通过接收无线电信号频率来实现对目标的分析和识别,从而获得目标信息的传输数据。

近场通信技术是一种新的近距离无线通信技术,它采用幅移键控(ASK)调制方式,工作频率为13.56 MHz,由13.56 MHz的射频识别技术发展而来,工作距离约为20 cm。在物理层面来看,近场通信技术与射频识别技术似乎很相似,但本质上它们属于两种完全不同的技术范畴。射频识别技术只是一种自动识别技术,而近场通信技术则通过一种近距离的连接协议,实现双向识别和连接,提供各种设备间轻松、安全、迅速而自动的通信,因此它隶属于通信技术。

近场通信技术的优点:它不仅成本低廉、方便易用、更富直观性,而且距离近、带宽高、能耗低、抗干扰强,兼容非接触智能卡技术,在门禁、公交卡、手机支付等领域有着广阔的应用前景。

近场通信技术的缺点:(1)需要有大量的硬件设备来支持。(2)数据传输速度相对较慢。(3)存在兼容性问题,并不是所有的设备都支持近场通信技术,在与其他设备进行通信时可能会遇到不兼容的问题。

NOTE

6. 超宽带(ultra wideband, UWB)技术

超宽带技术是一种不使用载波的通信技术,它直接利用纳秒至微秒级的窄脉冲而不是正弦波的载波来传输数据。超宽带技术的工作频段范围从 3.1 GHz 到 10.6 GHz,最小工作频宽为 500 MHz。因为它以 1 GHz 以上带宽的频谱资源实现极低功率信号的传送,因此能在 10 m 左右的距离内达到数百 Mb/s 至数 Gb/s的数据传送速率。超宽带技术通信采用调时序列,对信道衰落敏感度较差。因为不需要载波,超宽带技术所需要的射频和微波器件很少,也弥补了传统无线接收与发射技术的过程中需要对信号载波调制解调的缺陷,降低系统的复杂程度。

超宽带技术的优点:系统复杂度低,传输速率高,发送信号功率谱密度低,对信道衰落不敏感,拦截能力低,抗干扰性能强、定位精度高、功耗小、保密性强。

超宽带技术的缺点:由于超宽带系统占用的带宽很高,一者频率资源的利用率不高,二者可能会对其他的无线通信系统产生干扰。而且通信距离比较短、波束指向性比较强,只能用于比较特殊的场合。

随着通信技术的迅猛发展,短距离无线通信技术种类越来越多,但不同类型技术都存在各自的优缺点,若能将它们融合,整合各种技术各自的优势,拓展它们运用空间,将为信息化时代的发展创造良好的条件。

本章摘要

1. 位移电流 $I_d=\dfrac{d\Phi_d}{dt}=\dfrac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}$

位移电流密度 $\boldsymbol{j}_d=\dfrac{d\boldsymbol{D}}{dt}$

NOTE

2. 麦克斯韦方程

(1) $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_i q_i$，电学的高斯定理。

(2) $\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$，磁学的高斯定理。

(3) $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$，法拉第电磁感应定律。

(4) $\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I+\frac{\mathrm{d}\Phi_d}{\mathrm{d}t}$，普遍的安培环路定理。

3. 电磁波

LC 电路是产生电磁振荡的振源。

无阻尼自由电磁振荡的周期和频率：$T=2\pi\sqrt{LC}$，$\nu=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$。

电磁波发射的必备条件：

(1) 频率特别高；

(2) 电路开放；

电磁波的传播不需要介质，主要靠交变的涡旋电场和交变的涡旋磁场相互激发。

电磁波的性质：横波、传播速度等。

电磁波的能量：能流密度矢量——坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$。

平均能流密度：$\overline{S}=\frac{1}{2}E_0H_0$。

4. 电磁波谱

把电磁波按频率(或波长)的大小次序排列成谱，这个谱就是电磁波谱。

思考题

17-1 什么是位移电流？什么是全电流？位移电流和传导电流有哪些区别和相似之处？

17-2 变化的电场所产生的磁场是否一定随时间而变化？反之，变化的磁场所产生的电场是否一定随时间而变化？

17-3 为什么导线中传导电流的磁效应通常很容易探测到，而电容器中位移电流的磁效应却很难探测到？

17-4 试说明麦克斯韦方程组中每个方程所表示的物理意义，并指出下列事实由哪个方程所包括。

(1) 电场线仅开始或终止于电荷或无限远处；

(2) 磁感线无头无尾；

(3) 变化的电场一定伴随有磁场；

(4) 变化的磁场一定伴随有电场。

17-5 一个作匀速直线运动的点电荷能在其周围空间产生哪些场？

17-6 试分析：当电荷分别作下列两种运动时，

能否辐射电磁波？

（1）电荷在空间作简谐振动；

（2）电荷在圆轨道上运动。

17-7　为什么当半导体收音机中的磁性天线的磁棒和电磁波的磁场强度方向平行时，收音机收到的信号最强？

17-8　电磁波有哪些基本性质？它和机械波在本质上有何区别？

17-9　什么是坡印廷矢量？它和电场、磁场各有什么关系？

17-10　电磁场的物质性反映在哪些方面？

习题

17-1　在一个 $C=1\ \mu F$ 的平行板电容器的两极板上，加一频率为 50 Hz、峰值为 1.74×10^5 V 的交变电压，试计算极板间位移电流的最大值（忽略边缘效应）。

17-2　试证明平行板电容器的位移电流可写为（忽略边缘效应）

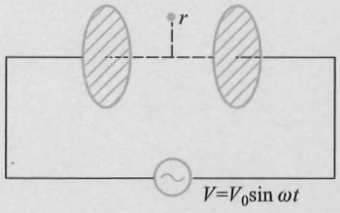
$$I_d=C\frac{dV}{dt}$$

式中 C 是电容器的电容，V 是两极板间的电势差。

17-3　如图所示，一平板电容器由两圆形极板组成，极板面积为 A，极板间距为 d，极板外部引线与一电压 $V=V_0\sin(\omega t)$ 的交流电源连接。试求：

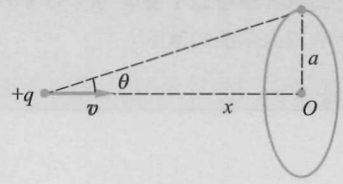
（1）穿过电容器的位移电流大小；

（2）在电容器中距轴为 r 处的磁感应强度大小。



习题 17-3 图

17-4　如图所示，一正点电荷 q 以速度 v 向 O 点运动（电荷到 O 点的距离用 x 表示）。若以 O 点为圆心，作一半径为 a 的圆，圆平面与 v 垂直，试计算通过该圆平面的位移电流。



习题 17-4 图

17-5　圆形平行板电容器板间为空气电介质。充电时极板上的电荷面密度随时间不断增加，即 $\sigma=kt$，k 为常量，试求电容器内与轴线距离为 r 处的磁感应强度。

17-6　收音机内有一自感为 2.6×10^{-4} H 的线圈，如果要使该收音机能接收波长为 200～600 m 的无线电广播信号，则振荡电路中的电容器的电容应能在什么范围内变动？

17-7　一平面电磁波在真空中传播，其电场强度 $E=E_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]j$，试求：

（1）波的传播方向；

（2）磁场强度的表达式；

（3）坡印廷矢量的表达式。

17-8　一电容器由两个半径为 R、间距为 d 的圆板构成，边缘效应可忽略不计。当电容器充电时，试证明：单位时间内流进两极板间空间的总能量等于电容器单位时间内静电能的增加量。（由此可见，储存在电容器中的电能并不是通过导线进入电容器的，而是由电磁波从极板周围的空间输入的）

17-9 某一用于打孔的激光束截面直径为 60 μm，功率为 300 kW。试求该激光束的坡印廷矢量的大小。该激光束中的电场强度和磁感应强度的振幅各多大？

17-10 太阳能电池是直接把光能转化为电能的一种装置，它的电流是由太阳光对半导体 pn 结的电场区内原子的作用产生的。假设有一太阳能电池板的尺寸为 58 cm×53 cm。当正对太阳光时，此电池板能产生 14 V 的电压，并提供 2.7 A 的电流。太阳光对垂直于光线的面积的辐射能流密度为 1.35 kW/m^2，试计算此电池板利用太阳能的效率。

17-11 有一平面电磁波在真空中传播。当电磁波通过空间某点时，该点 $E=50$ V/m，试求该时刻该点处 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的大小，以及电磁能量密度 u 和坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 的大小。

17-12 一长直螺线管半径为 a，单位长度上有 n 匝线圈，内部为真空。螺线管中载有正在增加的电流 i，试求螺线管内距轴线 r 处坡印廷矢量的大小和方向。

习题答案

第十八章　带电粒子在电场和磁场中的运动

在现代科学技术中带电粒子在电场和磁场中的运动有许多实际的应用，对现代物理学研究的各个方面有重大的意义。因此，本章比较系统地介绍了电子射线管、电子比荷的测定、带电粒子加速器和霍尔效应的基本原理以及在科学技术中的应用，体现了电磁学与各工程学科之间的联系。

本章补充资源

18-1　带电粒子在均匀磁场中的运动

我们分两种情况来讨论带电粒子在均匀磁场中的运动。

NOTE

1. 带电粒子的速度 v 垂直于磁场 B

设想一个带电粒子 q，它在均匀磁场中的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 垂直于磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。由于洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$ 永远在垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的平面内，而带电粒子的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 也恰在这个平面内，因此带电粒子就在这个平面内运动。

由于洛伦兹力永远垂直于粒子的速度，它只能改变粒子速度的方向，不能改变粒子速度的大小，因此带电粒子将在上述平面内作匀速圆周运动，如图 18-1 所示。设带电粒子的质量为 m，圆周的半径为 R，则带电粒子作匀速圆周运动的向心加速度为 $a=v^2/R$。粒子作圆周运动的向心力就是洛伦兹力，其大小为 $F=qvB$，由牛顿第二定律有

$$qvB=m\frac{v^2}{R}$$

由此得圆周的半径为

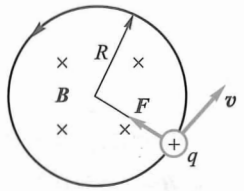


图 18-1　带电粒子在均匀磁场中作匀速圆周运动

NOTE

$$R=\frac{mv}{qB}=\frac{v}{B(q/m)} \tag{18-1}$$

上式表明，圆周的半径 R 与粒子的速度 v 成正比，与 B 成反比。q/m 称为粒子的比荷，也称荷质比(specific charge)。粒子转动一周所需的时间，即周期 T 为

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi m}{qB} \tag{18-2}$$

可见，粒子的转动周期与其速度无关。

粒子在单位时间里所转的圈数，即频率 ν 为

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{B}{2\pi}\frac{q}{m} \tag{18-3}$$

ν 也称带电粒子在磁场中的回旋共振频率，它与粒子的速度和回旋半径均无关。这一结论是回旋加速器的理论依据。

2. 带电粒子速度 v 与磁场 B 成任意夹角 θ

在一般情况下，速度 $\boldsymbol{v}$ 与磁场 $\boldsymbol{B}$ 成任意夹角 θ，这时可将速度 $\boldsymbol{v}$ 分解为两个分量：垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的分量 $v_\perp=v\sin\theta$ 和平行于 $\boldsymbol{B}$ 的分量 $v_{//}=v\cos\theta$。若只有 $v_\perp$ 分量，则粒子在垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的平面内作匀速圆周运动；若只有 $v_{//}$ 分量，由于洛伦兹力在 $\boldsymbol{B}$ 方向没有作用力，粒子将以恒定速度 $\boldsymbol{v}_{//}$ 沿着 $\boldsymbol{B}$ 方向作匀速直线运动。当两个分量同时存在时，粒子的运动可以表示为两种运动的叠加，即为等间距的螺旋线(helical path)运动，其轴与 $\boldsymbol{B}$ 的方向一致，如图 18-2 所示。粒子每转动一周所前进的距离，即螺距(pitch)为

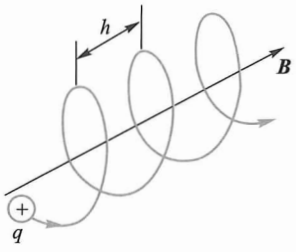


图 18-2 带电粒子在磁场中作等间距螺旋线运动

$$h=v_{//}T=\frac{2\pi mv_{//}}{qB} \tag{18-4}$$

h 与 $v_\perp$ 分量无关。

例 1

一个动能为 10 eV 的电子在垂直于均匀磁场的平面上作圆周运动，磁场的磁感应强度大小为 $B=1.0\times10^{-4}$ T，求：(1)电子的圆周轨道半径 R；(2)回旋频率 ν；(3)旋转周期 T。

解 (1) 电子的速率为

$$v=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}=\sqrt{\frac{2\times10\times1.6\times10^{-19}}{9.1\times10^{-31}}}\ \text{m/s}$$

$$=1.9\times10^{6}\ \text{m/s}$$

电子的圆周轨道半径为

$$R=\frac{mv}{qB}=\frac{9.1\times10^{-31}\times1.9\times10^{6}}{1.6\times10^{-19}\times1.0\times10^{-4}}\ \text{m}=0.11\ \text{m}$$

（2）电子的回旋频率为

$$\nu=\frac{B}{2\pi}\frac{q}{m}=\frac{1.0\times10^{-4}\times1.6\times10^{-19}}{2\times3.14\times9.1\times10^{-31}}\ \text{Hz}$$

$$=2.8\times10^{6}\ \text{Hz}$$

（3）旋转周期为

$$T=\frac{1}{\nu}=\frac{1}{2.8\times10^{6}}\ \text{s}=3.6\times10^{-7}\ \text{s}$$

即电子在该磁场中旋转一周所需时间是0.36 μs。

18-2 运动的带电粒子在电场和磁场中的偏转

下面，我们来考察由相同的带电粒子（例如电子）所组成的一束细线。在没有电场和磁场时，电子束将射在与它垂直的屏上的 O 点，如图 18-3 所示。现在我们来求电子束通过均匀电场时所引起的偏转。设电子束以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 进入电场，$\boldsymbol{v}_0$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 垂直，则电子在电场中受到静电力 $\boldsymbol{F}=-e\boldsymbol{E}$。电子的偏转方向与 $\boldsymbol{E}$ 相反，即沿垂直向下的方向；电子在垂直方向的加速度大小为 $a=eE/m$；在电场作用下所经过的时间为 $t_1=l_1/v_0$。在这段时间内，电子将在垂直方向偏转一段距离：

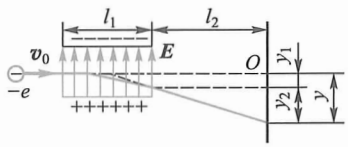


图 18-3 电子束在均匀电场中的偏转

NOTE

$$y_1=\frac{1}{2}at_1^2=\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{l_1^2}{v_0^2}$$

在经过时间 t_1 后，电子在垂直方向的分速度将由零增加到

$$v_\perp=at_1=\frac{eE}{m}\frac{l_1}{v_0}$$

电子在离开电场的偏转板到达屏上所需的时间为

$$t_2=\frac{l_2}{v_0}$$

但电子通过电场的偏转板后不再受电场的作用，因此电子在时间 t_2 内偏转的距离为

$$y_2=v_\perp t_2=\frac{eE}{m}\frac{l_1l_2}{v_0^2}$$

由此可见，电子束相对于屏上 O 点的总偏转为

$$y=y_1+y_2=\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{l_1^2}{v_0^2}+\frac{eE}{m}\frac{l_1l_2}{v_0^2}=\frac{e}{m}\frac{El_1}{v_0^2}\left(\frac{l_1}{2}+l_2\right)\qquad(18-5)$$

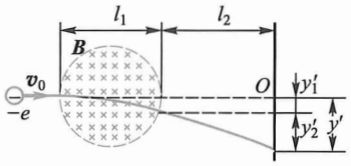


图 18-4　电子在磁场中的偏转

现在假定在长为 l_1 的距离上加入一个与其速度 $\boldsymbol{v}_0$ 垂直的均匀磁场，如图 18-4 所示。设磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直于纸面指向内，磁场的范围用一个圆标出。在磁场的作用下，电子得到的加速度为 $a=ev_0B/m$。当磁场所引起的电子束偏转不太大的情况下，可以近似地认为加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向是恒定的并垂直于 $\boldsymbol{v}_0$。在这种情况下，电子在磁场中和离开磁场到屏上所经过的时间分别为

$$t_1=\frac{l_1}{v_0},\quad t_2=\frac{l_2}{v_0}$$

NOTE

电子经过磁场的偏转距离为

$$y_1'=\frac{1}{2}at_1^2=\frac{1}{2}\frac{ev_0B}{m}\frac{l_1^2}{v_0^2}=\frac{eBl_1^2}{2mv_0}$$

经过时间 t_1 后，电子在垂直方向的分速度为

$$v_\perp=at_1=\frac{ev_0B}{m}\frac{l_1}{v_0}=\frac{eBl_1}{m}$$

但电子离开磁场后不再受磁场作用，故电子在 t_2 时间内偏转的距离为

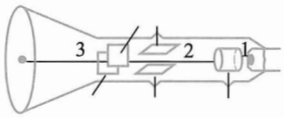
$$y_2'=v_\perp t_2=\frac{eBl_1}{m}\frac{l_2}{v_0}=\frac{eBl_1l_2}{mv_0}$$

由此可见，电子束相对于屏上 O 点的总偏转量为

$$y'=y_1'+y_2'=\frac{eBl_1^2}{2mv_0}+\frac{eBl_1l_2}{mv_0}=\frac{e}{m}\frac{Bl_1}{v_0}\left(\frac{l_1}{2}+l_2\right)\qquad(18-6)$$

由(18-6)式可知，不论是电场引起的偏转还是磁场引起的偏转，都与电子的比荷 $-e/m$ 成正比。

电场或磁场所引起的电子束偏转现象，在电子射线管中得到了应用。如图 18-5 所示，在具有电偏转的管内，除产生快速电子束的电子枪外，还放有两对彼此垂直的偏转板。无论在哪一对板上加电压，都可以使电子束在垂直于该板的方向上产生偏转，偏移量与所加电压成正比。由于射线管的屏涂以荧光材料，所以在屏上电子束的入射处将呈现明亮的光点。



1—阴极；2—垂直偏转系统；
3—水平偏转系统.

图 18-5　电子射线管示意图

电子射线管被应用于示波器中，这种仪器使我们能够观察迅变过程。在其中一对偏转板上加上一个随时间发生线性变化的扫描电压，在另一对板上加上待研究电压。由于电子束的惯性极小，所以电子束的偏移实际上能够随两对偏转板上的电压实时地变化而无滞后现象；同时，电子束将在示波器的屏上描绘出所研究电压随时间的变化曲线。因为借助于传感器，许多非电学量可以转换为电压，所以利用示波器可以研究各种过程。

电子射线管也是早期电视中不可缺少的一个组成部分。电

视中常常应用一种对电子束实行磁控的管，称为磁控管。在管子中，用两个放在外面并互相垂直的线圈组来代替偏转板，每一组线圈会产生一个垂直于电子束的磁场。改变线圈中的电流，将使电子束在屏上所产生的光点发生移动，从而出现图像。

18-3 电子比荷的测定

NOTE

利用电子在磁场中偏转的特性，可以测定电子的电荷和质量之比$-e/m$，即所谓电子的比荷（specific charge，也称荷质比）。比荷是带电微观粒子的基本参量之一。测定比荷的方法很多，这里只介绍汤姆孙（J.J.Thomson）的方法。

电子比荷最先是由汤姆孙于1897年在英国剑桥的卡文迪什实验室测出的。当时他在实验室观察电子在磁场和电场共同作用下的偏转，完成了一个决定性的实验——测定了电子的电荷$-e$与质量m的比值。可以说，正是这个实验发现了电子这一粒子。这里，我们把它作为磁场和电场对带电粒子作用的一个实际例子进行讨论。

图18-6是汤姆孙测量装置的近代形式。电子从电热灯丝F发射出来，并在外加电压V的作用下得到加速。然后，它通过小孔C进入电场$\boldsymbol{E}$与磁场$\boldsymbol{B}$同时存在的区域，其运动方向同时垂直于$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$，而$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$又互相垂直。当电子束射在荧光屏S上时，形成可见的光斑。电子运动的全部区间抽成高度真空，以免电子与空气分子发生碰撞。

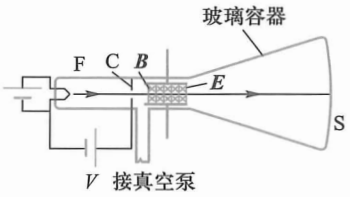


图18-6 汤姆孙测量电子比荷的装置

带电粒子在电场与磁场中运动时，受到的洛伦兹力为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B})$$

由图18-6可知，电场使电子向上偏转，而磁场使电子向下偏转。如果这两个偏转力（即静电力和磁力）互相抵消（即$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$），则上式可简化为

$$eE=ev_0B$$

即

$$E=v_0B \tag{18-7}$$

因此，对于给定的电子速度v_0，可以通过调节$\boldsymbol{E}$或$\boldsymbol{B}$来满足这个偏转为零的条件。汤姆孙的实验步骤为：

（1）当$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$两者为零时，记下无偏转的电子束光点的位置O点；

（2）加一固定电场$\boldsymbol{E}$，在荧光屏上测出由此产生的电子束

NOTE

偏转；

（3）再加一磁场 $\boldsymbol{B}$，同时调节 $\boldsymbol{B}$ 的大小直到电子束的偏转为零、光点回到位置 O 点为止。

根据（18-5）式，在纯电场时，电子束光点相对于无偏转时屏上 O 点位置的总偏转为

$$y=-\frac{e}{m}\frac{El_1}{v_0^2}\left(\frac{l_1}{2}+l_2\right)$$

式中，v_0 是电子的速度，l_1 是电场偏转板的长度，l_2 是电场区域的边界处到荧光屏的距离，$\boldsymbol{E}$ 和 y 的数值由实验测出。显然，只有 e/m 和 v_0 是未知量，而实验步骤（3）就是为了求出速度 v_0。

根据步骤（3）得到的（18-7）式，可得电子束的速度为

$$v_0=\frac{E}{B}$$

将 v_0 代入上面含 y 的方程式，可得电子的比荷为

$$-\frac{e}{m}=-\frac{yE}{B^2l_1\left(\frac{l_1}{2}+l_2\right)} \tag{18-8}$$

（18-8）式右端各量都可以测量出来。汤姆孙测得电子比荷 $-e/m$ 的数值是 -1.7×10^{11} C/kg。

1977 年测得的电子比荷的数值是

$$-\frac{e}{m}=-1.758\ 805\times10^{11}\ \text{C/kg} \tag{18-9}$$

汤姆孙测出的数值与之符合得极好。

（18-9）式给出的是电子电荷与静止质量之比；汤姆孙实验所确定的则是电子电荷与相对论质量 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 之比，电子的速度大约是 $0.1c$。在这样的速度下，相对论质量比静止质量约大 0.5%。在以后的一些实验里，电子的速度达到很大的值。但所有的情况都发现，e/m 的测量值随速度 v 的增大而减小，而且实验减小的结果与相对论的计算结果符合得很准确。如 19 世纪末发现的 β 射线是一种带负电的粒子流，不同放射性物质发出的 β 射线粒子具有不同的速度，一般来说其数值巨大，接近真空中的光速 c。实验表明，β 粒子的比荷与速度有关，速度越大，比荷的数值越小。这些结果均与相对论符合。

18-4 带电粒子加速器

NOTE

在原子核和粒子物理学研究中，使用高能带电粒子束的实验起着巨大的作用。用以获得高能粒子束的装置，称为带电粒子加速器。这种装置的类型、名目繁多，我们只介绍其中三种的基本原理。

1. 回旋加速器

回旋加速器（cyclotron）是劳伦斯（E. O. Lawrence）首先于1931年在美国伯克利的加利福尼亚大学建成并开始使用的，主要用于加速氢核（质子）、重氢核（氘）等带电粒子，以使这些粒子得到很高的能量，然后进行轰击原子核的实验①。

如前所述，带电粒子在均匀磁场中的回旋周期与其速度无关，这就是回旋加速器的基本原理。回旋加速器由两个扁圆形的金属盒电极构成，由于它们的形状每个都像字母 D，故称 D 形电极，两个 D 形电极之间留有狭缝，中心附近放置有离子源（如质子、氘核或 α 粒子等），如图 18-7 所示。两个 D 形电极装在高度真空的罩内，整个装置则位于巨大的电磁铁两极之间，它们所产生的磁场是均匀磁场，其方向垂直于 D 形电极的平面（图 18-8）。电子高频振荡器所激发的交变电压加在两个 D 形电极上，其频率的数量级为每秒改变几百万次，于是在缝隙内形成交变电场。由于电屏蔽作用，D 形电极内的电场很弱。

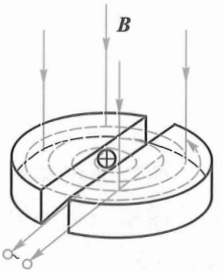


图 18-7 回旋加速器 D 形电极图

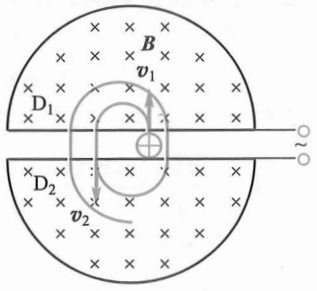


图 18-8 回旋加速器工作原理

现在我们考虑离子的运动情况。设想当电极 D_2 的电势高的时候，一个带正电的离子从离子源发出，它在缝隙中被加速，并以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 进入电极 D_1 内部的无电场区。在这里，离子仅在磁场的作用下沿圆周轨道运动，其半径为

$$R_1=\frac{mv_1}{qB}$$

离子绕行半个圆周后又回到缝隙处。如果我们所选择的两 D 形电极间的电压变化频率刚好在此一瞬间使缝隙间的电场恰好反向，则离子通过缝隙时又将被加速，并以更大的速度 $\boldsymbol{v}_2$ 进入电极 D_2 内部的无电场区，然后沿较大的半径 $R_2=mv_2/(qB)$ 作圆周运

① 劳伦斯由于这一工作而获得 1939 年的诺贝尔物理学奖。

NOTE

动。由于离子在均匀磁场中的回旋周期与速度无关，所以它在通过电极 D_2 时半个圆周所用的时间保持不变，它们都等于回旋周期的一半，即 $T/2=\pi m/(qB)$。所以，尽管粒子的速度和回旋半径一次比一次增大，只要缝隙中的交变电场以不变的回旋周期 $T=2\pi m/(qB)$ 往复变化，就能保证离子每次经过缝隙时都受到电场的加速。只要这个过程一直继续下去，不断加速的离子将沿着螺旋线轨道到达 D 形电极边缘，从而被引出这个系统之外。

回旋加速器中所产生的离子的能量依赖于 D 形电极的半径 R。由 $R=mv/(qB)$ 可知，离子在这个回旋加速器中最终获得的速度为

$$v=\frac{qBR}{m}$$

于是，离子的动能为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{q^2B^2R^2}{2m} \tag{18-10}$$

上式表明：离子获得的能量受到磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和 D 形电极半径 R 的限制。

例 2

一回旋加速器的回旋频率为 $\nu=1.2\times10^7$ Hz，D 形电极的半径为 $R=0.53$ m，求加速氘核需要的磁感应强度 B。加速后氘核的动能为多大？已知氘核质量 $m=3.3\times10^{-27}$ kg，电荷量 $q=1.6\times10^{-19}$ C。

解　回旋加速器的回旋频率为

$$\nu=\frac{qB}{2\pi m}$$

故得

$$B=\frac{2\pi\nu m}{q}=\frac{2\pi\times1.2\times10^7\times3.3\times10^{-27}}{1.6\times10^{-19}}\ \text{T}$$
$$=1.6\ \text{T}$$

氘核的动能为

$$E_k=\frac{q^2B^2R^2}{2m}$$
$$=\frac{(1.6\times10^{-19})^2\times(1.6)^2\times(0.53)^2}{2\times3.3\times10^{-27}}\ \text{J}$$
$$=2.8\times10^{-12}\ \text{J}=17.5\ \text{MeV}$$

2. 电子感应加速器

电子感应加速器（betatron）是利用变化的磁场在空间激

发涡旋电场来加速电子的感应式加速器。它的主要装置如图18-9所示。这种仪器由放在特别形状的电磁铁两极之间的环形管状真空室构成，电磁铁的线圈通有频率约100 Hz的交变电流。在这种情况下所产生的交变磁场有两个作用：一是产生涡旋电场以加速电子；二是让电子在磁场中在洛伦兹力的作用下，沿圆形轨道运动。下面简单介绍一下它的工作原理。

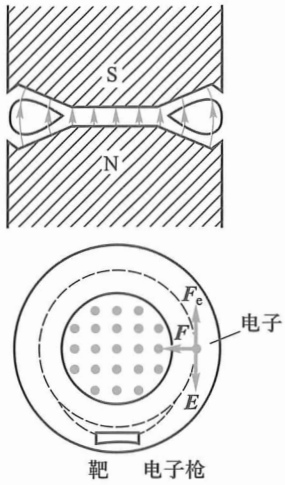


图18-9 电子感应加速器

首先，为了加速电子，在图18-9所示的情况下，涡旋电场应是顺时针方向的，即磁场变化的第一个和第四个1/4周期可以用来加速电子，如图18-10所示。其次，为了使电子能不断加速，电子必须沿圆形轨道运动，电子受到的磁场的洛伦兹力应指向圆心，而这只有在磁场变化的第一个和第二个1/4周期才能做到。为了能同时满足这两个条件，只有在磁场变化的第一个1/4周期的区间内，电子才能在涡旋电场作用下不断加速。由此可见，电子感应加速器是以脉冲形式工作的。在脉冲开始时，电子枪把电子束引入真空室。于是电子便在涡旋电场中以越来越大的速度沿圆形轨道运动，它们在每个磁场变化的第一个1/4周期内（约10^{-3} s）被加速，这样，经过上百万次旋转获得数百兆电子伏的能量，在这样的能量下，电子的速度几乎等于光速。

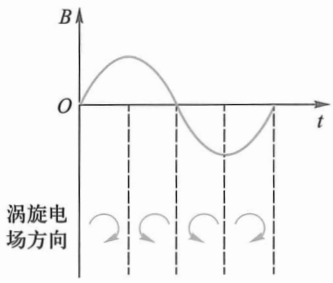


图18-10 电子感应加速器中产生涡旋电场的方向

为了使电子维持在恒定的轨道半径R上作圆周运动，对磁场的径向分布有一定的要求。设电子轨道处的磁场为B_R，电子运动的向心力为洛伦兹力，则有

$$evB_R = m\frac{v^2}{R} \tag{18-11}$$

由此得

$$mv = ReB_R \tag{18-12}$$

(18-12)式表明：在任意时刻，只要电子的动量随磁感应强度成比例增加，就可以维持其在一定的轨道上运动。为了实现这个条件，我们分析电子的加速过程，不难看出：由于电子受到一个切向力$\boldsymbol{F}$（图18-9），因此根据牛顿运动定律，有

$$F = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = eR\frac{\mathrm{d}B_R}{\mathrm{d}t} \tag{18-13}$$

电子轨道半径R处的涡旋电场可由下式求出，即

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = E\cdot 2\pi R = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}$$

$$E = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}$$

即有

NOTE

NOTE

$$F=-eE=\frac{e}{2\pi R}\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} \tag{18-14}$$

由(18-13)式和(18-14)式得

$$\mathrm{d}(mv)=\frac{e}{2\pi R}\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}$$

设加速过程开始时,电子的速率 $v=0$,$\Phi_{\mathrm{m}}=0$,对上式积分得

$$mv=\frac{e}{2\pi R}\Phi_{\mathrm{m}}=\frac{e}{2\pi R}\cdot\pi R^2\overline{B}=\frac{eR}{2}\overline{B} \tag{18-15}$$

式中 $\overline{B}$ 为电子运动轨道内圆面积的平均磁感应强度。

比较(18-12)式和(18-15)式得

$$B_R=\frac{1}{2}\overline{B} \tag{18-16}$$

这就是维持电子在全部时间内都能沿恒定圆形轨道上运动的条件。它表明:为了使加速电子能在与其速度无关的恒定半径 R 的圆周上作圆周运动,电子运动轨道上的磁感应强度 B_R 应等于轨道所包围的圆面积内的平均磁场 $\overline{B}$ 的一半。必须指出,以上推导即使在速度接近光速时也成立的。我们可以设计电磁铁的造型,使它既能产生较强大的中心磁场,又能在电子轨道位置处产生较弱的磁场,以满足上述条件。

电子感应加速器对电子的加速虽然不受相对论效应的限制,但却受到电子因加速运动而辐射能量的限制。无论何时,当一个电子被加速时,它就要辐射能量,当由于辐射所损失的能量等于从电子感应加速器所获得的能量时,电子就不可能再加速。这个问题可以用增大轨道半径的方法来加以改进,但是,这时又要受到电磁铁尺寸的限制。

在一个 100 MeV 的电子感应加速器里,一个电子旋转一周增加的能量为 430 eV,电子必须旋转大约 2.3×10^5 周,才能获得 100 MeV 的能量。具有这样大能量的电子,其速度为0.998 7c。电子感应加速器主要用于核研究。能量在 50 MeV 以下的小型电子感应加速器在工业上可用来产生硬 X 射线,供工业上作无损探伤之用。

18-5　霍尔效应

1879 年,霍尔(E.H.Hall)在哈佛大学首次观察到:当把一载流导体板放在垂直于它的磁场中时,则如果磁场方向与电流方向

垂直，在导体板样品中垂直于电流和磁场的方向上就出现横向电势差。这一现象称为霍尔效应(Hall effect)。电势差 $V_H=V_1-V_2$ 叫霍尔电势差(Hall potential difference)，如图 18-11 所示。

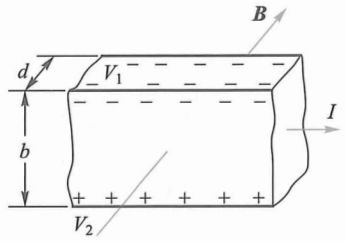


图 18-11 金属导体中的霍尔效应

实验表明，在磁场不太强时，霍尔电势差 V_H 与电流 I 和磁感应强度 B 成正比，与导体板的厚度 d 成反比，即

$$V_H=R_H\frac{IB}{d} \tag{18-17}$$

式中比例系数 R_H 称为霍尔系数。

霍尔效应的出现可以简单地用洛伦兹力来解释。由于导体板内的运动电荷 q(载流子，即电子)在磁场 B 中受到洛伦兹力 F_m 的作用而发生偏转，使导体板的上下界面聚集了正负电荷形成电势差。

设导体板内载流子(电子)的平均定向运动速度 v_d，它们在磁场中受到的洛伦兹力的大小为

$$F_m=qv_dB \tag{18-18}$$

这时载流子除有宏观的定向运动外，还将产生向上的速度分量，于是在导体板的上侧出现剩余的负电荷，下侧出现剩余的正电荷(如图 18-12 所示)，因而产生一个附加的横向电场 E_H，称为霍尔电场。霍尔电场的出现将阻止载流子向上偏转，使其还受到一个方向相反的电场力

$$F_e=qE_H \tag{18-19}$$

最后，这两个力达到平衡，即

$$qE_H=qv_dB$$

由此得霍尔电场为

$$E_H=v_dB \tag{18-20}$$

霍尔电势差为

$$V_H=E_Hb=v_dBb$$

式中 b 为导体板的横向宽度。

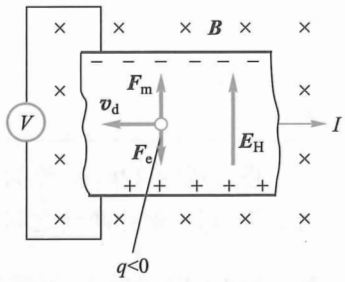


图 18-12 霍尔效应的电子论解释

设载流子的浓度为 n，则电流 I 可写成 $I=nqv_ddb$，用 I、n 和 q 来表示 v_d，则 $v_d=\dfrac{I}{nqdb}$，代入上式后得

$$V_H=\frac{1}{nq}\frac{IB}{d} \tag{18-21}$$

将此式与(18-17)式比较后得霍尔系数为

$$R_H=\frac{1}{nq} \tag{18-22}$$

上式表明，R_H 与载流子的浓度有关。测出霍尔系数，就可以求出金属导体中载流子的浓度。

NOTE

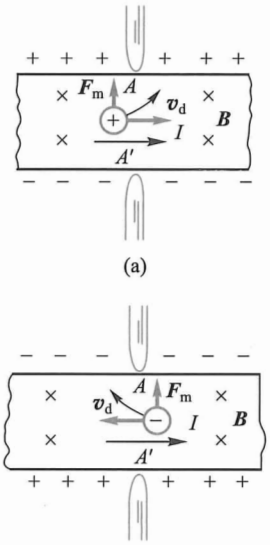


图 18-13　霍尔效应与载流子电荷正负的关系

霍尔效应不仅可以在金属中观察到，也可以在半导体中观察到，半导体中的载流子浓度远小于金属中的载流子浓度，因此半导体的霍尔系数比金属的大得多，而且半导体内载流子的浓度受温度、杂质等因素的影响很大，因此霍尔效应为研究半导体载流子浓度的变化提供了重要的方法。

根据霍尔系数的符号可以判断出半导体究竟是属于 n 型还是 p 型半导体[①]。图 18-13 表示分别具有正负两种载流子试样的霍尔效应。在图 18-13(a)中，$q>0$，载流子的定向运动速度 v_d 的方向与电流 I 方向一致，洛伦兹力使它向上偏转，结果 $V_H>0$；反之，在图 18-13(b)中，$q<0$，载流子的定向运动速度 v_d 的方向与电流的方向相反，洛伦兹力也使它向上偏转，结果 $V_H<0$。因此，根据霍尔电势差或霍尔系数的正负号，就可以判断出半导体的类型。

有趣的是，对于非单价金属、铁与类似铁的磁性物质以及像锗这样的半导体，用自由电子模型对霍尔效应所作的这种简单解释并不正确；而以量子物理为基础对霍尔效应所作的解释，才与实验结果有较好的符合。

例 3

将一宽为 2.0 cm、厚为 1.0 mm 的铜片放在 $B=1.5$ T 的磁场中，如果铜片中载有 200 A 的电流，则在铜片两侧之间的霍尔电势差有多大？设铜的载流子浓度 $n=8.4\times10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$。

解　根据(18-21)式，得霍尔电势差为

$$V_H=\frac{1}{nq}\frac{IB}{d}$$

$$=\frac{1}{8.4\times10^{28}\times1.6\times10^{-19}}\frac{200\times1.5}{1\times10^{-3}}\ \mathrm{V}$$

$$=2.2\times10^{-5}\ \mathrm{V}=22\ \mu\mathrm{V}$$

18-6　磁控管

微波是一高频电磁波，其频率范围为 300 MHz~300 GHz，波长范

① 在 n 型半导体中，载流子为电子型；而在 p 型半导体中，载流子为空穴型，相当于带正电荷。

围为 1 m~1 mm。磁控管是一种产生微波的自激振荡器件,它利用电子在电场和磁场中的运动,将输入的直流电能转换为输出的微波能量,广泛应用于雷达、导航、遥感、多路通信、电视和微波加热等领域中。它虽然结构简单,但却极具高效率,其工作原理纷繁复杂,不仅涵盖电工技术、电磁场理论和微波理论,而且涉及复杂的电子运动。

作为微波炉核心部件的磁控管一般由铜质的实心圆柱形阴极和同轴的空心圆柱体阳极所组成。阳极较厚且被挖去多个圆柱体空腔(例如 8 个),形成所谓的“谐振腔”,如图 18-14(a)所示。其中一个谐振腔连接天线(图中没有画出),以输出微波能量。

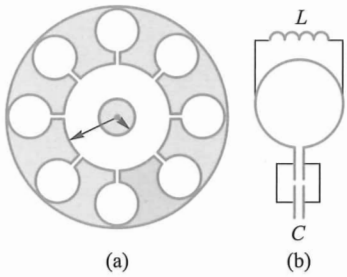


图 18-14 磁控管的结构(即等效 LC 谐振电路)

磁控管的每个谐振腔都可等效为由一个电容和一个电感所构成的 LC 谐振器,如图 18-14(b)所示,理想 LC 谐振器的谐振频率为 $\nu=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$。若沿磁控管轴向施加一恒定均匀磁场 $\boldsymbol{B}$(例如垂直纸面向外),在阳极和阴极之间施加一恒定电压 V,则由磁控管阴极发出的电子在到达阳极的过程中,将激发各种不同的振荡模式。若阳极中相邻两个谐振腔的电磁场相位差为π时,称为π振荡模式。

NOTE

1. 电子在正交场中运动

与磁控管直径相比,其阳极与阴极之间的距离很小,因此先将磁控管近似为两个平行电极,如图 18-15 所示。高频电磁场不存在时,阴极发射的电子将在 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 相互正交的恒定场中运动。

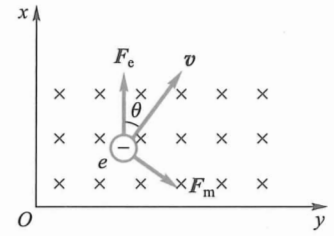


图 18-15 电子在正交场中的运动

若电子由静止开始离开阴极,由于存在着加速电场 $\boldsymbol{E}$,电子将在电场力 $\boldsymbol{F}_e$ 的作用下开始加速。由于同时存在恒定磁场,电子又受到垂直于磁场 $\boldsymbol{B}$ 的洛伦兹力 $\boldsymbol{F}_m$ 的作用,电子的运动方向将发生改变。由牛顿运动定律,电子的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=eE-eB\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=eB\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=0$$

由初速条件 $t=0$ 时,$x=0$,$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=0$,可得到电子的运动方程为

$$x=\frac{mE}{eB^2}\left[1-\cos\left(\frac{eB}{m}t\right)\right]=R[1-\cos(\omega_c t)]$$

NOTE

$$y=\frac{mE}{eB^2}\left[\left(\frac{eB}{m}t\right)-\sin\left(\frac{eB}{m}t\right)\right]=R[\omega_c t-\sin(\omega_c t)]$$

$$z=0$$

由上式可知，电子的运动轨道是 $z=0$ 平面上的一条摆线，它相对于一个半径为 R 的圆绕着圆心以角速度 ω_c 沿 y 轴（即阴极表面）滚动时，其圆周上某点的运动轨道。

若阴极与阳极之间的距离为 d，当磁感应强度 B 大于临界磁感应强度 $B_k=\sqrt{\frac{2mE}{ed}}$ 时，电子将无法到达阳极，只能在两极之间沿 y 轴不断地作摆线运动，故此时阳极电流为零。

在这个过程中，磁场只改变电子运动方向，不改变速度大小，故不做功，于是电子在运动过程中，其电势能和动能在不停地相互转化。这时虽然电子与恒定磁场不交换能量，但是却与静电场交换能量。

2. 磁控管的工作原理

高频场存在的一个效应就是通过电子的运动将电子从恒定场中吸收的能量转化为高频电磁振动的能量。当磁控管中同时存在恒定场和高频场时，电子除了与恒定场交换能量以外，与高频场也会交换能量。如果高频电场对电子产生减速作用，则电子会失去动能，即电子把能量交给高频场，从而增加了高频场的能量，进而维持高频微波能量的输出。反之，如果运动电子一直受高频场的加速作用，则电子会从高频场获取能量，高频场的能量便会减少，高频振荡也会相应减弱。

如前所述，当磁控管中没有高频场时，图 18-16 中的电子 A 应沿轨道 a 返回阴极。但由于高频场的存在，它首先受到腔 1 内高频电场角向分量的减速作用，其角向速度分量将减小，与之相关的径向磁场力分量将相应减小，结果不仅圆周运动半径将增大，电子改为沿 a′ 轨道运动，而且还增大了向阳极运动的径向速度分量。接着，电子进入腔 2 高频电磁场的作用范围。为了维持高频振荡的持续性，需要适当选择阳极电压 V 和磁感应强度 B，使电子从腔 1 飞到腔 2 的时间恰好等于高频振荡的半个周期，于是当电子进入腔 2 高频场的作用范围时，高频场的方向恰好反转，即恰与图示的方向相反。于是在腔 2 中，电子 A 的角向运动仍然受到减速作用，于是重复前述过程。然后进入腔 3……直到电子被阳极所吸收。在这个过程中，电子不断把在直流电场中所获得的能量

交给高频场，而自身的位置也越来越靠近阳极，最后被阳极所吸收。

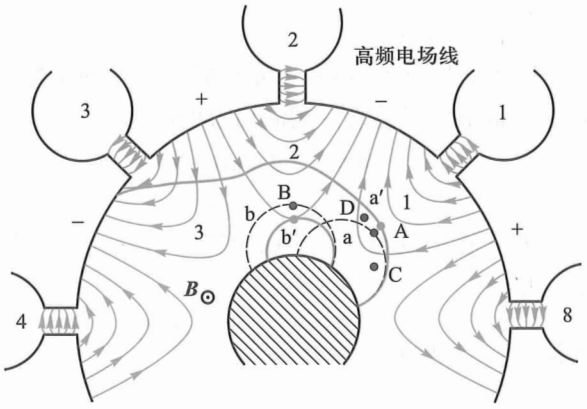


图 18-16　磁控管中高频场对电子运动的影响

需要指出的是，有一些电子，例如图 18-16 中的 B，它与 A 同时但从阴极的不同位置出发，由于它先进入腔 2 的高频场作用范围，受到角向电场的加速作用，角向速度分量增加，结果与之相关的磁场力径向分量增加，因此加快了电子 B 返回阴极的速度。在这个过程中，电子 B 会吸收高频场的能量，显然这不利于高频振荡。幸运的是因为这些电子返回阴极的速度很快，故吸收高频场的能量也就很少。

高频场存在的第二个效应就是形成电子的聚集效应。在磁场力的角向分量作用下，图 18-16 中电子 A 附近的电子 C 和 D 在它们的运动过程中都逐渐向电子 A 靠近。可以证明，8 个谐振腔的磁控管工作在π振荡模式下，磁控管中的电子会在相邻两个谐振腔之间交替聚集、发散，形成 4 个汇集的辐条。在静电场的驱动下，它们绕着阴极作逆时针旋转，而且旋转的角速度恰好与 LC 电路的谐振频率相互匹配，形成共振。于是，若 LC 谐振频率为 ν，则电子辐条的旋转的角速度（角频率）为 $\omega_s=\dfrac{\pi\nu}{2}$。

NOTE

本章摘要

1. 带电粒子在均匀磁场中的运动

（1）$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{B}$——带电粒子作匀速圆周运动

圆周的半径：$R=\dfrac{mv}{qB}$

NOTE

转动周期：$T=\dfrac{2\pi m}{qB}$

频率：$\nu=\dfrac{1}{T}=\dfrac{B}{2\pi}\dfrac{q}{m}$

（2）$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 成任意夹角 θ——带电粒子作等间距螺旋线运动

螺距——带电粒子转动一周时前进的距离。

$$h=\frac{2\pi m v_{//}}{qB}=\frac{2\pi m v\cos\theta}{qB}$$

2. 带电粒子在电场和磁场中的偏转

（1）电偏转

电子通过均匀电场时的偏转：$y_1=\dfrac{1}{2}\dfrac{eE}{m}\dfrac{l_1^2}{v_0^2}$

电子离开电场到达屏上时的偏转：$y_2=\dfrac{eE}{m}\dfrac{l_1 l_2}{v_0^2}$

电子相对于屏上 O 点的总偏转：$y=y_1+y_2=\dfrac{e}{m}\dfrac{El_1}{v_0^2}\left(\dfrac{l_1}{2}+l_2\right)$

（2）磁偏转

电子经过磁场时的偏转：$y_1'=\dfrac{eBl_1^2}{2mv_0}$

电子离开磁场到屏上时的偏转：$y_2'=\dfrac{eBl_1 l_2}{mv_0}$

电子相对于屏上 O 点的总偏转：$y'=y_1'+y_2'=\dfrac{e}{m}\dfrac{Bl_1}{v_0}\left(\dfrac{l_1}{2}+l_2\right)$

3. 电子的比荷

汤姆孙测量的电子比荷的公式：$-\dfrac{e}{m}=-\dfrac{yE}{B^2 l_1\left(\dfrac{l_1}{2}+l_2\right)}$

4. 带电粒子加速器

（1）回旋加速器

（2）电子感应加速器

5. 霍尔效应——1879 年霍尔首次发现

霍尔电势差：$V_{\mathrm{H}}=R_{\mathrm{H}}\dfrac{IB}{d}$

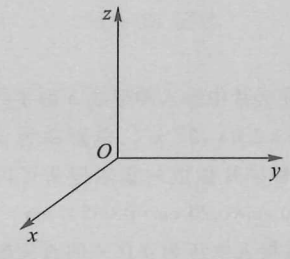
霍尔系数：$R_{\mathrm{H}}=\dfrac{1}{nq}$

思考题

18-1 如果一电子束沿一直线通过空间某一区域而不发生偏转，我们能否肯定该区域内没有电场或没有磁场的结论？

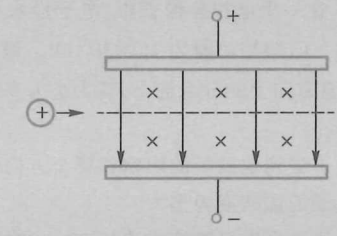
18-2 回旋加速器在加速带电粒子时，其中的电场和磁场各起什么作用？

18-3 如图所示，可用电子测定 O 点的电场和磁场。若电子静止在 O 点或以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 z 轴正方向射入 O 点，测得电子受的力均为 F，且指向 y 轴负向；而若电子以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 x 轴正方向射入 O 点，则测得电子受的力为零，试分析 O 点处 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的大小和方向。



思考题 18-3 图

18-4 速度选择器（又称滤速器）的原理如图所示：在一对平行金属板间施加电压形成垂直向下的均匀电场 $\boldsymbol{E}$（忽略边缘效应）；在与 $\boldsymbol{E}$ 垂直的方向上有一均匀磁场 $\boldsymbol{B}$，方向垂直纸面向里。一束所带电荷量为 q 的粒子流，以垂直于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的方向入射，试分析速度选择器选择所需速率粒子的原理，并说明具有何种速率的带电粒子才能无偏转地通过场区。



思考题 18-4 图

18-5 地球赤道处的地磁场方向沿水平面并指向北。假设大气电场方向指向地面，因而电场和磁场相互垂直。我们必须沿什么方向发射电子，才能使它的运动不发生偏转？

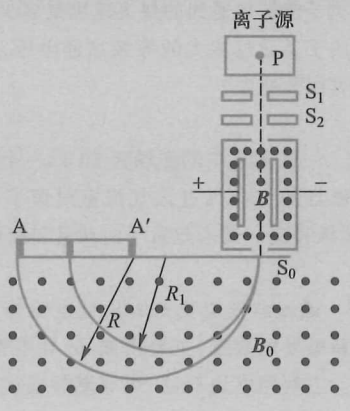
18-6 （1）测量载流导体板在磁场中由于霍尔效应产生的横向电势差时，为什么必须注意两探针的接触点刚好相对？

（2）如果两个接触点之一可以移动，则为了保证两接触点处在合适的位置应怎样调节移动点？

习题

18-1 有一带电粒子在 $B=1.0\times10^{-3}$ T 的均匀磁场中运动，该粒子的质量为 1.0×10^{-12} kg；所带电荷量为 1.0×10^{-4} C；运动初速为 1.0×10^{4} m/s，方向与磁场方向成 30°角。试求该粒子所作的螺旋线运动的周期 T、半径 R 和螺距 h。

18-2 质谱仪是用于分析同位素的重要仪器，其原理如图所示：离子源 P 所产生的离子经过狭缝 S_1 和 S_2 之间的加速电场加速后，进入速度选择器；速度选择器中的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 都垂直于离子



习题 18-2 图

速度 $\boldsymbol{v}$，且 $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B}$；通过速度选择器的离子接着进入均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中，它们沿半圆周运动而到达记录它们的照相底片，形成谱线。如果测得某一谱线 A 到入口处 S_0 的距离为 x，试证明与此谱线对应的离子的质量为 $m=\dfrac{qB_0Bx}{2E}$，q 为离子所带的电荷量。

18-3　在一个电视显像管中，电子沿水平方向从南向北运动。已知其动能为 1.2×10^4 eV。假定该处地球磁场在竖直方向上的分量向下，其大小为 5.5×10^{-5} T。试问：

（1）电子受到地磁场的影响朝哪个方向偏转？

（2）电子的加速度为多大？

（3）电子在电视显像管中飞行 20 cm 时的偏转有多大？

18-4　北京正负电子对撞机中电子在周长为 240 m 的储存环中作圆周运动。已知其中一电子的动量是 1.49×10^{-18} kg·m/s，求偏转磁场的磁感应强度。

18-5　一电子在电子感应加速器中沿半径为 1 m 的轨道作圆周运动。如果电子每运动一周，其动能增加 700 eV，试求轨道内磁通量的变化率。

18-6　一回旋加速器的 D 形室的圆周半径为 $R=35$ cm，用它来加速质量为 1.67×10^{-27} kg、电荷量为 1.6×10^{-19} C 的质子。已知加速所用的磁场为 $B=1.5$ T，试问：

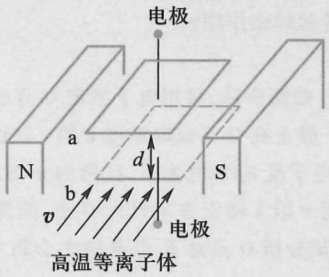
（1）经过多长时间 D 形盒间的电压要反向？

（2）质子能被加速到的最大速度是多少？

（3）质子要通过多大的等效加速电压，才能获得这样的最大回转速度？

18-7　一气泡室中的磁场为 20 T，一个高能质子沿垂直于磁场的方向飞过该气泡室时留下一半径为 3.5 m 的圆弧径迹。试求此质子的动量和能量。

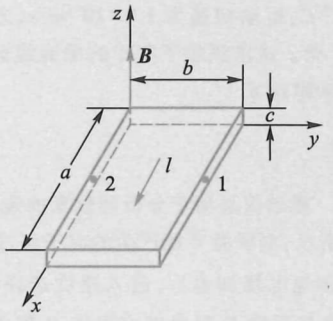
18-8　磁流体发电机是利用导电流体的霍尔效应制成的新型发电装置，主要由磁场、导电管、导电管电极组成。它利用燃烧石油、煤等燃料或核反应堆的余热，将气体加热到很高的温度（约 3 000 K）使之电离，形成等离子体，后者以高速（约 1 000 m/s）通过处于强磁场中、由耐高温材料制成的导电管而发电。如图所示，设导电管中上、下两平板的电极为 a 和 b，板间的距离为 d。若磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$，高温等离子体速度为 $\boldsymbol{v}$，试问气流中正负电荷各向哪个极板积累？哪个极板电势高？两极板的电势差可达多大？



习题 18-8 图

18-9　在硅片中掺入砷形成 n 型半导体，假设其电子浓度为 $n=2.0\times10^{21}$ m^{-3}，电阻率为 $\rho=1.6\times10^{-2}$ Ω·m。用这种硅片做成的霍尔探头可以测量磁场，其尺寸为 0.50 cm×0.20 cm×0.005 0 cm。将此硅片长度方向的两端接入电压为 1.0 V 的直流电路中，当探头放在磁场某处并使其最大表面与磁场方向垂直时，测得宽度为 0.2 cm 两侧的霍尔电势差为 1.05 mV，试求磁场中该处的磁感应强度。

18-10　如图所示，一块半导体样品平放在 xy 面上，其长、宽和厚度依次沿 x、y 和 z 轴方向。已知沿 x 轴方向有电流通过，在 z 轴方向加有均匀磁场，现测得：$a=1.0$ cm，$b=0.35$ cm，$c=0.10$ cm，$I=1.0$ mA，$B=0.30$ T，在宽度为 0.35 cm 两侧的电势差 $V_1-V_2=6.55$ mV。

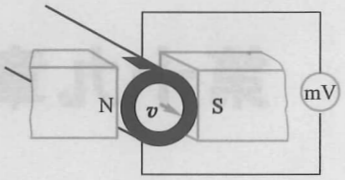


习题 18-10 图

（1）试问这块半导体是 p 型（空穴导电）还是 n 型（电子导电）半导体？

（2）试求载流子的浓度。

18-11　霍尔效应可用来测量血管中血流的速度，其原理如图所示。在动脉血管两侧分别安装电极并加上磁场（实际应用中的磁场由交流电产生）。设血管直径是 2.0 mm，磁场为 0.08 T，毫伏表测出的电压为 0.1 mV，则血流的速度为多大？



习题 18-11 图

习题答案

第十九章　光的干涉



本章补充资源

光学是物理学的一门分支科学，它主要研究光的本性、光的发射、传播和吸收的规律以及光和其他物质的相互作用及其应用。

光学通常可分为几何光学和物理光学两部分，物理光学又可分为波动光学和量子光学两个分支。以光的直线传播性质为基础，研究光在透明介质中的传播问题的光学称为几何光学；以光的波动性质为基础，研究光的干涉、衍射等现象的光学称为波动光学；以光的波粒二象性为基础，研究光和物质相互作用的光学称为量子光学。在本章及后两章中，我们介绍波动光学，主要内容有光的干涉、光的衍射和光的偏振。

19-1　光的本性

NOTE

关于光的本性，从17世纪开始，就存在两派不同的学说。一派是牛顿所主张的光的微粒说，认为光是按照牛顿运动定律沿直线运动的微粒流。该学说很自然地解释了光的直线传播特性，也能说明光的反射和折射现象①，但在解释牛顿环等现象时却遇到了困难。另一派是惠更斯(C. Huygens)所主张的光的波动说，认为光是在一种特殊弹性介质中传播的机械波。这一学说能解释光的反射和折射等现象，但它在说明光的直线传播时遇到了困难②。由于早期波动说的不完善，以及牛顿理论的权威性，在惠更斯提出光的波动说后的100多年里，光的微粒说一直占据着统治地位。直到19世纪初，托马斯·杨(T. Young)提出了波动的干涉理论，从而成功地解释了薄膜的彩色条纹。十几年后，菲涅

① 粒子说在解释光的折射时，要求光密介质中的光速大于光疏介质中的光速，这个结论在当时无法通过实验证实。现在看当然是错误的。

② 由于波在通过障碍物时有衍射，所以当时无法解释为什么光遇到普通障碍物时，后面的影子是全黑的(当然若障碍物足够小，会有明显的衍射现象，这是后话)。此外，当时惠更斯犯了一个错误，他认为光类似声波，是纵波，因此无法解释光的偏振。

耳(A. Fresnel)以杨氏干涉原理补充了惠更斯原理,由此产生了著名的惠更斯-菲涅耳原理。这个原理既能圆满地解释光的直线传播,也能解释光通过障碍物时所产生的衍射现象。特别是预言光通过一枚硬币后,影子中心是一个亮点。从此,人们开始放弃光的微粒说。到19世纪后期,麦克斯韦(J. Maxwell)建立了电磁场理论,这个理论预言了电磁波的存在,并指出电磁波的速度和光速相同。麦克斯韦确信光是一种电磁现象,后经实验证实,光波(指可见光波,后同)实质上是波长在400.0~760.0 nm区间内的电磁波,于是波动说有了更坚实的理论和实验基础。但是,19世纪末至20世纪初,人们的研究开始深入到光和物质的相互作用时,发现了一系列新的现象,如黑体辐射、光电效应等。这些现象不能用光的波动理论来解释,而必须假定光是具有一定能量和动量的粒子所组成的粒子流。那么,光究竟是粒子还是波动呢?近代科学实践证明,光不仅具有波动性,还具有粒子性,这就是所谓的光的波粒二象性。

NOTE

19-2 光的相干性

1. 相干光波

干涉现象是波动过程的基本特征之一。光是电磁波,因此光也有干涉现象。对于可见光波,干涉现象表现为:在它们的叠加区域内,有些地方较亮,有些地方较暗,从而形成一系列有规则的明暗相间的条纹。但是,并不是任意两个光源所发出的光波都能产生干涉现象。要产生干涉现象,两列波必须满足相干条件,即频率相同、振动方向相同、相位差恒定。这些条件对机械波来说,比较容易满足,但对光波来说并不那么容易实现。这是和光源的发光机理密切相关的。下面我们就来谈谈普通光源的发光机理。

2. 普通光源的发光机理

光是由光源中许多原子、分子等微观客体辐射的。近代物理学理论和实验都已表明,原子或分子的能量只能取一系列分立

值，这些值称为能级。能量最低的状态称为基态，其他能量较高的状态称为激发态。

通常，原子总是处于基态，但是如果受到外界的某种激励，原子可以吸收一定的能量从基态跃迁到激发态。处于激发态的原子是不稳定的，它会自发地跃迁回到基态或低激发态，在这一跃迁过程中，原子将向外辐射电磁波。由于这一跃迁所经历的时间是很短的，约为 10^{-8} s，所以原子所发出的光波①是一个在时间上很短、在空间上也是有限长的波列，如图 19-1 所示。由于构成光源的大量原子或分子是各自独立地发出一个个波列的，它们的辐射是偶然的，彼此间没有联系，所以各原子或分子所发出的光，即使频率相同，但相位和振动方向也是各不相同的。所以，由两个独立的光源或者同一光源不同部分所发出的光是不相干的。不但如此，即使同一原子前后两次所发的光也不会产生干涉。

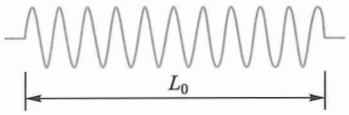


图 19-1 原子一次跃迁发出的波列

NOTE

那么，怎样才能获得两束相干光呢？如果使一光源上同一点发出的光分为两部分，并沿两条不同的路径传播，然后再使它们相遇，这样的两束光波必满足相干条件，在它们相遇的区域能够产生干涉现象。通常，把从光源同一点发出的光分为两束光波的方法有两种，即分波阵面法和分振幅法。分波阵面法是将从一点（线）光源发出的光波在其波阵面上分离为两部分，后面要讨论的杨氏双缝干涉、劳埃德镜干涉等实验就是利用分波阵面法获得相干光的。分振幅法是通过部分反射和部分透射，将一束光分为若干束的方法，薄膜干涉就是利用分振幅法得到相干光的。

3. 相干长度

若已得到了两束相干光波，要产生干涉现象，还有一定的限制。我们已经知道，一个原子在某一时刻所发的光波是有限长的波列，如图 19-1 所示，波列长度为 L_0。设某个原子前后发射了三个波列 a、b、c。把这三个波列分别分为两部分 a_1 与 a_2、b_1 与 b_2、c_1 与 c_2，再使它们经过不同的路径在 P 点相遇。当路程相差不太大时，在 P 点 a_1 可以和 a_2、b_1 可以和 b_2、c_1 可以和 c_2 相遇，如图 19-2(a)所示，由于它们都是相干的，所以可以观察到干涉现象。但是，如果路程相差太大，以至 a_1 的尾部已通过 P 点而 a_2 的首部尚未到达，这样 a_1 和 a_2 不能相遇，同样 b_1 和 b_2 也不能相遇，如图 19-2(b)所示。由于 a、b、c 这三列波互相是不相干的，

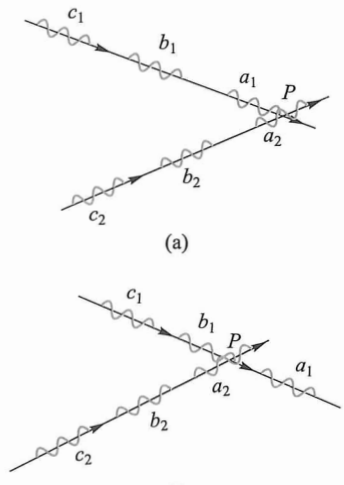


图 19-2 说明相干长度用图

① 在量子物理中，称为一个光子。

它们在 P 点相互叠加不能产生干涉现象[①]。因此，一束光波分为两束相干光波，再次相遇时，要能产生干涉现象，路程差必须小于 L_0，此极限长度 L_0 就称为该光源的相干长度。相干长度常用来描述光源相干性的好坏。一般普通的单色光源，如钠灯、汞灯等，相干长度为几厘米或几十厘米，而激光器的相干长度可达几十千米。

19-3 光程和光程差

NOTE

在干涉实验中，如果光始终在同一介质中传播，光的波长不发生变化，因此只要知道光所通过的几何路程 x，即可求得相应的相位变化 $\Delta\varphi = 2\pi\dfrac{x}{\lambda}$。此式中的 λ 为光在介质中的波长。当光通过不同的介质时，由于光波的波长在不同的介质中是不相同的，所以由光所经过的几何路程来求相位差就不方便了。为此，我们引进光程的概念。

设有一频率为 ν 的单色光，它在真空中的波长为 λ_0，传播速度为 c；在折射率为 n 的介质中，速度为

$$v = \frac{c}{n}$$

波长为

$$\lambda_n = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n}$$

当该单色光在折射率在 n 的介质中所经过的几何路程为 x 时，相应的相位变化

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_n}x = \frac{2\pi}{\lambda_0}nx$$

上式也可以理解为光在真空中传播路程 nx 时所引起的相位变化。由此可见，同一频率的光在折射率为 n 的介质中经过距离 x 所引起的相位变化和在真空中经过距离 nx 所引起的相位变化是相同的。于是定义：光在某介质中所经过的几何路程 x 与这种介质折射率的乘积 nx 为光在该介质中相应于几何路程 x 的光程。引进光程这一概念，可以把单色光在不同介质中的传播都折算为

① 一个波列（光子）只有和自己叠加才能产生干涉现象，在量子物理中称为自相干。当然如果有两个全同（完全一样）的光子，它们的叠加也会产生干涉现象。这里需要说明的是，几列波（光子）可能会“同时”达到 P 点，这时它们仍然是各自干涉的，见后面的白光干涉。

NOTE

在真空中的传播，这样，可以方便地计算在不同介质中传播的光的相位差。相位差和光程差的关系是

$$\text{相位差}=\frac{\text{光程差}}{\lambda_0}\times 2\pi \tag{19-1}$$

上式说明：如果两束相干光在不同介质中传播，对干涉起决定性作用的是两束光的光程差，而不是它们的几何路程差。

在光的干涉、衍射实验中常使用透镜，下面我们简单讨论透镜对光程的影响。

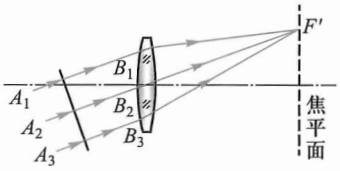


图 19-3 光通过透镜的光程

由几何光学可知，平行光入射至薄透镜时，所有光线都会聚于透镜的焦平面上的一点，形成亮点，如图 19-3 所示。这一结果说明，在会聚点各光线的相位是相同[①]的。如果我们作一垂直于这束平行光的平面，由于该平面是同相面，所以从该平面发出的垂直于该平面的光线经透镜直到会聚点，各光线的光程都是相等的。例如图 19-3 中，光线 A_1B_1F'、A_2B_2F'、A_3B_3F' 虽然经过的几何路程不同，但是它们的光程是相等的。由此可以得出结论：一束平行光通过透镜后会聚于焦平面上某一点，透镜的存在不会引起附加的光程差。

例 1

如图 19-4 所示，S_1 和 S_2 是同相的相干光源，由 S_1 和 S_2 所发出的两相干光在与光源等距离的 P 点相遇，它们到 P 点的距离为 d。S_1 发出的光只经过折射率为 n_1 的介质，而 S_2 发出的光要经过一段折射率为 n_2、厚度为 t 的介质。计算由 S_1 和 S_2 发出的光到达 P 点的相位差。

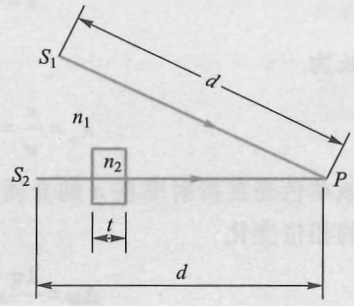


图 19-4 例 1 图

解 由 S_1 和 S_2 发出的光到达 P 点所经过的光程分别是 n_1d 和 $n_1(d-t)+n_2t$。它们的光程差

$$\delta=n_1(d-t)+n_2t-n_1d=(n_2-n_1)t$$

根据(19-1)式可求得相位差

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta=\frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2-n_1)t$$

由所求得的光程差或相位差，可进一步讨论在 P 点的干涉是加强还是减弱。

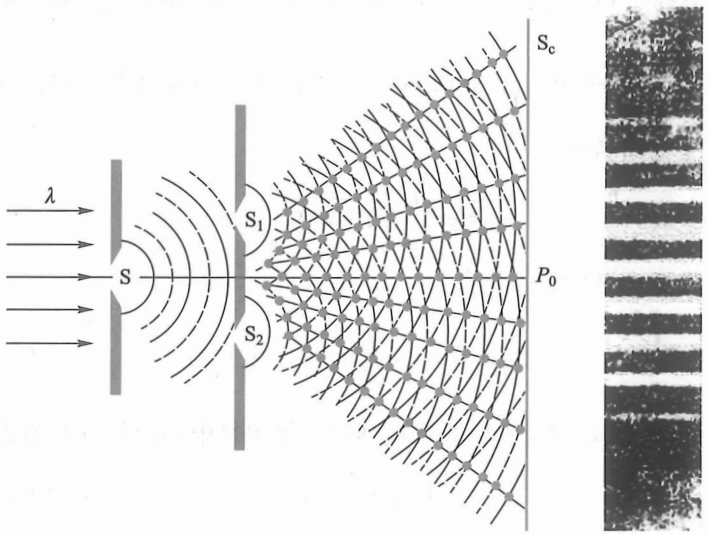
① 光学里有一个费马原理：光总是走光程最短的路径。我们可以将两个透镜平行同轴放置，在一个透镜的焦点上放置一个光源。光经过第一个透镜形成平行光；再经过第二个透镜，会聚在第二个透镜的焦点处。因此光从第一个透镜焦点到第二个透镜焦点经过的光程是最短的，无论沿哪条路径皆是如此。因此沿这些路径的光程都是相等的。

19-4 杨氏双缝实验

NOTE

英国科学家托马斯·杨在1801年首先用实验的方法研究了光的干涉现象。他最初所做的干涉实验是让日光通过一针孔S，再通过离S一段距离的两针孔S_1和S_2，从而实现两光束的相干叠加。后人重复此实验时，把针孔改为狭缝，并称该实验为杨氏双缝实验。

现代的杨氏双缝实验装置如图19-5(a)所示。单色平行光垂直照射到开有狭缝S的不透明的遮光板上，通过S形成一柱面光波。然后光再入射到后面另一开有两条狭缝S_1和S_2的遮光板，S_1和S_2，到S的距离相等，且均与S平行。光通过S_1和S_2，又形成两个柱面波并在空间交叠起来。从S_1和S_2透出的光波，是从同一波阵面上分离出来的，是相干光波，在它们的交叠区域将产生干涉现象。若在S_1和S_2后放一屏幕S_c，在S_c上将出现一组稳定、和缝平行、明暗相间的直条纹，称为干涉条纹，如图19-5(b)所示。下面，我们从干涉原理出发，对干涉条纹的形成及其特点作定量分析。



(a) 杨氏双缝实验简图　　(b) 双缝干涉条纹

图19-5

如图19-6所示，设S_1和S_2之间的距离为d，其中点为M，到屏幕S_c的距离为D。在屏幕上任取一点P，P到S_1和S_2的距离分别为r_1和r_2。从S_1和S_2所发出的光到达P点的波程差为

$$\delta = r_2 - r_1 \approx d\sin\theta$$

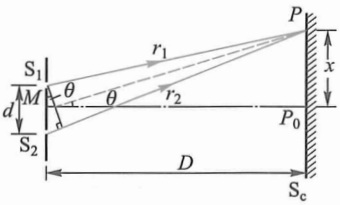


图19-6　干涉条纹计算用图

NOTE

式中，θ 是 PM 与 S_1S_2 的中垂线 P_0M 之间的夹角。通常实验中，$D \gg d$，$D \gg x$，因此这一夹角是非常小的。

由波动理论可知，若入射单色光的波长为 λ，则当

$$\delta = d\sin\theta = \pm k\lambda \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{19-2}$$

时，P 点因两光波干涉相互加强而成为亮点，在 S_c 上产生通过 P 点的一条明纹，其中 k 称为明条纹的级次。相应于 $k=0$ 的明条纹称为零级明条纹或称中央明纹[①]。相应于 $k=1,2,\cdots$ 的分别称为第一级、第二级……明纹，每一级明纹都有两条，它们对称地分布在中央明纹的两侧。如果

$$\delta = d\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{19-3}$$

则 P 点因两光波干涉相互减弱而成为暗点，在 S_c 上出现一条通过 P 点的暗纹，相应于 $k=0,1,2,\cdots$ 的暗纹称为第一级、第二级……暗纹。

如果两光束到达 P 点时的波程差对上述两条件均不满足，则 P 点光强介于最明和最暗之间。

综上所述，在干涉区域内，我们在屏幕上可以看到以中央明纹为中心的两侧对称的明暗相间的干涉条纹。设 P 点到屏幕上的对称中心 P_0 点的距离为 x，从图 19-6 可得 $\tan\theta = \frac{x}{D}$，当 θ 很小时，$\tan\theta \approx \sin\theta \approx \frac{x}{D}$，利用(19-2)式和(19-3)式可得到的各级明纹中心的位置为

$$x_k = \pm k\frac{D}{d}\lambda, \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{19-4}$$

各级暗纹中心的位置为

$$x_k = \pm(2k+1)\frac{D}{2d}\lambda, \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{19-5}$$

从(19-4)式和(19-5)式可得到的各级明纹中心的位置差值为

$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda \tag{19-6}$$

此 Δx 称为条纹的间距。由(19-6)式可知，Δx 与条纹级次 k 无关，即干涉条纹是等距分布的。若在实验中测得 D 和 d 各量，又测出条纹的间距 Δx，则可算出入射单色光的波长。杨根据他的实验在历史上第一次测定了光的波长。

① 零级的含义是指两干涉光线间的光程差为零。

以上讨论的是以单色光入射的情形。如果是白光入射，屏上的干涉条纹除中央明纹中心是白色外，其余各级是彩色条纹。这是因为不同波长的光，所产生的干涉条纹的位置是不同的。对不同波长光的明纹，除中央明纹中心都重合而显示白色外，其余各级因略有分离可显示彩色。级次越高，分离越大，而且还会发生不同级次的条纹重叠以至一片模糊分不清条纹的情况。白光干涉条纹的这一特点提供了判断零级干涉条纹的可能性，在干涉测量中常用到它。

杨氏双缝实验是确定光的波动学说的关键性实验。在此之后，又出现了一系列新的干涉实验，其中比较著名的有菲涅耳在1828年所做的双棱镜、双面镜干涉实验，劳埃德（H. Lloyd）在1834年所做的劳埃德镜干涉实验等。

NOTE

19-5 劳埃德镜实验 半波损失

劳埃德镜实验光路如图19-7所示。S_c是一屏幕，MN是一块平面反射镜，S是一狭缝光源。从S射出的光一部分直接射到屏幕S_c上，另一部分以接近90°的入射角射向平面镜MN，然后反射到屏幕S_c上。这两部分光是相干光，在它们相遇的区域会产生干涉现象。图中画有阴影的区域表示相干光叠加的区域。若将S_c放在阴影区域，则在S_c上可看到明暗相间的干涉条纹。

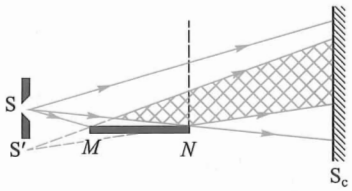


图19-7 劳埃德镜实验简图

如果把反射光视为由虚光源S′发出的，S′是S经MN反射所成的虚像，则S′和S构成一对相干光源。劳埃德镜中干涉条纹的计算和杨氏双缝实验完全类似，不过在计算由S′发出的光的波程时，必须考虑一个“半波损失”。这是因为电磁波理论告诉我们，在正入射和掠入射的情况下，光从光疏介质射向光密介质，在界面的反射光有相位π的突变，即相当于有$\lambda/2$的路程改变，所以通常称为“半波损失”。如果把屏幕移近到和平面镜相接触，由于从S和S′发出的光到接触点N的路程相等，接触处似乎应出现明纹，但实验结果却显示N处为一暗纹。这表明，直接射到屏幕上的光和由镜面反射的光在N处相位相反。由于直接入射的光不可能有相位的变化，所以只能认为光从空气掠射向玻璃反射时，反射光有一相位π的变化。电磁波中关于“半波损失”的这一结论，在劳埃德镜实验中得到证实。

19-6 薄膜干涉

NOTE

光的干涉现象是多种多样的。上几节我们讨论的是利用一定的装置来观察光的干涉现象。实际上,在自然界中我们也能看到光的干涉现象。例如,我们在太阳光下常看到浮于平静的水面上的油膜呈现的彩色图案;在太阳光下观察吹起的肥皂泡时,也能看到类似的现象。这些彩色图案,是自然光在薄膜两表面的反射光相互干涉形成的。这种由薄膜两表面的反射光(或透射光)所产生的干涉称为薄膜干涉。一般对薄膜干涉现象的研究是比较复杂的,但实际意义最大的是厚度均匀的薄膜所产生的等倾干涉以及厚度不均匀的薄膜所产生的等厚干涉。下面我们分别讨论这两种情况。

1. 匀厚薄膜干涉(等倾干涉)

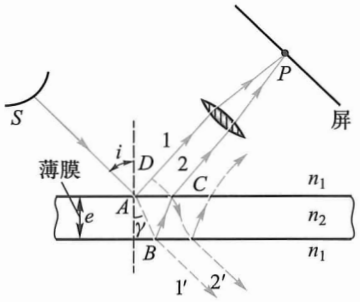


图 19-8 等倾干涉

如图 19-8 所示,设厚度为 e、折射率为 n_2 的平面薄膜处于折射率为 n_1 的介质中。光源中一点 S 发出的一束极细的光线以入射角 i 投射到膜上表面的 A 点,其中一部分反射成光线 1;另一部分折射入膜内并在膜下表面的 B 处反射至 C 点,又折射回到膜的上方成为光束 2。因为光线 1 和 2 是从同一条光线分离出来的,所以它们满足相干光的条件;又因为它们的能量也是从同一条光线中分离出来的,而能量和振幅有关,所以这种产生相干光的方法称为分振幅法。

由几何光学知,1 和 2 这两束相干光是平行的。在实验中,为了观察干涉条纹,在右上方加一透镜,并在透镜的焦平面上放一光屏(也可用眼直接观察)。这两束光经过透镜的会聚,将相交于屏上的 P 点而发生干涉,P 点的光强取决于两光束的光程差。为了计算光程差,从 C 点作一垂直于光线 1 的垂线 CD,则 1 和 2 两光线的光程差为

$$\delta = n_2(|AB|+|BC|) - n_1|AD| + \frac{\lambda}{2} \tag{19-7}$$

式中 $\lambda/2$ 是由半波损失而附加的光程差。电磁理论指出,当薄膜(n_2)放在介质(n_1)中时,无论 $n_1>n_2$ 还是 $n_2>n_1$,薄膜上下表面反射光之间由于相位突变引起的附加光程差均为 $\lambda/2$。

将 $|AB| = |BC| = \dfrac{e}{\cos\gamma}$, $|AD| = |AC|\sin i = 2e\tan\gamma\sin i$ 代入

(19-7)式,得

$$\delta=2n_2\frac{e}{\cos\gamma}-2n_1e\tan\gamma\sin i+\frac{\lambda}{2}$$

再利用折射定律 $n_1\sin i=n_2\sin\gamma$,有

$$\delta=2n_2e\cos\gamma+\frac{\lambda}{2} \tag{19-8}$$

或

$$\delta=2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}+\frac{\lambda}{2} \tag{19-9}$$

于是,反射光干涉出现明纹和暗纹的条件为

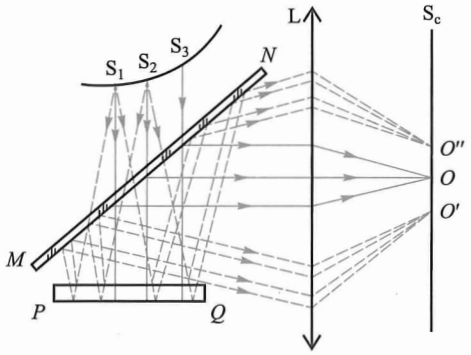
$$\delta=2e\sqrt{n_2^2-n_1^2sin^2 i}+\frac{\lambda}{2}=\begin{cases}k\lambda, & k=1,2,\cdots,\text{明纹}\\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\cdots,\text{暗纹}\end{cases} \tag{19-10}$$

由(19-9)式可知,对给定的匀厚薄膜来讲,光程差完全由入射角 i 决定。凡有相同入射角的光线,经膜上、下表面反射后产生的相干光均有相同的光程差,从而对应于干涉图样中的同一级条纹,故称这种干涉为等倾干涉,相应的干涉条纹称为等倾干涉条纹。

实验上观察反射光的等倾干涉条纹可用如图 19-9(a)所示的方法。其中 S 为扩展光源,MN 为半透射半反射的平面镜,PQ 为一薄膜,L 为透镜,S_c 为置于透镜焦平面上的屏。我们可把扩展光源看成是由许多点光源组成的。先考虑某一点光源所发出的光线,入射到薄膜上有相同入射角的光线应在同一锥面上,它们的反射光经透镜会聚后应分别相交于焦平面上的同一个圆周上。因此,在屏上可形成一组明暗相间、同心环状的干涉条纹。光源上每一点光源发出的光都会产生一组相应的干涉环。因为干涉环的位置只取决于入射角,与点光源所在的位置无关,因而所有点光源发出光线产生的干涉环都将重叠在一起,使干涉条纹更为明亮、清晰。因此,在观察等倾干涉时,扩展光源成为有利的条件。

扩展光源所形成的等倾干涉条纹如图 19-9(b)所示。它是一组内疏外密、明暗相间的圆环。由于入射角 i 越小,对应的干涉圆环条纹的半径越小,故 $i=0$ 对应的是中央环心。由(19-10)式可知,$i=0$ 时,δ 取最大值,相应地 k 取最大值,所以中央环心级次最高。如果在实验中能使膜慢慢变厚,则随 e 增大,环心的级次 k 也增大,这时可观察到所有的圆环在扩大,在环心处不断有新的环冒出来。如果慢慢减小薄膜的厚度,则会看到所有圆环都向中心收缩,并不断在中心处消失。

图 19-9



(a) 产生等倾干涉条纹的实验光路图



(b) 等倾干涉条纹

NOTE

除了反射光的干涉现象外，透射光也有干涉现象。如图 19-8 所示，类似于前面的讨论，我们可以推出两透射光束 1′和 2′的光程差为

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}$$

进一步地，我们可以得出透射光干涉出现明纹、暗纹的条件为

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} = \begin{cases} k\lambda, & k = 0,1,2,\cdots, \text{明纹} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}, & k = 0,1,2,\cdots, \text{暗纹} \end{cases} \tag{19-11}$$

和(19-10)式比较可知，对同一方向的入射光来说，当反射光相互加强时，透射光将相互减弱；当反射光相互减弱时，透射光将相互加强。它们的干涉条纹是互补的。

例 2

一厚度均匀、折射率 $n_1 = 1.33$ 的肥皂膜浮在一折射率 $n_2 = 1.50$ 的玻璃片上。用波长可连续变化的平面光波垂直照射肥皂膜，观察其反射光：在 $\lambda_1 = 525.0$ nm 处有一干涉极小，$\lambda_2 = 612.5$ nm 处有一干涉极大。若在此干涉极大和极小之间没有另外极值，求此肥皂膜的厚度 e。

解 由于肥皂膜的折射率介于空气和玻璃的折射率之间，所以光从空气垂直入射至肥皂膜，在膜上、下表面反射的反射光均存在着半波损失，即两束反射光的光程差为

$$\delta = 2n_1 e$$

反射光干涉加强或减弱的条件为

$$\delta = 2n_1 e = \begin{cases} k\lambda, & k = 0,1,2,\cdots, \text{加强} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}, & k = 0,1,2,\cdots, \text{减弱} \end{cases}$$

由于 e 恒定，由上式可知，反射光出现干涉极大或极小仅取决于入射光的波长。据题意可得

$$2n_1e=\left(k_1+\frac{1}{2}\right)\lambda_1$$

$$2n_1e=k_2\lambda_2$$

$$k_1=k_2=k$$

解上述三式，得

$$k=\frac{\lambda_1}{2(\lambda_2-\lambda_1)}=\frac{525.0}{2\times(612.5-525.0)}=3$$

$$e=\frac{k\lambda_2}{2n_1}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{4n_1(\lambda_2-\lambda_1)}$$

$$=\frac{525.0\times612.5}{4\times1.33\times(612.5-525.0)}\ \text{nm}$$

$$=690.8\ \text{nm}$$

2. 劈尖干涉(等厚干涉)

前面我们介绍了光波入射到厚度均匀的薄膜上时产生的干涉现象，接下来我们将讨论膜厚度不均匀的情况。如图 19-10(a)所示，薄膜上表面略有倾斜，和下表面构成一夹角 θ 很小的楔形膜，简称劈尖。当光波的入射角不大时，膜上、下表面的反射光将在膜表面附近相交产生干涉。实际上，若使平行单色光近于垂直地入射到劈面上，如图 19-10(b)所示，则因为劈尖角很小，从劈尖上、下两表面反射的光可看作是垂直反射的。为了定性地说明干涉的形成，考虑一波长为 λ 的光线垂直入射到劈尖 A 处的情况。设此处膜的厚度为 e，则上、下两表面的反射光 1 和 2 的光程差为

$$\delta=2n_2e+\frac{\lambda}{2}$$

其中 $\lambda/2$ 来自反射光的半波损失。因此，劈尖反射光干涉出现明纹和暗纹的条件为

$$\delta=2n_2e+\frac{\lambda}{2}=\begin{cases}k\lambda, & k=1,2,\cdots, \quad \text{明纹}\\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\cdots, \quad \text{暗纹}\end{cases}$$

(19-12)

由上式可知，在劈尖干涉中，反射光的光程差完全取决于膜的厚度。膜厚度相同的各点，反射光的光程差相同，有相同的 k 值，构成同一级干涉条纹。因此，这种干涉称为等厚干涉，所形成的干涉条纹称为等厚条纹。

实验上常用如图 19-11(a)所示的装置观察等厚干涉条纹。图中 G_1 和 G_2 为两片平板玻璃，一端接触，一端夹一张薄纸。这样，G_1 的下表面和 G_2 的上表面就构成一空气劈尖。M 为半反射半透射玻璃片，T 为显微镜，S 为放在透镜 L 焦点上的单色光源。

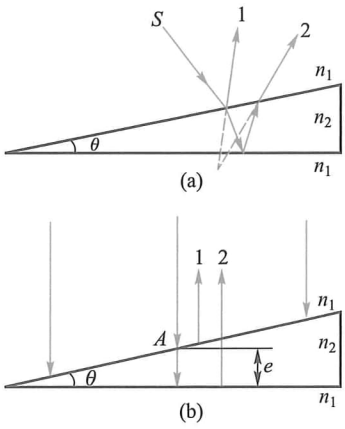
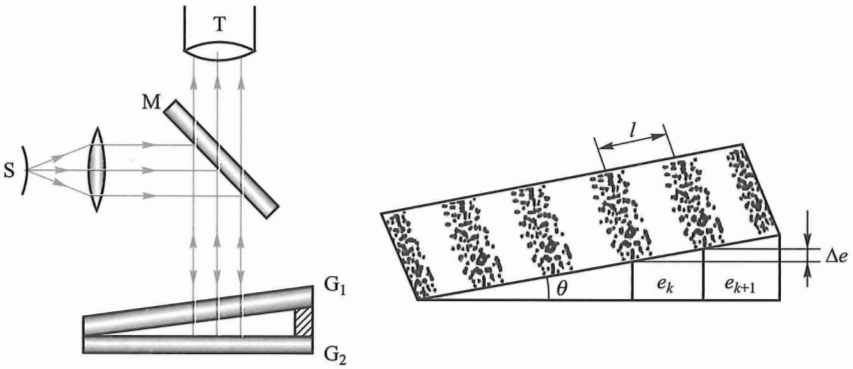


图 19-10 劈尖干涉

NOTE

自 S 发出的单色光经透镜后成为平行光，再经 M 反射后，垂直入射到空气劈尖上产生等厚干涉，于是从显微镜中可观察到放大的明暗相间的等厚干涉条纹。如图 19-11(b)所示，干涉条纹是一系列平行于棱边的明暗相间的等间距条纹。在棱边处 $e=0$，两反射光的光程差为 $\lambda/2$，因此在该处应看到暗纹，而实验结果正是这样。这是“半波损失”的又一个有力的证据。

图 19-11



(a) 劈尖干涉实验观察装置　　(b) 等厚干涉条纹

NOTE

由(19-12)式还可求出任何相邻明纹(或相邻暗纹)之间的厚度差 Δe 以及它们之间的距离 l。设第 k 级和第 $k+1$ 级暗纹处的膜厚分别为 e_k 和 e_{k+1}，由(19-12)式可得

$$2n_2e_k+\frac{\lambda}{2}=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$2n_2e_{k+1}+\frac{\lambda}{2}=(2k+3)\frac{\lambda}{2}$$

两式相减得

$$\Delta e=e_{k+1}-e_k=\frac{\lambda}{2n_2} \tag{19-13}$$

由图 19-11(b)可求得

$$l=\frac{\Delta e}{\sin\theta}=\frac{\lambda}{2n_2\sin\theta} \tag{19-14}$$

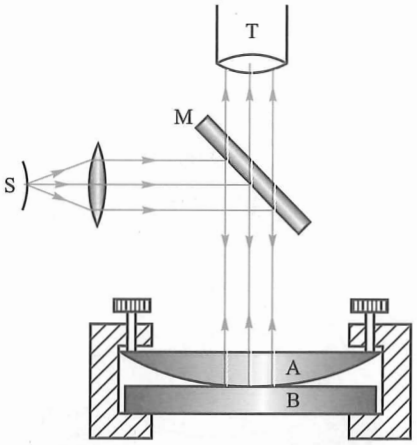
对明纹也可求得同样的结论。由(19-14)式可知，条纹间距 l 和膜的厚度 e 无关，即条纹是等距的；但 l 和劈尖角 θ 有关，θ 越大，条纹间距越小，条纹越密。θ 过大时，条纹过密，明暗难辨而成模糊一片，观察不到干涉现象，因此干涉条纹只能在劈尖角很小时才能观察到。

3. 牛顿环

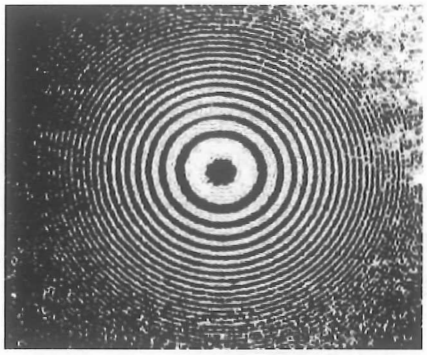
图 19-12(a)是观察牛顿环的实验简图。在一块平玻璃板 B

NOTE

上，放一曲率半径 R 很大的平凸透镜 A，于是透镜的凸面和平玻璃板的上表面之间形成一个类似于劈尖的空气层。当平行光垂直入射时，在空气层的上、下两表面的反射光将发生干涉。如果考虑在空气层厚度为 e 处的反射，则在上、下两表面反射光的光程差 $\delta=2e+\lambda/2$。由于这一光程差取决于空气薄层的厚度，所以这种干涉也是一种等厚干涉。又由于空气层厚度相等处是以 O 为圆心的同心圆，所以干涉条纹是一系列明暗相间的同心圆环，如图 19-12(b)所示，称为牛顿环。



(a) 观察牛顿环实验简图



(b) 牛顿环的照片

图 19-12

形成明环和暗环的条件为

$$\delta=2e+\frac{\lambda}{2}=\begin{cases}k\lambda, & k=1,2,\cdots, \quad \text{明环}\\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\cdots, \quad \text{暗环}\end{cases} \tag{19-15}$$

根据这一条件可求出相应明环和暗环的半径。由图 19-13 所示的几何关系，可得

$$r^2=R^2-(R-e)^2=2Re-e^2$$

式中 e 为空气层的厚度，r 为相应圆环半径。因为 $R\gg e$，上式中 e^2 可略去，于是得

$$r=\sqrt{2Re}$$

再利用(19-15)式可得第 k 级明环半径为

$$r_k=\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)R\lambda}, \quad k=1,2,3,\cdots \tag{19-16}$$

第 k 级暗环半径为

$$r_k=\sqrt{kR\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots \tag{19-17}$$

在牛顿环实验中，常通过测出某一级明环(或暗环)所对应

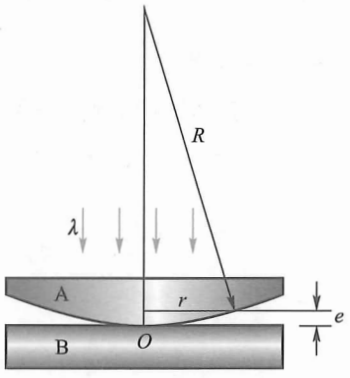


图 19-13 计算牛顿环半径用图

NOTE

的半径来求出入射光的波长或透镜的曲率半径。

需要注意的是，虽然牛顿环和等倾干涉条纹都是内疏外密、明暗相间的圆环，但它们是有区别的。在等倾干涉中，中心环的级次是最高的（光程差最大）；而对牛顿环来说，中心环的级次是最低的。如果我们在实验中用手指向下按一下上方的透镜，则会看到牛顿环的环纹从中心冒出并向外扩大。

与等倾干涉相似，除反射光存在等厚干涉外，透射光也发生干涉。而且，透射光干涉产生的明环、暗环和反射光干涉产生的明环、暗环正好是互补的。

例 3

在透镜磨制中，经常利用牛顿环的干涉条纹来测定凹曲面的曲率半径。方法是：将已知曲率半径的平凸透镜放置在待测的凹面上（如图 19-14 所示），则在两镜面之间形成空气层，可以观察到环状的干涉条纹。试证明第 k 个暗环的半径 r_k、凹面曲率半径 R_2 和凸面曲率半径 R_1 以及光波波长 λ 之间的关系式为

$$r_k^2=\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}k\lambda$$

如果在实验中测得第 40 个暗环半径为 $r_{40}=2.25\ \text{cm}$，而 $R_1=1.023\ \text{m}$，$\lambda=589.3\ \text{nm}$，则 R_2 为多大？

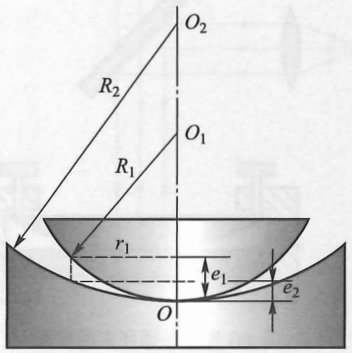


图 19-14 例 3 图

解 由图知

$$r_k^2=R_1^2-(R_1-e_1)^2=R_2^2-(R_2-e_2)^2$$

$$r_k^2\approx 2R_1e_1,\quad r_k^2\approx 2R_2e_2$$

$$e=e_1-e_2=\frac{r_k^2}{2R_1}-\frac{r_k^2}{2R_2}$$

再根据暗环条件

$$\delta=2e+\frac{\lambda}{2}=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

得

$$\frac{r_k^2}{R_1}-\frac{r_k^2}{R_2}=k\lambda$$

于是有

$$r_k^2=\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}k\lambda$$

$$R_2=\frac{r_k^2}{\frac{r_k^2}{R_1}-k\lambda}$$

$$=\frac{(2.25\times10^{-2})^2}{\left[\frac{(2.25\times10^{-2})^2}{1.023}-40\times589.3\times10^{-9}\right]}\ \text{m}$$

$$=1.074\ \text{m}$$

19-7 干涉现象的应用

光的干涉现象在实际中有许多应用。例如，利用干涉条纹的位置、形状和间距等的变化，可以测定微小的角度、微小的厚度、单色光的波长和介质的折射率等；利用光的干涉使光强分布改变的现象，可制成反射率极高的反射镜、滤光片等。下面，我们就列举一些这方面的应用。

NOTE

1. 测量长度的微小改变

从劈尖干涉可知，当其劈尖角保持不变，而厚度发生变化时，等厚干涉条纹的间距不发生改变，但干涉条纹要发生移动。因为相邻条纹的厚度差为 $\lambda/2n$，所以当劈尖的厚度变化为 $\lambda/2n$ 时，干涉条纹将移动一个条纹的间距。通过测量干涉条纹的移动，就可算出微小厚度的变化。利用这个原理制成的干涉膨胀仪，可测量很小的固体样品的线膨胀系数。

图 19-15 是测定固体线膨胀系数的原理图，其中 C 和 C' 是线膨胀系数极小的石英环，AB 和 $A'B'$ 是平板玻璃，W 是上表面磨成稍微倾斜状的样品，因此平板玻璃 AB 的下表面和样品的上表面形成一空气劈尖。当波长为 λ 的单色光自 AB 板上垂直入射时，此空气劈尖上将产生等厚干涉条纹。若加热仪器，则样品膨胀时，空气膜的厚度将改变，可看到干涉条纹的移动；若仪器的温度从 t_0 升至 t，可观察到条纹移动的数目为 N，则空气劈尖的厚度改变量为

$$\Delta L = N \cdot \frac{\lambda}{2}$$

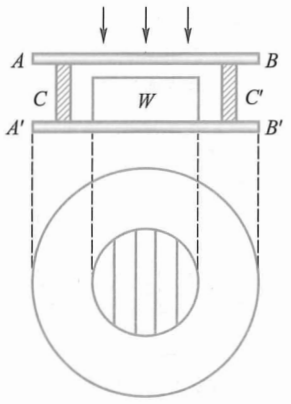


图 19-15 干涉膨胀仪原理图

如果我们忽略石英环 C 和 C' 的长度变化，ΔL 就为样品在温度 t 时的长度 L 和 t_0 时的长度 L_0 之差，即

$$L - L_0 = N \cdot \frac{\lambda}{2}$$

由此可求出样品的线膨胀系数 α 为

$$\alpha = \frac{L - L_0}{L_0(t - t_0)} = \frac{N\lambda}{2L_0(t - t_0)}$$

干涉膨胀仪的优点在于只需很小的样品便可进行测量。我们知道，如果能把物体制成长杆的形状，用普通的方法就可测量它的线膨胀系数。但是如果只得到小块样品，要测出线膨胀系数，必须要测量一个很小的长度变化，而这用普通方法是很难测

NOTE

准的。光的干涉方法则能测出这样微小的长度变化。

2. 检查工件表面的平整度

光学仪器所用的棱镜或透镜要求具有与理想的几何形状相接近的形状，如精确的平面和球面等。检测这样高精度的表面，常用干涉的方法。

图 19-16 表示检查平面的情况。$A'B'$为一待测平面，AB 为放在 $A'B'$上的一标准平面，一端 B 处放有一极薄的垫片，这使得标准平面和待测平面之间形成一空气劈尖。当单色光垂直入射时，劈尖上将观察到明暗相间的等厚条纹。根据条纹的形状，便可推知待测平面的质量。下面我们来看几种简单的情形。如果待测平面是一精确的平面，观察到的等厚条纹应是等距离的平行直条纹，如图 19-17(a)所示。如果待测平面沿 $A'B'$方向有一凹痕，由于凹痕处的空气膜的厚度比其两侧平面部分大，等厚直条纹在凹痕处将向空气膜较薄的 A 处发生弯曲，此时的干涉条纹如图 19-17(b)所示。在实验中测出弯曲条纹的偏离距离 d，以及相邻条纹的间距 l，则可求出凹痕的深度 h 为

$$h=\frac{d}{l}\frac{\lambda}{2}$$

如果待测平面沿 $A'B'$方向有一凸痕，将观察到如图 19-17(c)所示的干涉条纹，根据条纹的弯曲程度可求出凸痕的高度。一般情况下，待测表面的缺陷不会是十分规则的，因此观察到的等厚条纹也比较复杂。

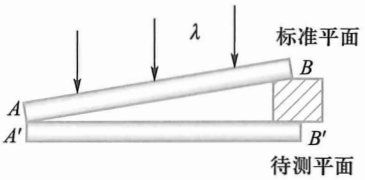
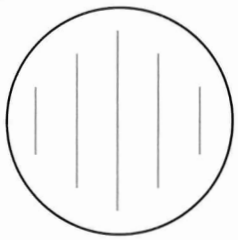
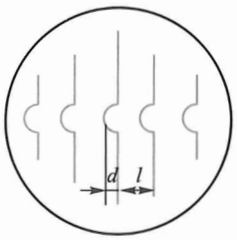


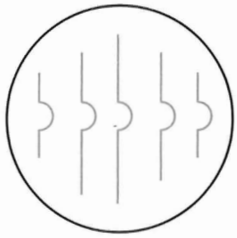
图 19-16 用干涉法检测平面平整度



(a) 表面平整



(b) 表面有凹痕



(c) 表面有凸痕

图 19-17

3. 减反射膜(增透膜)和高反射膜

(1) 减反射膜

在各种光学仪器中，为了矫正像差或其他原因，往往采用多透镜的镜头。例如，一架双筒望远镜由 6 个透镜组成，在潜水艇上用的潜望镜中约有 20 个透镜。由于每一个透镜有两个与空气相接的表面，所以一般较复杂的光学仪器常有几十个界面。当光在仪器中传播时，每遇一个界面，光的能量并不全部透过界面，而是总有一部分从界面上反射回来。如果每个界面因反射光能损失 4%，则经过几十个界面光能的损失就非常大。计算表明，双筒望远镜光能损失接近 45%，而潜望镜损失则高达 80%。这种界面

的反射不仅会损失大量的光能从而使像的亮度减小，而且还会造成有害的杂光而影响像的清晰度。为了避免反射造成的不利影响，近代光学仪器常采用真空镀膜的方法，在透镜表面镀上一层适当材料的透明介质膜。它能减小光的反射，增强光的透射，因此被称为减反射膜。

减反射膜是薄膜干涉原理的一种实际应用。如图 19-18 所示，在折射率为 n 的玻璃表面镀上一层折射率为 n'（$n'<n$）的氟化镁（MgF_2），当光从空气垂直入射到膜上时，膜上、下两表面的反射光将因叠加而发生干涉。如果我们适当选择膜的厚度，可使反射光为干涉相消，从而消除反射光而增强透射光。根据反射光相消的条件

$$\delta=2n'h=(2k+1)\frac{\lambda}{2},\quad k=0,1,2,\cdots$$

可知，只要令膜的厚度为 $\lambda/4n'$，$3\lambda/4n'$，…，这些膜就为减反射膜。为了减小薄膜对光能的吸收，应该用较薄的膜，通常都采用厚度为 $\lambda/4n'$ 的膜。

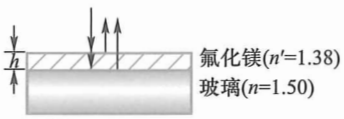


图 19-18 减反射膜

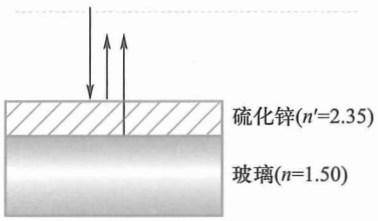
NOTE

由上面的讨论可以看出，减反射膜只能使个别波长的反射光达到极小，对于其他波长相近的反射光也有不同程度的减弱。至于控制哪一波长的反射光达到极小，视实际需要而定。对于助视光学仪器，一般选择对视觉及普通照相底片较敏感的波长为 $\lambda=550.0$ nm 的绿光来消除反射，因此减反射膜的反射光中呈现与它互补的蓝紫色。这也是平时当我们注视照相机镜头时，看到蓝紫色的原因。

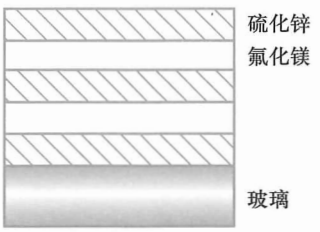
（2）高反射膜

与减反射膜相反，有的光学元件要求反射越强越好。例如通常的反光镜及激光器谐振腔中的反射镜等。为了增强反射，通常也是在镜面上镀上一层透明的介质膜。它能降低透射，提高反射，所以称为高反射膜。

如图 19-19（a）所示，在折射率为 n 的玻璃上镀一层折射率为 n'（$n'>n$）的硫化锌（ZnS）薄膜。如果膜的厚度是 $\lambda/4n'$，则膜上、下表面所反射的光将发生干涉加强而增加反射光。计算表明，依靠单膜是不能把反射率（反射光强与入射光强之比）提高太多的。例如在玻璃上镀一层硫化锌，其反射率约为 34%。为进一步提高反射率，可采用多层膜。如图 19-19（b）所示，在玻璃基底上，依次交替地镀上硫化锌和氟化镁，当镀 3 层氟化镁和 4 层硫化锌时，反射率可达 70%左右，而 13 层这样的膜系，可使反射率高达 99%以上。用这样的方法，我们可以得到反射率极高的镜片。



(a) 高反射膜



(b) 多层高反射膜

图 19-19

19-8 迈克耳孙干涉仪

上节介绍的是干涉现象应用的几个例子。实际上，利用干涉现象去测量各种物理量也是十分广泛的应用，为此发展出许多专门的光学干涉仪，如精密机械中检测表面光洁度的显微干涉仪、测量气体或液体折射率的瑞利干涉仪、测量星体视直径和双星间距的天体干涉仪等。上述多种干涉仪，都是从迈克耳孙干涉仪的基础上发展出来的。虽然迈克耳孙干涉仪现已被其他更完善的干涉仪所代替，但了解其基本原理仍具有重要的意义。

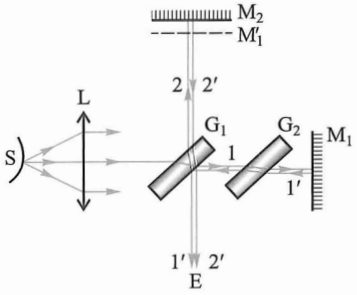


图 19-20 迈克耳孙干涉仪光路图

图 19-20 是迈克耳孙干涉仪的光路图。图中 M_1 和 M_2 是一对精密磨光的平面反射镜，其中 M_1 是固定的，M_2 由螺旋测微器控制可作微小的移动。G_1 和 G_2 是两块材料相同、厚度相等的平行玻璃片，它们和 M_1、M_2 均成 45°角。在 G_1 的背面镀有半透明的薄银层，使从光源射来的光线在这里分为强度差不多相等的两部分，因此 G_1 称为分光板。

由面光源 S 发出的光射在 G_1 上，其中一部分在薄银层上反射，另一部分穿过薄银层。经薄银层反射的光线 2 经 M_2 反射，再经过 G_1 向 E 处传播，如图 19-20 中所示的光线 2′。穿过薄银层的光线 1 通过 G_2 射向 M_1，经 M_1 反射又通过 G_2 到达 G_1，经薄银层再次反射也向 E 处传播，如图 19-20 中所示的光线 1′。由于光线 1′和 2′来自同一束光，它们是相干光，所以在它们相遇处观察，可见到干涉条纹。由光路图可以看出，光线 22′三次通过了平板玻璃；G_2 的存在是为了使光线 11′也三次通过厚度相等的玻璃板，从而避免 1′和 2′存在较大的光程差，并使得干涉仪对不同波长的光 1′和 2′的光程差只与 M_1 和 M_2 的相对位置及入射角有关，而与波长无关。

在图 19-20 中，M_1' 是 M_1 经薄银层所形成的虚像。来自 M_1 的反射光线 1′可视为从 M_1' 处反射的，因此干涉所产生的图样就如同由 M_1' 和 M_2 之间的空气膜产生的一样。如果 M_1' 和 M_2 不严格平行，M_1' 和 M_2 之间的空气层可等效成一空气劈尖，因此在视场中将观察到等厚干涉条纹。如果 M_1' 和 M_2 严格平行，M_1' 和 M_2 之间的空气层可等效成一匀厚空气膜，这时可观察到等倾干涉条纹。

我们知道，上述干涉条纹的位置取决于光程差，只要光程差有微小的变化，干涉条纹即发生移动。若入射光的波长为 λ，则当 M_2 向上或向下移动 $\lambda/2$ 的距离时，在视场中将看到干涉条纹平移一个条纹间距。数出视场中移过的条纹数目 N，即可求得

M_2 移动的距离为

$$d=N\frac{\lambda}{2}$$

上式表明，利用迈克耳孙干涉仪，已知光的波长可测定长度；已知长度可测定光的波长。迈克耳孙用它的干涉仪最先以光的波长测定了巴黎标准米棒的长度。他用镉(Cd)的红色谱线(λ_{Cd} = 643.846 96 nm)作为光源，测量了标准米的长度，结果为1 m 等于镉红线波长的 1 553 164.13 倍。由于氪(Kr^{86})的一条橙色谱线(λ_{Kr} = 605.780 210 5 nm)具有更好的单色性，1960 年第 11 届国际计量大会规定此波长(λ_{Kr})为长度的新标准：1 m = 1 650 763.73λ_{Kr}。随着科学技术发展的需要，这一波长标准也不够精确，于是 1983 年第 17 届国际计量大会对标准米作了新规定：1 m 等于真空中光在 1/299 792 458 s 时间间隔内所经过的距离。

NOTE

本章摘要

1. 普通光源发光机理

原子每次发光形成一有限长的波列，每个原子每次发光相互独立，各波列互不相干。

2. 获得相干光的方法

分波阵面法——如杨氏双缝实验。

分振幅法——如薄膜干涉。

3. 光程

相位差 $=\frac{2\pi}{\lambda_0}$光程差。

透镜不引起附加的光程差。

4. 杨氏双缝实验

条纹形状：明暗相间的等距直条纹。

明纹位置：$x=\pm\frac{D}{d}k\lambda$，　$k=0,1,2,\cdots$

暗纹位置：$x=\pm(2k+1)\frac{D\lambda}{2d}$，　$k=0,1,2,\cdots$

条纹间距：$\Delta x=\frac{D}{d}\lambda$

5. 薄膜干涉

(1) 等倾干涉

NOTE

条纹形状：明暗相间同心圆环。

明环条件：$2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}+\frac{\lambda}{2}=k\lambda$，　$k=1,2,\cdots$

暗环条件：$2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}+\frac{\lambda}{2}=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$，　$k=0,1,2,\cdots$

（2）等厚干涉

劈尖干涉：干涉条纹是明暗相间等间距直条纹。

牛顿环：干涉条纹是明暗相间同心圆环。

明纹条件：$2ne+\frac{\lambda}{2}=k\lambda$，　$k=1,2,3,\cdots$

暗纹条件：$2ne+\frac{\lambda}{2}=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$，　$k=0,1,2,\cdots$

6. 干涉现象的应用

（1）测微小长度。

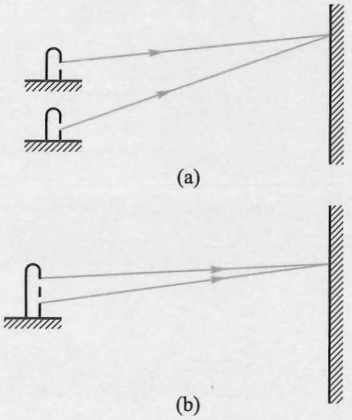
（2）检测平面。

（3）减反射膜和高反射膜。

7. 迈克耳孙干涉仪

思考题

19-1　如图所示，有两盏钠灯发出波长相同的光，照射到屏幕上，请问能否观察到干涉条纹？若改用一盏钠灯，其中部用黑纸遮住。则从钠灯上、下两部分发出的光照射到屏幕上时，能否观察到干涉条纹？



思考题 19-1 图

19-2　在杨氏双缝实验中，如果将其中一条狭缝稍稍加宽一些，屏幕上的干涉条纹有什么变化？

19-3　窗玻璃也是介质平板，为什么在日光照射下我们观察不到干涉条纹？

19-4　在双缝干涉实验中：

（1）当双缝间距 d 变小时，干涉条纹将如何变化？

（2）当缝光源 S 在垂直于轴线的方向向下或向上移动时，干涉条纹如何变化？

（3）若将双缝干涉实验装置全部浸入水中，干涉条纹如何变化？

19-5　我们从肥皂水中拉出一肥皂膜时，可看到一些彩色图案。把膜逐渐拉大，在其破裂前彩色图案消失而呈现黑色，这是为什么？

19-6　从一点光源发出的两束光在两种不同的介质中经过相同的几何路程，它们的光程是否相同？为什么在讨论光的干涉时要引入光程的概念？它们的物理意义如何？

19-7　牛顿环与等倾干涉条纹有何异同？实验上如何区分这两种干涉图样？

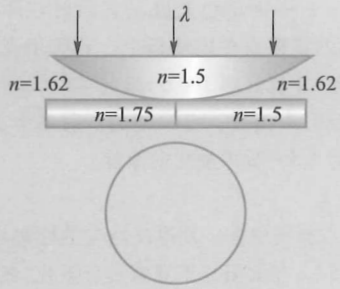
19-8 用两块平玻璃板构成的劈尖观察等厚条纹时：

(1) 若将劈尖上表面向上缓慢地平移，干涉条纹有什么变化？

(2) 若将劈尖角逐渐减少，干涉条纹有什么变化？

(3) 若在劈尖中充入折射率为 n 的液体，干涉条纹又将怎样变化？

19-9 用波长为 λ 的单色光垂直照射如图所示的装置，从下面观察透射光，试粗略地作出透射光的牛顿环图样。



思考题 19-9 图

19-10 在迈克耳孙干涉仪中，往往在其中一光路插入一块补偿板，这是为什么？

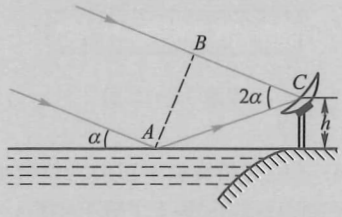
习题

19-1 汞弧灯发出的光通过一绿色滤光片照射两相距 0.60 mm 的狭缝，进而在 2.5 m 远处的屏幕上出现干涉条纹。测量相邻两明条纹中心的距离为 2.27 mm，试计算入射光的波长。

19-2 利用劳埃德镜观察 X 射线的干涉条纹，测得间距为 0.002 5 cm。设波长为 0.833 nm，光源到屏的距离为 3 m，问 X 射线点光源应放置在镜平面上方多高的地方？

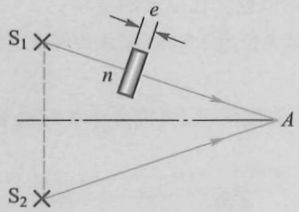
19-3 用很薄的云母片($n=1.58$)覆盖在双缝实验中的一条缝上，这时屏幕上的零级明纹移动到原来的第七级明纹的位置上。如果入射光波长为 550.0 nm，试问此云母的厚度为多少？

19-4 一射电望远镜的天线设在湖岸上，距湖面高度为 h。对岸地平线上方有一恒星正在升起，恒星发出波长为 λ 的电磁波。试求当天线测得第一级干涉极大时，恒星所在处的角位置 α。



习题 19-4 图

19-5 有两个同相的点光源 S_1 和 S_2，发出波长为 500 nm 的光，A 是它们连线的中垂线上的一点，若在 S_1 与 A 之间插入厚度为 e、折射率为 1.5 的薄玻璃片，A 点恰为第四级明纹中心，求玻璃片的厚度。



习题 19-5 图

19-6 在双缝干涉实验中，波长为 550 nm 的单色平行光垂直入射到间距为 2×10^{-4} m 的双缝上，屏到双缝的距离为 2 m。

(1) 求中央明纹两侧的两条第 10 级明纹中心的间距；

(2) 用一厚度为 6.6×10^{-6} m、折射率为 1.58 的玻璃片覆盖一缝后，零级明纹将移到原来的第几级明纹处？

19-7　一平面单色光波垂直照射在厚度均匀的薄油膜上，油膜覆盖在玻璃板上。若所用光源波长可以连续变化，并观察到 500.0 nm 与 700.0 nm 这两个波长的光在反射中消失。已知油的折射率为 1.30，玻璃的折射率为 1.50，试求油膜的厚度。

19-8　空气中有一片厚度均匀的肥皂水膜，折射率为 $n=1.33$。在太阳光下观察其反射光，在视线与薄膜法线成 45°角的方向上，薄膜是绿色（$\lambda=546$ nm）的，问薄膜最薄的厚度为多少？若垂直注视，薄膜将呈现什么颜色？

19-9　利用劈尖的等厚干涉条纹可测量很小的角度。今在很薄的劈尖玻璃板上，使波长为 589.3 nm 的钠光垂直入射。若相邻条纹间的距离为 5 mm，玻璃的折射率为 1.52，求此劈尖的夹角。

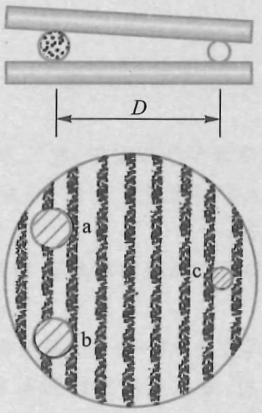
19-10　观察肥皂膜的等倾干涉。设入射角为 35°，肥皂膜折射率为 1.33，膜厚 670.0 nm。试问可见光中哪些波长将不会出现？反射光呈现何种颜色？

19-11　有一劈尖折射率 1.4，劈尖的夹角 $\theta=10^{-4}$ rad。当用某一单色光垂直入射时，测得相邻条纹的距离为 0.25 cm。

（1）求此单色光在空气的波长；

（2）若劈尖长为 3.5 cm，则总共可出现多少条明纹？

19-12　如图所示，将符合标准的轴承钢珠 a、b 和待测钢珠 c 一起放在两块平板玻璃之间。若垂直入射光的波长 $\lambda=0.58$ μm，问钢珠 c 的直径比标准小多少？如果距离 D 不同，对检测结果有何影响？

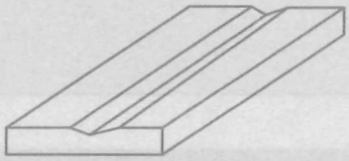


习题 19-12 图

19-13　如图所示，平晶玻璃（$n_1=1.50$）上刻有一截面为等腰三角形的浅槽，内装肥皂水（$n_2=1.33$）。若用波长为 $\lambda=600.0$ nm 的黄光垂直照射，从反射光中观察到肥皂水液面上共有 15 条暗纹。求：

（1）条纹的形状；

（2）液体最深处的深度。



习题 19-13 图

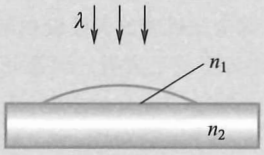
19-14　用复色光垂直照射一玻璃（$n=1.5$）劈尖。当观察反射光的干涉条纹时，测得波长为 600 nm 的黄光的第 m 级暗纹与波长为 550 nm 的绿光的第 $m+1$ 级暗纹重合。求该处玻璃的厚度。

19-15　如图所示，一滴油（$n_1=1.20$）放在平玻璃片（$n_2=1.52$）上，以波长 $\lambda=600.0$ nm 的黄光垂直照射。从反射光看到有多个亮环和暗环。问：

（1）最边缘处是亮环还是暗环？

（2）从边缘向中心数，第 5 个亮环处油的厚度是多少？

（3）若油滴逐渐扩大时，所看到的条纹将如何变化？



习题 19-15 图

19-16　（1）若用波长不同的光照射牛顿环，观察到用 $\lambda_1=600.0$ nm 时的第 k 个暗环与用 $\lambda_2=450.0$ nm 时的第 $k+1$ 个暗环重合，已知透镜的曲率半径为

190 cm，求用波长为 λ_1 的光照射时第 k 个暗环的半径。

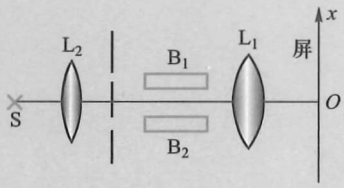
（2）又如在牛顿环中由波长为 500.0 nm 的光照射时的第 5 级明环与用 λ_3 的光照射时的第 6 级明环重合，则波长 λ_3 为多大？

19-17 用牛顿环装置可以测量透明液体的折射率。设平凸透镜的曲率半径为 1.00 m。在空气中测得某级等厚干涉环的直径为 4.73 mm；而将此装置放入某液体中测得同级环的直径为 4.10 mm。问此液体的折射率为多少？

19-18 在折射率 $n_1=1.52$ 的镜头表面涂有一层折射率 $n_2=1.38$ 的氟化镁增透膜，如果此膜适用于波长 $\lambda=550.0$ nm 的光，膜的最小厚度应为多少？

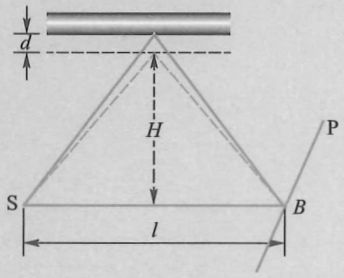
19-19 瑞利干涉仪的光路如图所示。B_1、B_2 两管内物质的折射率分别为 n_1 和 n_2，管长均为 l，屏上条纹间距为 Δx。如果测出这时干涉条纹相对于两管均抽成真空时，移动了 h，试证明两种物质的折射率差值为

$$\Delta n=n_2-n_1=\frac{h\lambda}{l}(\Delta x)^{-1}$$



习题 19-19 图

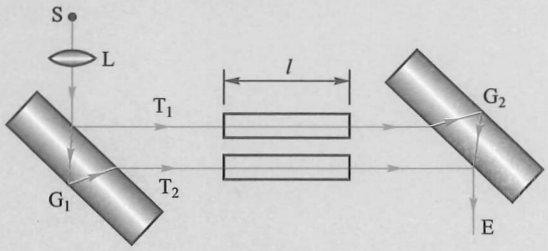
19-20 如图所示为一测量玻璃厚度变化的简单装置。S 是单色点光源，P 是接收屏，从 S 直接发出的光与从 S 发出经玻璃反射后的光在 P 上发生干涉，如果在厚度变化前，B 处出现的是亮纹，随着玻璃厚度的变化，条纹由亮变暗。求达到最暗时，玻璃厚度变化量 d 的表达式。（假设玻璃的折射率不变）



习题 19-20 图

19-21 用迈克耳孙干涉仪可测量单色光的波长。若动臂反射镜移动 0.322 0 mm，干涉条纹移过 1 024 条，求所用光的波长。

19-22 常用雅敏干涉仪来测定气体在各种温度和压力下的折射率。干涉仪的光路如图所示：S 为单色光源；L 为会聚透镜；G_1 和 G_2 为两块材料完全相同、等厚而且平行的玻璃板；T_1 和 T_2 为等长的两个玻璃管，长度为 l。进行实验时，先将 T_1 和 T_2 抽成真空，然后将待测气体徐徐注入其中一管。在 E 处观察并测出干涉条纹的变化，就可以求出待测气体的折射率。例如，某次测量某种气体时，将气体徐徐注入 T_2 管中，自开始进气到标准状态，在 E 处共看到有 98 条干涉条纹移动。所用光源的波长为 589.3 nm，$l=20$ cm。求该气体在标准状态下的折射率。

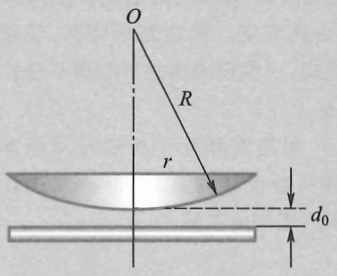


习题 19-22 图

19-23 白色平行光垂直入射到间距为 $a=0.25$ mm 的双缝上，在距 $D=50$ cm 处放置屏幕，分别求第一级和第五级明纹彩色带的宽度。（设白光的波长范围是从 400 nm 到 760 nm。这里说的彩色带宽度指两个极端波长的同级明纹中心之间的距离。）

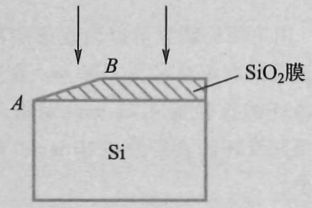
19-24 如图所示，牛顿环装置中，透镜的曲率半径 $R=40$ cm，用单色光垂直照射，平板玻璃和透镜紧贴时，在反射光中测得某级暗环的半径 $r=2.5$ mm。（1）求该暗环所对应的空气层厚度；（2）现把平板玻璃向下平

移，此时该暗环会向圆心收缩，当向下平移 $d_0 = 5\ \mu m$ 时，该暗环的半径将变为何值？



习题 19-24 图

19-25 在 Si 的平面上氧化生成了一层厚度均匀的 SiO_2 薄膜。为了测量薄膜厚度，将它的一部分磨成劈形（见图中的 AB 段，A 处薄 B 处厚）。现用波长为 600 nm 的平行光垂直照射，观察反射光形成的等厚干涉条纹。在图中 AB 段内共有 8 条暗纹，且 B 处恰好是一条暗纹，求 B 处薄膜的厚度。（Si 折射率为 3.42，SiO_2 折射率为 1.50）



习题 19-25 图

习题答案

第二十章　光的衍射

除干涉现象外，波动的另一个重要特征是衍射现象。光是电磁波，光也有衍射现象。本章将从惠更斯-菲涅耳原理出发，讨论衍射现象，并介绍光的衍射现象在几个方面的重要应用。

本章补充资源

20-1　光的衍射现象　惠更斯-菲涅耳原理

1. 光的衍射现象

由于光波波长较短，在一般的光学实验中，通常显示的都是光的直线传播。只有当障碍物的线度和入射光波的波长可比拟时，才可观察到明显的衍射现象。

在如图 20-1 所示的实验中，遮光屏 K 上开有一条狭缝，根据光线的直线传播，从光源 S 发出的光线穿过窄缝后，在屏幕 S_c 上应出现一个单缝的光斑。但实验中发现，屏上出现的是明暗交替的许多直条纹。光照射到其他的障碍物上，也有类似的情况。例如，把一条金属细丝作为对光的障碍物放在屏幕的前面，在“影”的中央应该是最暗的地方，实际上观察到的却是一条亮线，周围伴随着明暗条纹。这种光通过障碍物时，偏离直线传播而进入几何阴影，使光的强度重新分布的现象，称为光的衍射现象。

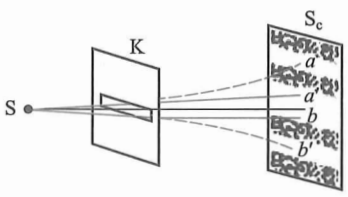


图 20-1　光的衍射现象

NOTE

事实上不借助于实验装置，在日常生活中也能观察到衍射现象。如果你五指并拢，通过指缝观看电灯灯丝，可以看到灯丝两旁有明暗相间并带有彩色的条纹，这就是光通过指缝产生的衍射。用天文望远镜观察恒星时，也可看到在恒星周围有一些明暗相间的圆环，这是星光透过望远镜的透镜时所产生的衍射现象。

按照光源、障碍物和观察屏三者的位置，可把衍射分为两类：

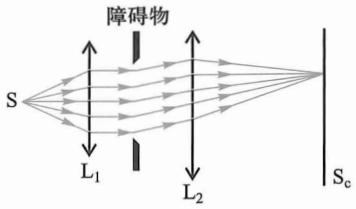


图 20-2 夫琅禾费衍射

一类是障碍物到光源和观察屏的距离都是有限远，这时出现的衍射称为菲涅耳衍射；另一类是障碍物到光源和观察屏的距离是无限远，光源发出的光到达障碍物时几乎变成平行光，通过障碍物的衍射光到达观察屏时也成为平行光，这类衍射称为夫琅禾费(Franhofer)衍射。夫琅禾费衍射是菲涅耳衍射的极限情况，可通过如图 20-2 所示的装置来实现。把光源 S 放在透镜 L_1 的前焦点上，这时照在障碍物上的光是平行光。把屏幕 S_c 放在透镜 L_2 的后焦平面上，这样相当于把无限远处的衍射图样“拉”到了 L_2 的后焦平面上，更便于观察和测量。由于对夫琅禾费衍射的分析和计算比较简单，同时夫琅禾费衍射也有许多实际的重要应用，因此本章仅限于讨论夫琅禾费衍射。

2. 惠更斯-菲涅耳原理

NOTE

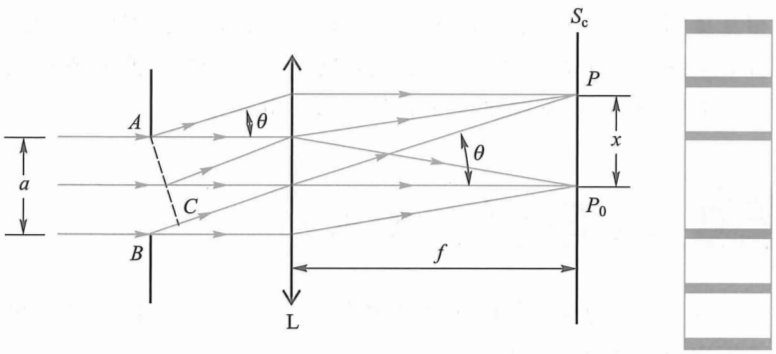
在第八章中已介绍过惠更斯原理，利用惠更斯原理我们可以定性地解释衍射现象中光偏离直线传播的问题，但不能定量地说明所出现的各种衍射图样的光强分布。菲涅耳注意到惠更斯原理的不足，在保留了惠更斯原理中子波概念的基础上，加入了子波相干叠加的概念。他假设：

从同一波面上各点发出的子波传播到空间某一点相遇时，各子波间也可以互相叠加而产生干涉现象。

经过这样补充的惠更斯原理称为惠更斯-菲涅耳原理。它是波动光学的基本原理，为衍射理论奠定了基础。利用惠更斯-菲涅耳原理，我们能够定量地计算出各种衍射结果。由于定量的积分计算比较复杂，以后我们采用比较简明的“半波带法”。

20-2 夫琅禾费单缝衍射

宽度远小于长度的长方形开孔称为狭缝。若不透光的平面物件上只开一个缝，这个缝就称为单缝。图 20-3(a)是夫琅禾费单缝衍射的光路图。如图所示，平行光垂直照射单缝，经单缝衍射后再经过透镜 L 会聚在观察屏幕 S_c 上，形成单缝衍射条纹。实验结果表明，单缝衍射条纹是一系列平行于狭缝的明暗相间的条纹，中央明纹最宽，约为其他各级明纹宽度的两倍；中央明纹也最亮，两侧明纹的强度由内向外逐渐减弱。



(a) 单缝衍射光路图　　(b) 单缝衍射条纹

图 20-3　单缝衍射光路图

下面应用惠更斯-菲涅耳原理和菲涅耳半波带法来解释单缝衍射条纹的成因及特点。

NOTE

1. 菲涅耳半波带法

在图 20-3(a)中，AB 表示单缝的截面，a 为缝的宽度。当平行光入射于单缝时，缝上各点可视为发射子波的新的波源，各子波源所发出的子波组成了单缝后的衍射光。向同一方向传播的衍射光经透镜会聚在屏上同一点，并在该点进行相干叠加。考虑由缝处各子波源发出的和主光轴成 θ 角的光线(θ 称为衍射角)，这束平行光经透镜会聚于屏上 P 点。由于 AB 上各点到 P 点的光程是不同的，所以到达 P 点各子波的振动相位也不同。过 A 点作一平面 AC，使 AC 与 BC 垂直，则由平面 AC 上各点到达 P 点的光程都相同。由图 20-3(a)可知，会聚于 P 点的各光线的最大光程差为 $|BC|=a\sin\theta$。为了考虑 P 点的明暗程度，作一些平行于 AC 的平面(如图 20-4 所示)，使相邻平面之间的距离等于入射单色光波长的一半。这些平面将单缝处的波阵面切割成 AA_1、A_1A_2、A_2A_3 等若干个等宽度的波带。因为相邻两个波带上的对应点(如每条带的中点、最上点或最下点)发出的光在 P 点的光程差为半个波长，所以上述波带称为半波带。这样分出的半波带到 P 点的距离近似相等，因而各带发出的子波在 P 点的振幅近似相等。又因为相邻两带的对应点上发出的子波在 P 点的相位差为 π，因此相邻两波带所发出的光在 P 处相遇时将相互抵消。若对某些衍射角 θ，$|BC|$ 正好是半波长的偶数倍，单缝可分为偶数个半波带，所有半波带所发出的光在 P 点成对地相互抵消，则 P 点为暗条纹中心；若对某些衍射角，$|BC|$ 正好是半波长的奇数倍，单缝可分为奇数个半波带，所有半波带所发出的光在 P 点成对地

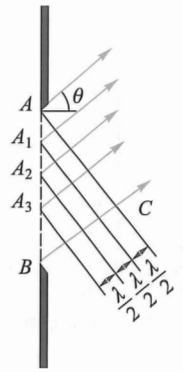


图 20-4　半波带

NOTE

相互抵消后，还剩一个半波带的光未被抵消，则 P 点为明纹中心；若对某些衍射角 θ，$|BC|$ 不为半波长的整数倍，AB 不能分成整数个半波带，则 P 点的强度介于相邻的最亮和最暗之间。

2. 明、暗纹产生的条件

综上讨论结果，我们可以得到当平行光垂直入射单缝时，单缝衍射出现明、暗纹的条件。

当衍射角 θ 符合

$$a\sin\theta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2},\quad k=1,2,3,\cdots \tag{20-1}$$

时，为各级明条纹中心的位置。对应于 $k=1,2,3,\cdots$ 的条纹分别称为第一级、第二级、第三级……明纹。当衍射角 θ 符合

$$a\sin\theta=\pm2k\frac{\lambda}{2}=\pm k\lambda,\quad k=1,2,\cdots \tag{20-2}$$

时，为各级暗纹中心的位置。对应于 $k=1,2,3,\cdots$ 的条纹分别称为第一级、第二级、第三级……暗纹。

$\theta=0$（即 $k=0$）为中央明纹中心的位置。在两个第一级（$k=1$）暗纹之间的区域，即 θ 符合

$$-\lambda<a\sin\theta<\lambda$$

的范围为中央明纹区。

3. 衍射光强分布

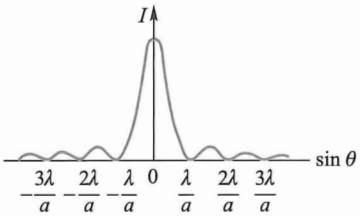


图 20-5 单缝衍射光强分布

由上可知，中央明纹是由 AB 上所有子波源发出的子波相干加强形成的，因此光强最强。其他各级明纹是由奇数个半波带中的一个带发出的子波相干叠加形成的，因此强度比中央明纹弱得多。而且，明纹的级次越高，能分成的半波带越多，每一个半波带的面积越小，所以明条纹的强度从内向外随级次 k 的增加而下降，如图 20-5 所示。

4. 中央明纹宽度

由图 20-3(a)可知，P 点处的条纹到屏幕中心 P_0 的距离 x 为

$$x=\tan\theta\cdot f$$

式中 f 是透镜 L 的焦距。根据(20-2)式,可得第一级暗纹到 P_0 的距离 x_1 为

$$x_1=\tan\theta_1\cdot f\approx\sin\theta_1\cdot f=\frac{\lambda}{a}f$$

中央明纹宽度为

$$l_0=2x_1\approx 2\frac{\lambda}{a}f \tag{20-3}$$

而其他各级明纹宽度为

$$l=\tan\theta_{k+1}\cdot f-\tan\theta_k\cdot f\approx\sin\theta_{k+1}\cdot f-\sin\theta_k\cdot f=\frac{\lambda}{a}f$$

可见,中央明纹宽度约为其他各级明纹宽度的两倍。由(20-3)式可知,λ 给定时,a 越小,l_0 越大,衍射作用越显著;a 越大,l_0 越小,衍射作用越不显著。当缝宽 $a\gg\lambda$ 时,各级衍射条纹都密集分布于中央明纹附近而分辨不清,只能观察到一条明纹,它就是线光源 S 通过透镜所成的几何光学的像。由此可见,几何光学是波动光学 $a\gg\lambda$ 条件下的近似。

若以白光入射,则白光中不同波长的光产生的衍射图样中除中央明纹中心外,其他各级条纹将彼此错开,于是观察到的衍射图样的中央明纹的中心部分是白色的,边缘伴有彩色,其他各级明纹是由紫到红的彩色条纹。

NOTE

例 1

波长 $\lambda=500.0$ nm 的平行光斜向下入射到具有狭缝的衍射屏,缝宽为 $a=5\times10^4$ nm,光线和屏法线夹角为 $\alpha=60^\circ$。试求:(1)零级明纹中心的角位置;(2)零级明纹的角宽。

解 如图 20-6 所示,当平行光斜向照射单缝,在垂直入射时导出的(20-1)式和(20-2)式不能直接应用,须加以修正。与前面的讨论类似,考虑以 AB 上各点所发出的衍射角为 θ 的光。它们经透镜会聚到达 P 点,但 P 点出现明纹还是暗纹取决于这束光的最大光程差 $\delta=a\sin\theta+a\sin\alpha$,当 θ 符合

$$a\sin\theta+a\sin\alpha=\pm k\lambda,\quad k=1,2,3,\cdots \tag{20-4}$$

时,P 处出现暗纹。当 θ 符合

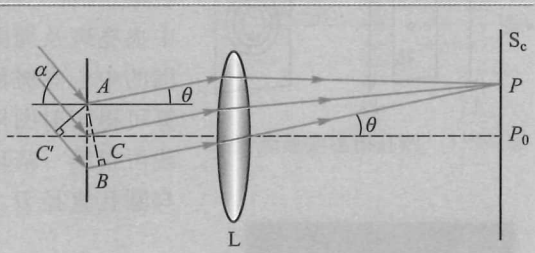


图 20-6 平行光斜入射时的单缝衍射

$$a\sin\theta+a\sin\alpha=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2},\quad k=1,2,3,\cdots \tag{20-5}$$

时,P 处出现明纹。

当 $\delta=0$ 时，P 点为中央明纹中心所在处，因此有

$$a\sin\theta_0+a\sin\alpha=0$$

$$\theta_0=-\alpha=-60°$$

此结果表明，中央明纹在 P_0 的下方，与屏的法线的夹角为 60%。

由(20-4)式可求得在中央明纹上方，$k=1$ 级暗纹的角位置 θ_1 为

$$a\sin\theta_1+a\sin 60°=\lambda$$

$$\theta_1=-58.873°$$

在中央明纹下方，$k=1$ 级暗纹的角位置 θ_{-1} 为

$$a\sin\theta_{-1}+a\sin 60°=-\lambda$$

$$\theta_{-1}=-61.127°$$

所以中央明纹的角宽

$$\Delta\theta=|\theta_{-1}-\theta_1|=2.254°$$

20-3 夫琅禾费圆孔衍射 光学仪器的分辨本领

1. 夫琅禾费圆孔衍射

大多数光学仪器的通光孔都是圆形的，并且是对平行光或近似于平行光成像。所以讨论夫琅禾费圆孔衍射具有实际意义。

图 20-7 是夫琅禾费圆孔衍射实验装置。由点光源 S 发出的光经 L_1 成一束平行光入射至圆孔，由圆孔发出的衍射光再经 L_2 会聚，在屏上成圆孔衍射图样，如图 20-8 所示。此衍射图样由一中央亮斑及周围明暗交替的圆环组成。我们把第一圈暗环所包围的中心亮斑称为艾里斑，光能主要集中在这一区域。由理论计算可得衍射图样的光强分布，如图 20-9 所示。从此光强分布曲线可得第一暗环的角位置 θ_1(即艾里斑对透镜光心张角的一半)与圆孔直径 D、入射单色光波长 λ 的如下关系：

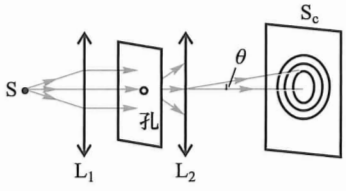
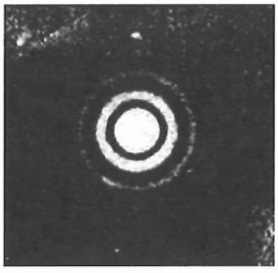


图 20-7 圆孔衍射实验装置


图 20-8 圆孔衍射图样

$$\sin\theta_1=\frac{1.22\lambda}{D}$$

一般，θ_1 很小，可用 θ_1 代替 $\sin\theta_1$，于是

$$\theta_1=1.22\frac{\lambda}{D} \tag{20-6}$$

如果 L_2 的焦距为 f，则艾里斑的半径为

$$R=f\cdot\theta_1=1.22\frac{\lambda f}{D} \tag{20-7}$$

由此可知，圆孔直径 D 越小，艾里斑就越大，衍射效果越明显。反之，D 越大，艾里斑越小，衍射效果不明显。若 $D \gg \lambda$，则 $R \to 0$，其他各级明暗环也向中心靠拢，衍射图样成为一个亮点，这就是点光源经 L_1 和 L_2 所成的像。在此，我们又一次看到，当障碍物的线度远大于入射光的波长时，波动光学将过渡到几何光学。

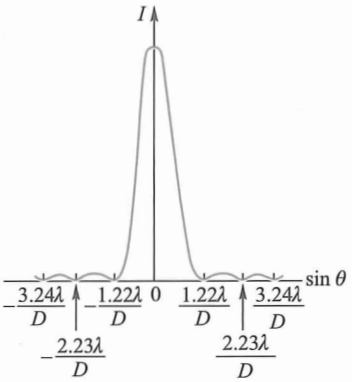


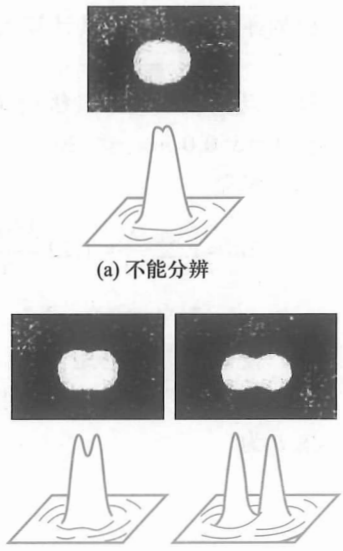
图 20-9 圆孔衍射光强分布

2. 光学仪器的分辨本领

根据几何光学，物体通过光学仪器理想成像时，每一个物点有一个对应的像点。两个物点不论离得多么近，通过光学仪器总是可以得到两个分开的像点。

一般的光学仪器中都会有一些透镜，由于只有透镜边框以内的光可以通过透镜成像，所以透镜的边框就可视为一个圆孔。按照波动光学，由于光的衍射，一个物点经透镜所成的像并不是一个几何点，而是一个衍射图样。如果两个物点靠得太近，两个对应的衍射图样就要相互重叠，甚至不能清楚地分辨两个物点的像。所以，光的衍射限制了光学仪器的分辨本领。下面我们仅以透镜为例来讨论光学仪器的分辨本领。

图 20-10 是两个非常靠近的恒星经望远镜中的会聚透镜所成的衍射图。星光透过透镜，聚焦为两个圆斑。如果这两个圆斑距离很近，大部分互相重叠，就无法分辨出是双星还是单个恒星，如图 20-10(a)所示。那么，重叠到什么程度才是分辨的极限呢？除了不同人的主观能力差异之外，客观上人们常采用瑞利(Rayleigh)判据。这个判据规定：



(a) 不能分辨

(b) 恰能分辨 (c) 能分辨

图 20-10 分辨两个衍射图样的条件

如果一个物点衍射图样的中央最亮处刚好与另一个物点的衍射图样的第一个暗处相重合，这时两衍射图样中心处的光强约为最大光强的 80%，大多数人能判断出这是两个物点的图像。这时，我们就说这两物点恰好能被这一光学仪器所分辨。

按照瑞利判据，一透镜恰能分辨的两物点的衍射图样中心间的距离，应等于艾里斑的半径。此时两物点对透镜中心的张角称为最小分辨角，用 $\delta\theta$ 表示，如图 20-11 所示。由(20-6)式，最小分辨角为

$$\delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{20-8}$$

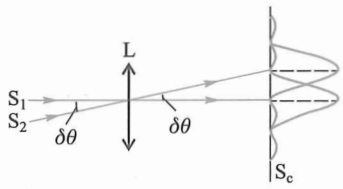


图 20-11 最小分辨角

通常将光学仪器最小分辨角的倒数称为该仪器的分辨本领，用 R

NOTE

表示，则

$$R=\frac{D}{1.22\lambda} \tag{20-9}$$

由上式可见，要提高光学仪器的分辨本领，一是要加大孔径，二是要采用短波长的光。天文望远镜就是采用大口径的物镜来提高其分辨本领的。目前世界上最大的光学望远镜之一的美国巴洛马山上的海尔望远镜，直径达 5 m。由于电子波长比可见光波要小得多，为$10^{-3}\sim10^{-1}$ nm 数量级，所以电子显微镜的分辨本领比普通光学显微镜大数千倍，这使我们能够对像病毒那样小的物体进行细致的观察。

例 2

在通常的亮度下，人眼瞳孔直径约为 3 mm，问人眼的最小分辨角是多大？如果人到黑板的距离是 12 m，试计算人眼能分辨的黑板上最小的线距离。

解 以视觉感受最灵敏的黄绿光来讨论，波长 $\lambda=550.0$ nm，由(20-8)式可得人眼的最小分辨角

$$\delta\theta=1.22\frac{\lambda}{D}=1.22\frac{550.0\times10^{-9}}{3\times10^{-3}}\ \text{rad}$$

$$=2.24\times10^{-4}\ \text{rad}$$

设人与黑板的距离为 s，人眼能分辨的最小线距离为 Δl，则此线距离对人眼的张角 θ 为

$$\theta=\frac{\Delta l}{s}$$

恰能分辨时应有

$$\theta=\delta\theta$$

于是

$$\Delta l=s\cdot\delta\theta=12\times2.24\times10^{-4}\ \text{m}=2.69\times10^{-3}\ \text{m}$$

当黑板上的线距离小于此值时，人眼不能分辨。

20-4 衍射光栅 光栅光谱

1. 衍射光栅

前面研究的衍射，无论是单缝衍射还是圆孔衍射，其障碍物都是单一的，没有周期性的几何结构。任何具有空间周期性结构的衍射屏都称为光栅。光栅种类很多，光栅的衍射一般都比较复

杂，为简明起见，我们仅讨论一种最简单的透射光栅。在一块透明板上，刻上一系列平行的等宽等距的直痕，刻痕处相当于毛玻璃，不易透光；而两刻痕间的缝可以透光，相当于一个单缝。这样平行地排列在一起的许多等距离、等宽度的狭缝就构成了一种最简易的透射光栅。刻制光栅是一门非常精密的技术，对于普通的光栅，在几厘米宽度内要刻上万条刻痕，所以原刻光栅十分贵重，一般使用的大多是复制品。光栅能将入射的复色光按其波长的不同展现在光屏上，据此人们可以对入射光的波长成分进行分析，它是近代物理实验中常用到的一种重要的光学元件。

（1）光栅的衍射现象

图 20-12 是光栅衍射光路图，G 表示光栅的一个截面。设光栅的总缝数为 N，透光缝的宽度为 a，缝间不透光的部分宽度为 b，$d=a+b$ 称为光栅常量。当平行光垂直照射光栅 G 时，在各缝处将发生衍射。由于各缝所发出的衍射光都是相干光，所以它们通过透镜的会聚作用在屏上重叠时会产生干涉，并形成一组光栅衍射条纹。

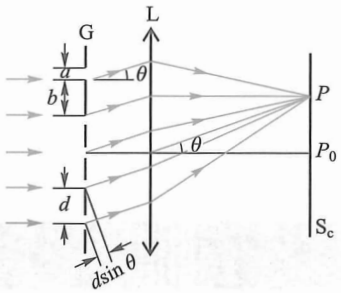


图 20-12 光栅衍射光路图

（2）光栅方程

光栅衍射实际上是各单缝发出的衍射光相互干涉的结果。基于这一思想，我们对光栅衍射出现明暗纹的条件以及衍射条纹的特点作一说明。

NOTE

设从每条缝射出的光到达屏上 P 点的振幅都相等，它们的光振动矢量分别用 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ 表示，光栅衍射在 P 点的合振动矢量可由这 N 个振动矢量合成而求得。考虑由各缝发出的衍射角为 θ 的光束，从相邻缝射出光线的相位差为 $\Delta\varphi=\dfrac{2\pi}{\lambda}(a+b)\sin\theta$。如果此相位差满足

$$\Delta\varphi=\pm k2\pi$$

即

$$(a+b)\sin\theta=\pm k\lambda,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{20-10}$$

则 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ 同相位，各缝振动矢量的方向相同，合振动振幅等于 N 个分振幅之和，如图 20-13(a)所示。N 条缝的光束在 P 点相互加强形成明纹。(20-10)式为决定明条纹的公式，称为光栅方程，满足光栅方程的明纹又称为主极大。

如果相邻两缝的相位差 $\Delta\varphi$ 满足

$$N\Delta\varphi=\pm k'2\pi$$

即

$$(a+b)\sin\theta=\pm\frac{k'}{N}\lambda$$

$$k' \neq Nk, k' = 1, 2, \cdots, N-1, N+1, N+2, \cdots, 2N-1, 2N+1, \cdots \tag{20-11}$$

这时，N 个振幅矢量合成的结果恰好首尾相接，形成 k' 个重合在一起的正多边形，合成振幅为零，如图 20-13(b)、(c)所示，N 条缝的光束在 P 点相消形成暗条纹①。由(20-11)式可知，当 $k' = kN$ 时，属于出现主极大的情况，因此在相邻两主极大之间存在 $N-1$ 条暗纹。而两暗纹间应为明纹，故其间必定还有 $N-2$ 条明纹。计算表明，这些明纹的强度接近于零，称为次极大。当光栅缝数很大时，在两主极大之间实际上是一片暗区。

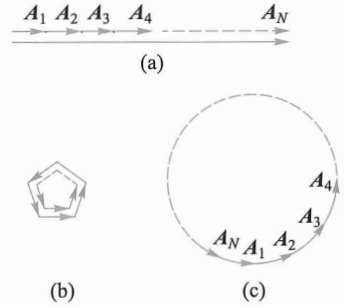


图 20-13 振动矢量叠加

(3) 衍射条纹的角宽

设第 k 级主极大的衍射角为 θ，它左右相邻的两个极小的衍射角之差为 $\Delta\theta$，称为该主极大的角宽，则对(20-11)式两边取微分，得

$$(a+b)\cos\theta \cdot \Delta\theta = \frac{\Delta k'}{N}\lambda$$

因主极大两边的两个极小之间的 $\Delta k' = 2$，所以

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{N(a+b)\cos\theta} \tag{20-12}$$


图 20-14 光栅衍射条纹

对一般光栅，N 很大，光栅常量 $a+b$ 又比波长 λ 大得多，因此在 θ 不大的情况下，表征衍射主极大条纹粗细的角宽 $\Delta\theta$ 很小，即条纹很细。由于条纹很细，光能集中，条纹很明亮。综上所述，可得光栅衍射条纹的特点：明纹细而亮，且分得很开，如图 20-14 所示。

(4) 缺级

光栅衍射强度受单缝衍射强度的制约。我们知道，单缝衍射强度随衍射角 θ 的不同而不同，如图 20-15(a)所示，所以不同 θ 方向的衍射光相干叠加形成的主极大的强度也不同。单缝衍射光强大的方向的主极大光强也大，衍射光强小的方向的主极大光强也小。图 20-15(b)表示 $N=5$ 的光栅衍射强度的分布。

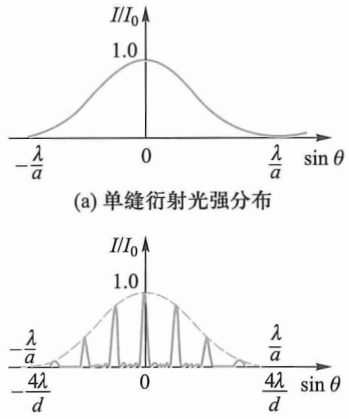


图 20-15

如果光栅衍射出现主极大的位置恰为单缝衍射暗纹的位置，则该级主极大就不会出现，这种现象称为缺级。若对某一衍射角 θ 满足出现多光束干涉主极大条件，即

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

同时该衍射角又满足单缝衍射暗纹条件，即

① 我们回忆一下简谐振动的旋转矢量表示法：把一个简谐振动写成一个旋转矢量的 x 轴分量。不同波在某点的叠加就是不同简谐振动的叠加。我们考虑在某一瞬间，让第一个简谐振动的相位为零，它所对应的旋转矢量沿着 x 轴方向。紧邻的第二个简谐振动与第一个简谐振动的相位差为 $\Delta\varphi$，所对应的旋转矢量与 x 轴成 $\Delta\varphi$。第三个简谐振动所对应的旋转矢量与 x 轴成 $2\Delta\varphi$，以此类推。我们在将这些简谐振动合成时，可以先将所对应的旋转矢量相加，然后求出合成矢量在 x 轴上的投影。矢量的相加就是这些矢量首尾相接，如图 20-13 所示。如果 $N\Delta\varphi$ 等于 2π 的整数倍且 $\Delta\varphi$ 不等于 2π，这些矢量连接后正好形成一个或若干个封闭的圆周，则这些矢量相加后就等于零。

$$a\sin\theta=\pm k'\lambda,\quad k'=1,2,3,\cdots$$

NOTE

两式相除可得

$$k=\pm\frac{a+b}{a}k' \tag{20-13}$$

(20-13)式称为缺级条件。如果$\frac{a+b}{a}$为整数，例如$\frac{a+b}{a}=4$，则$k=\pm 4k'$。当$k'=1,2,\cdots$时都为缺级，如图20-15(b)所示。如果$\frac{a+b}{a}$不为整数，例如$\frac{a+b}{a}=\frac{3}{2}$，则$k=\pm\frac{3}{2}k'$，只有当$k'=2,4,\cdots$时才出现缺级。

例3

波长为600.0 nm的单色光垂直入射在一光栅上，第二级主极大出现在$\sin\theta=0.2$处，第四级缺级。求：(1)光栅常量$a+b$；(2)光栅上狭缝可能的最小宽度；(3)按上述选定的a、b值，写出光屏上实际呈现的光谱线数。

解 (1)按照出现主极大的光栅方程

$$(a+b)\sin\theta=\pm k\lambda$$

由题意知，$\sin\theta=0.2$时，$k=2$，所以

$$(a+b)=\frac{k\lambda}{\sin\theta}=\frac{2\times 600.0\times 10^{-9}}{0.2}\ \text{m}=6\times 10^{-6}\ \text{m}$$

(2) 据缺级条件

$$k=\frac{a+b}{a}k'$$

由第四级缺级，可得

$$a=\frac{a+b}{4}k'$$

当$k'=1$时，a取极小值

$$a_{\min}=\frac{a+b}{4}=1.5\times 10^{-6}\ \text{m}$$

(3) 把$\sin\theta=\pm 1$代入光栅方程，可求得主极大的最高级次

$$k_{\max}=\frac{a+b}{\lambda}=\frac{6\times 10^{-6}}{6\times 10^{-7}}=10$$

再考虑

$$k=\pm\frac{a+b}{a}k'=\pm 4k',\quad k'=1,2,3,\cdots$$

为缺级，所以实际上所能看到的级次为$k=0,1,2,3,5,6,7,9$，共15条谱线。

2. 光栅光谱

光栅是一种分光元件。由光栅方程可知，在光栅常量d一定时，当以不同波长的复色光入射时，各波长的光除零级条纹重合以外，其他各级条纹的位置不重合，并按波长由短到长的次序自中央向外侧依次分开排列，每一干涉级次都有这样一组谱线。在

较高级次时，各级谱线可能相互重叠。光栅衍射产生的这种按波长排列的谱线称为光栅光谱。图 20-16 是白光的光栅光谱，其中央明纹中心是白色的，边缘伴有彩色；两侧的各级明纹是由紫到红的彩色光谱，并在第二和第三级光谱发生重叠。级次越高，重叠情况越复杂。

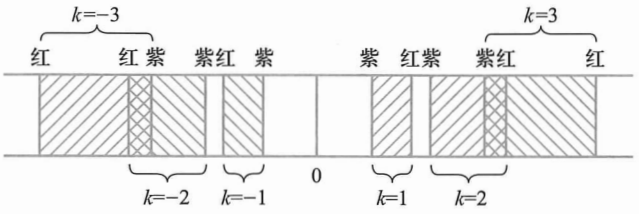


图 20-16 光栅光谱

NOTE

由于各种物质都有自己特定的光谱，因此，通过测定其光栅光谱中谱线的波长及相对强度，可以确定该物质的成分和含量。测定物质中原子或分子的光谱，可以揭示原子和分子的内部结构和运动规律。这种分析方法称为光谱分析。它是现代物理学研究的重要手段，在工程技术等领域得到广泛应用。

3. 光栅的分辨本领

光栅作为一种分光仪器进行光谱分析，常常需要区分并测量波长相差很小的两条谱线，为此引进光栅分辨本领的概念。

在波长 λ 附近，有两种单色光同时垂直照射光栅，它们的衍射条纹发生重叠。若两种光的波长差为 $\mathrm{d}\lambda$ 时，光栅刚好能够分辨出是两条谱线，则定义其分辨本领 R 为

$$R=\frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda}$$

它反映的是光栅分辨波长接近的两种单色光的能力。

按照瑞利判据，当一种单色光的主极大刚好落在另一相近单色光的同级主极大最近一个极小的位置上时，这两种单色光刚好能分辨。这时，与两种单色光的衍射条纹相应的衍射角之差 $\mathrm{d}\theta$ 应等于它们衍射条纹的半角宽。利用(20-12)式可得

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{N(a+b)\cos\theta} \tag{20-14}$$

再对光栅方程两边微分

$$(a+b)\cos\theta\cdot\mathrm{d}\theta=k\mathrm{d}\lambda \tag{20-15}$$

由(20-14)式和(20-15)式可得

$$\mathrm{d}\lambda=\frac{\lambda}{kN}$$

把上式代入分辨本领的定义式，得

$$R=kN \tag{20-16}$$

由此式可知，光栅的分辨本领和总缝数 N 及衍射级次 k 成正比。如要提高光栅的某一级谱线的分辨本领，可通过提高缝数来实现。

例 4

设计一个平面透射光栅。要求用白光垂直照射时，能在 30°角衍射方向上观察到波长为 600.0 nm 的第二级主极大，且能分辨该处 $\Delta\lambda=0.005$ nm 的两条谱线，同时在该处不出现其他谱线的主极大。

解 要设计一个光栅，实际上是要确定该光栅的总缝数 N、光栅常量 d 和缝宽 a。

由题意知，对 $\lambda=600.0$ nm 的光，$\theta=30°$ 时，$k=2$。根据光栅方程，可得

$$d=\frac{k\lambda}{\sin\theta}=\frac{2\times600.0\times10^{-9}}{0.5}\ \text{m}=2.4\times10^{-6}\ \text{m}$$

根据这一光栅常量，通过计算可知在 30°角衍射方向上还应观察到波长为 400.0 nm 的第三级主极大。为使该处不出现该波长的第三级主极大，可通过设计 a 的大小，使第三级主板大为缺级。根据缺级的条件

$$k=\pm\frac{d}{a}k'$$

可得

$$a=\pm\frac{d}{3}k'$$

当 $k'=1$ 时，a 取最小值

$$a_{\min}=\frac{d}{3}=0.8\times10^{-6}\ \text{m}$$

若要求此光栅在波长为 600.0 nm 的第二级主极大处恰能分辨 $\Delta\lambda=0.005$ nm 的两条谱线，则需满足

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=kN$$

$$N=\frac{\lambda}{\Delta\lambda\cdot k}=\frac{600.0}{0.005\times2}=6\times10^{4}$$

这是光栅所需的最少的缝数。

20-5 X 射线衍射

1895 年，伦琴(W. C. Röntgen)在研究稀薄气体放电时，发现了一种新的射线。它能透过对可见光不透明的木头、铝和许多其他物质，并使一些固体产生荧光。由于当时对它的本质还不了解，伦琴称它为 X 射线，但人们通常更恰当地称它为伦琴射线。图 20-17 所示是一种产生 X 射线的真空管。图中 G 是一抽成真空的玻璃泡，K 是发射电子的热阴极，A 是由钼、钨或铜等制成的阳极，也叫对阴极。在两极间加以数万伏的高压，则由阴极发射

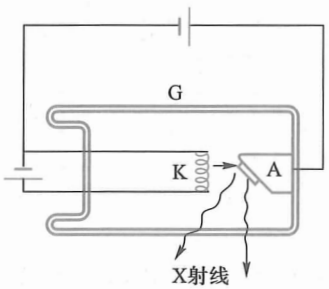


图 20-17 X 射线的产生

NOTE

的电子在强电场作用下加速。当高速电子撞向阳极时，就从阳极发射出 X 射线。

X 射线是一种波长极短的电磁波，波长为 0.01～1 nm。既然 X 射线是一种电磁波，就应该有干涉和衍射现象。但是用普通的光学光栅时，是观察不到 X 射线的衍射现象的。例如 $\lambda=0.1$ nm 的 X 射线垂直入射光栅常量 $a+b=3\ 000$ nm 的光栅时，第一级明纹出现在

$$\theta=\arcsin\frac{k\lambda}{a+b}=\arcsin\frac{1\times0.1}{3\ 000}=0.002°$$

的角位置。这个位置和中央明纹靠得如此近，以至在实际上是无法分辨的。要观察到 X 射线的衍射，必须用光栅常量为纳米数量级的光栅，这样的光栅是无法用机械方法制造的。

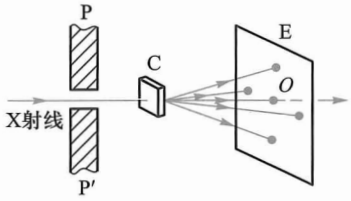


图 20-18 X 射线衍射装置简图

1912 年，德国物理学家劳厄(M. von Laue)想到，晶体是由一组规则排列的微粒组成的，微粒之间距离约为 0.1 nm，那么原子的这种规则排列是否正是一种适合 X 射线的天然三维衍射光栅呢？基于这一想法，他做了如图 20-18 所示的实验。一束 X 射线穿过铝板上的小孔后，射到一单晶片上，产生衍射，最后在底片上形成对称分布的一些衍射斑点，这些衍射点后来称为劳厄斑点。劳厄的 X 射线衍射实验成功地证实了 X 射线的波动性。

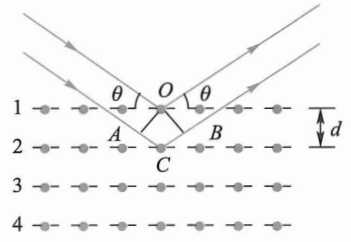


图 20-19 乌利夫-布拉格方法

1913 年，苏联的乌利夫与英国的布拉格父子(W. H. Bragg，W. L. Bragg)独立地对 X 射线衍射作了如下所述的简明解释：晶体中周期性排列的原子可视为一系列相互平行的原子层，这些原子层称为晶面，各晶面之间的距离用 d 表示，如图 20-19 所示；当一束单色、平行的 X 射线以 θ 角掠射到晶面上时，将分别被表面及内部的各原子层散射，这些散射线相互叠加，就形成衍射图样。可以证明，在各原子所散射的射线中，只有按反射定律反射的射线强度为最大。由图 20-19 可见，被上、下两原子层所反射的反射线的光程差为

$$|AC|+|BC|=2d\sin\theta$$

当此光程差满足下述条件

$$2d\sin\theta=k\lambda,\quad k=1,2,3,\cdots \tag{20-17}$$

时，各层的反射线将相互加强。上式称为布拉格公式。

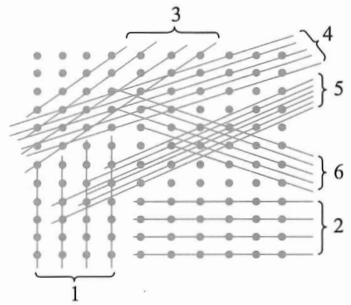


图 20-20 晶体中不同取向的晶面簇

以上我们仅研究了一组晶面上的 X 射线散射。实际上，对同一块晶体的空间点阵，从不同的方向看去，可以看到粒子形成取向、间距不同的许多晶面簇。如图 20-20 所示，当 X 射线入射到晶体表面上时，对不同晶面簇的掠射角 θ 不同，晶面间距 d 也不同。只有对某些晶面簇的 θ 和 d 满足布拉格公式，才能相互加强而形成斑点。在图 20-18 所示的劳厄实验中，得到的每一个劳厄

斑点都是从某一组确定的晶面簇反射叠加的结果。

NOTE

由布拉格公式可知，如果已知作为衍射光栅的晶体的结构，即已知晶面间距 d，就可利用 X 射线衍射来测定 X 射线的波长。反之，若已知 X 射线的波长，就可测定晶面间距，从而推知晶体的结构。布拉格父子由于在应用 X 射线研究晶体结构方面的贡献，荣获 1915 年的诺贝尔物理学奖。霍奇金(D.C. Hodgkin)由于应用 X 射线测定了一系列重要的生物化学物质的晶体结构，荣获了 1964 年的诺贝尔化学奖。总之，X 射线对科学技术的发展及人类社会进步产生了极其深刻的影响，它就像一把金钥匙，为我们打开了一扇扇新发现的大门，推动了许多新学科的诞生，如 X 射线晶体学、X 射线光谱学、X 射线激光等，并在医学、化学、生物学及其他有关学科领域得到了广泛应用。

例 5

将波长为 $\lambda=0.11$ nm 的 X 射线投射到食盐(N_aCl)某一组晶面上，晶面间距为 $d=0.252$ nm，问掠射角为多大时出现衍射极大？

解 由布拉格方程有

$$\sin\theta=\frac{k\lambda}{2d}=0.218k$$

可能出现衍射极大的方向为

$k=1,\theta=12.6^\circ$； $k=2,\theta=25.9^\circ$

$k=3,\theta=40.9^\circ$； $k=4,\theta=60.7^\circ$

k 再大，$\sin\theta>1$，不可能成立。

光栅原理在实际中有很大的应用。以天文望远镜为例，为了提高分辨本领，会尽量把其口径做得大一些，但是大口径一方面在技术上存在困难，另一方面也减少了望远镜的可调性。巨大的天文望远镜往往须固定，只能靠地球的公转巡天。比如世界最大的天文望远镜 FAST[图 20-21(a)]建造于我国贵州，直径为 500 m，就只能固定不动。另外一种方法就是做很多小的望远镜，将其排成阵列[图 20-21(b)]，让它们接收到的电磁波互相干涉，形成光栅，这样的阵列等效于直径为阵列尺寸的单口望远镜。小望远镜可以随意转动方向，对准天空中的任意方向。另外，对于深空中的某些目标，所有人类制造的望远镜口径都不够大，这时阵列的优点就更突出了。2019 年，“事件视界望远镜”给距离地球 5 500 万光年的 M87 星系中心的超大黑洞拍了张照片，目的是分辨黑洞中心的暗区。根据计算，这需要地球直径大小的望远镜。所谓“事件视界望远镜”，就是利用全球 8 台望远镜组成阵列，等效于地球直径大小的望远镜。



(a) FAST



(b) 我国圆环阵太阳射电成像望远镜

图 20-21

20-6 全息照相原理

NOTE

早在1948年，伽博(D. Gabor)就为了提高显微镜的分辨本领提出了全息原理，并开始了全息照相的研究工作。但因为没有好的相干光源，这方面工作的进展相当缓慢。直到1960年激光出现以后，全息才得以迅速发展，并成为科学技术的一个新的领域。

1. 普通照相与全息照相

人们之所以能看到物体，是因为来自物体的光作为一种信号，被人眼接收并引起视觉。这种光信号是一种电磁波，根据物体上各点所发出的电磁波的频率、振幅以及相位的不同，人们可以区别物体的颜色、形状、明暗和远近等。普通照相是应用透镜成像的原理，通过透镜把物体的实像成在感光底片上的。入射光振幅大，所能引起的感光乳胶的化学变化深度也大，因而冲洗过的底片上各处的明暗反映的是入射光的强弱。由于普通照相底片所记录的只是光的振幅分布，所以人们看到的是物体的平面像。全息照相应用了光的干涉原理，在感光底片上同时记录光的振幅和相位这两种信息，并运用衍射原理，在一定条件下使物体各点发出光的全部信息再现。这时，我们观察到的是原物体逼真的立体像。

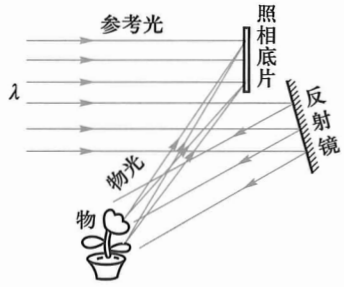
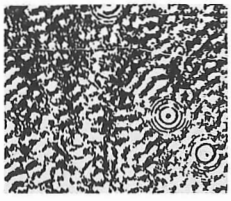


图 20-22 全息照相示意图


图 20-23 全息照片

2. 全息照相的记录

图20-22为拍摄全息照片的示意图。从激光器发出的波长为λ的相干光波被分成两部分：一部分直接投射到照相底片上，称为参考光；另一部分经平面镜反射后投射到被拍摄物体上，经物体各处散射的光也投射到照相底片上，这部分光称为物光。参考光和物光在底片上各处相遇时将发生干涉，结果在照相底片上形成复杂的干涉条纹。照相底片经过处理，就成为全息片。直接观察拍摄好的全息片时，并不能看到被摄物体的形象，看到的只是一幅复杂的条纹图样，如图20-23所示，但正是这些条纹记录了物光的全部信息(振幅和相位)。

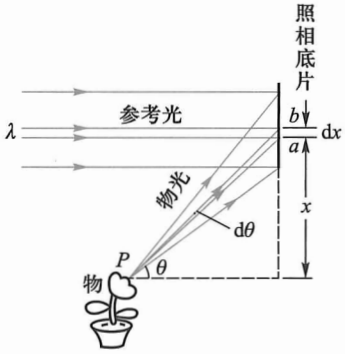


图 20-24 全息照相的记录

那么，干涉条纹是如何记录下物光的振幅和相位的呢？如图20-24所示，P为物体上某一发光点，它发出的光和参考光在底片上形成干涉条纹。设a、b为相邻两条暗纹所在处，则要形成

暗纹，在 a、b 两处的物光和参考光必须都反相。由于参考光在 a、b 两处是同相的，所以到达 a、b 两处的物光的光程差必为 λ。由图示几何关系可得相邻条纹的间距

$$\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{\sin\theta}$$

此式表明：在底片同一处，来自物体上不同发光点的光由于它们的 θ 角不同，与参考光形成的干涉条纹的间距就不同。由此可见，底片上干涉条纹的疏密记录了物光的相位分布。另外，由于射到底片上的参考光的振幅是各处相同的，而来自物体上不同发光点的光的振幅不一样，这样参考光和物光叠加干涉时，在底片上各处形成的干涉条纹的明暗程度就不一样。因此，干涉条纹的明暗程度记录了物光的振幅分布。

NOTE

3. 全息照相的再现

观察全息照相所记录的物像，可用一束和原参考光完全相同的光束（称为照明光）沿原参考光的方向照射全息片，如图 20-25 所示。由于全息片包含大量细密分布的干涉条纹，它相当于一个衍射光栅，照明光通过它时会产生衍射。为表述清楚，仍考虑相邻条纹 a 和 b。底片经过冲洗后，它们应是两条透光缝，照明光通过它们时将发生衍射。考察从原来的物体上 P 点发出的物光方向上的那两条衍射光，其光程差一定为波长 λ。这两束光的反向延长线会聚于 P' 点，它们相互叠加形成+1 级极大。这一极大正好对应于原发光点 P'，它是原来物点的虚像，在与入射照明光对称的方向还有另一个一级衍射光，它们将会聚到 P'' 点，相互叠加形成-1 级极大。P''点可看成原来物点的实像。

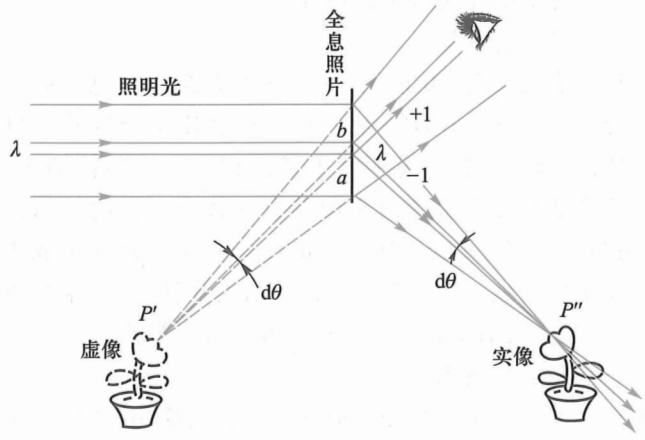


图 20-25 全息照相的再现

NOTE

上面我们仅讨论了一个物点所发光波的再现，事实上任何一个物体都是由许多物点构成的。上面的讨论对物体上的每一个物点都是正确的。因此，当光照射全息片时，各物点的像就同时再现出来，在底片右边的眼睛将看到一个栩栩如生的原物立体像。如果移动眼睛，还可以看到被前面物体挡住视线的物体，正如人们通过窗户观看室外景象一样。这是普通照片无法比拟的。

除此之外，全息照片还有一个完全有别于普通照相的重要特征：用普通照相术产生的底片，每个局部只记录物的相应局部信息，如果底片不幸破损，就无法重现完好的物像；全息片则不同，全息片的每个局部都完整地记录了整个物光波的全部信息。当不慎使全息底片破碎成几块时，任取一片仍可用来重现物光波，看到完整的物像。不过，光信息的容量有所减少，只能在某些方向才能看清整个物体的像，犹如通过小窗口来观察景物那样。

4. 全息的应用

由于全息照相具有一系列不同于普通照相的独特优点，它在许多领域得到广泛应用，下面仅简单列举几方面的应用。

（1）全息干涉技术

全息干涉技术是全息的最早、也最重要的应用之一。如果一个物体的形状随时间发生变化，利用二次曝光或连续曝光全息图可以将物体的变化状况记录在同一张全息照片上。再现时就得到两个或多个互相交叠的像，这两个或多个像的再现光会因干涉而形成干涉条纹，根据干纹条纹就可以确定物体形变的大小。这一测量物体微小变化的方法，称为全息干涉技术。利用这一技术，可对物体的微小振动、高速运动、容器内的爆炸过程以及风洞实验中导弹外形的变化等进行研究。

（2）全息信息存储

全息信息存储是20世纪60年代随着激光全息发展出现的一种大容量高密度的存储方法。它主要利用了全息照相可多次记录的特性，可在一张全息照片上重复记录许多物体的全息图，能利用角度选择性依次读出不同信息的特点。目前其储存密度（使用可见光）上限可以达到10 Tb/cm^3，比磁存储或集成半导体存储高几个数量级。由于全息存储具有可靠性高、记录与再现快的优点，所以是目前正在大力发展的几种存储器之一。

（3）全息显微技术

全息显微技术是全息照相的又一种主要应用，实际上全息照

相最初就是为了提高显微镜的分辨本领而提出的。一般的显微镜分辨率越高景深越小，因此只能看到几乎是一个平面上的物。想观察透明体内运动颗粒的大小和分布就要多次调焦，而由于粒子在不停地运动，观测时根本来不及将显微镜调焦到这些粒子上。应用全息显微镜能很方便地解决这一问题。全息显微镜首先拍摄下一定体积内粒子在某一瞬时的运动情况的全息图，重现时就可得到在这一瞬时的粒子分布情况，再利用显微镜层层聚焦，就可从容地观察各层次真实的粒子分布情况。

本章摘要

NOTE

1. 惠更斯-菲涅耳原理

从同一波阵面上各点发出的子波在空间某点相遇时，可相互叠加产生干涉。

2. 单缝夫琅禾费衍射

条纹特点：中央明纹最宽，约为其他各纹明级宽度的两倍；中央明纹也最亮，两侧明纹的强度由内向外逐渐减弱。

单色光垂直入射时衍射暗纹中心位置：$a\sin\theta=\pm k\lambda$，$k=1,2,3,\cdots$。

中央明纹区域：$-\lambda<a\sin\theta<\lambda$。

3. 圆孔夫琅禾费衍射

衍射条纹特点：一系列明暗交替的圆环，光能主要集中在第一暗环包围的区域——艾里斑。

单色光垂直入射时第一级衍射暗纹中心位置：$D\sin\theta_1=1.22\lambda$。

4. 光学仪器的分辨本领

瑞利判据：一个物点衍射图样的中央最亮处刚好与另一个物点的衍射图样的第一个暗处相重合，这两物点恰好能被分辨。

光学仪器的分辨本领：$R=\dfrac{D}{1.22\lambda}$。

5. 光栅衍射

衍射条纹的特点：明纹细而亮，且分得很开。

单色光垂直入射时主极大的中心位置（光栅方程）：$d\sin\theta=\pm k\lambda$，$k=0,1,2,\cdots$。

缺级条件：$\dfrac{d}{a}=\dfrac{k}{k'}$。

光栅分辨本领：$R=\dfrac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda}=kN$。

6. X 射线衍射

布拉格公式：$2d\sin\theta=k\lambda$，$k=1,2,3,\cdots$。

7. 全息照相

思考题

20-1 光栅衍射和单缝衍射有何区别？为何光栅衍射时的明纹特别明亮？

20-2 在观察单缝夫琅禾费衍射时，如果衍射装置有如下变动，试讨论衍射图样的变化。

(1) 单缝宽度逐渐减小；

(2) 将屏幕向透镜移动；

(3) 将整个装置浸入水中；

(4) 单缝沿垂直于它后面的透镜的光轴方向向上或向下移动；

(5) 将线光源沿垂直于光轴的方向向上或向下移动。

20-3 当一束截面很大的平行光遇到一个小小的点状阻碍物时，有人认为它无关大局，其影响可以忽略，在其后面基本上还是一束平行光，这个看法对吗？

20-4 单缝衍射满足 $a\sin\theta=k\lambda$ 时，就出现暗纹，而光栅衍射满足 $d\sin\theta=k\lambda$ 时，将出现明纹。两个等式的左边都代表光程差，右边皆为 $k\lambda$，但两种情况出现的条纹明暗刚好相反，试解释之。

20-5 声波和无线电波能绕过建筑物传播，但对光却观察不到明显的拐弯现象，这是为什么？

20-6 对波长一定的入射光，在光栅的总缝数增加、缝间距减小以及缝宽增加时，衍射花样将怎样变化？

20-7 试解释为什么有时在月亮的周围会出现一个“亮环”。如果这个亮环直径为月亮直径的 1.5 倍，试估计空气中小水珠的大小（设月球对地球的角半径为 0.01 rad）。

20-8 为什么天文望远镜物镜的直径很大？

20-9 假如人眼能感知的电磁波段不是在 500 nm 附近，而是移到毫米波段，人眼的瞳孔仍保持 4 mm 左右的孔径，那么人们所看到的外部世界将是一幅什么景象？

20-10 从不同角度观看全息照相，可以看到物的不同侧面的形象。如果从不同角度观看立体电影，能看到物的不同侧面的形象吗？由此说明这两者产生立体感的原因有什么不同？

20-11 全息图破损意味着丢失一些信息，为什么再现像仍然完整无损？这时再现像中包含的信息没有减少吗？如果残留的全息图太小了，对再现像有什么影响？

习题

20-1 一单色平行光束垂直照射在宽为 1.0 mm 的单缝上，在缝后放一焦距为 2.0 m 的会聚透镜。已知位于透镜焦面处的屏幕上的中央明条纹宽度为 2.5 mm，求入射光的波长。

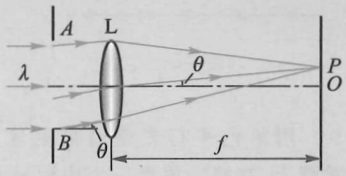
20-2 水银灯发出的波长为 546 nm 的绿色平行光垂直照射到一单缝上，缝后透镜的焦距为 40 cm。测得透镜后焦面上中央明条纹宽度为 1.5 mm，求单缝的宽度。

20-3 波长 $\lambda=632.8$ nm 的平行光垂直照射宽度 $a=0.2$ mm 的狭缝，紧靠缝后放置焦距 $f=60$ cm 的凸透镜。试求在焦平面处的观察屏上，零级明纹中心到第二级暗纹之间的距离。

20-4 单缝夫琅禾费衍射实验中，已知缝宽 $a=0.5$ mm，缝后透镜的焦距 $f=50$ cm，在观察屏上与中心的距离 $x=1.5$ mm 处出现明纹。若是用平行白光垂直

照射此单缝，试问此明纹由哪几种波长的光构成？明纹呈现什么颜色？

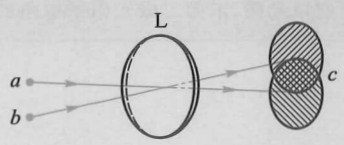
20-5 如图所示，波长为 480.0 nm 的平行光垂直照射到宽度为 0.4 mm 的单缝上，单缝后透镜的焦距为 60 cm，当单缝两边缘点 A、B 射向 P 点的两条光线在 P 点的相位差为 π 时，求 P 点与透镜焦点 O 的距离。



习题 20-5 图

20-6 人造地球卫星上装有一架照相机，它在离地面 $h=400$ km 的高度飞行时拍摄地面上的目标物。若要求它能分辨出地面上相距 $l=1.0$ m 的两盏车灯，试问照相机的镜头至少要有多大？设感光片接收的波长 $\lambda=400$ nm。

20-7 如图所示，在透镜 L 前 50 m 处有两个相距 6.0 mm 的发光点 a 和 b，它们在 c 处所成的像正好满足瑞利判据，透镜焦距为 20 cm。试求 c 处衍射光斑的直径。



习题 20-7 图

20-8 已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为 4.84×10^{-6} rad，由它们发出的光波波长 $\lambda=5.50\times10^{-5}$ cm。问望远镜物镜的口径至少要多大才能分辨出这两颗星？

20-9 白光垂直入射每毫米内有 500 条刻痕的光栅。用置于光栅后的透镜将光谱投射到屏上，透镜与屏间距离为 4 m，可见光的上下限为：红光 $\lambda_{红}=780$ nm，紫光 $\lambda_{紫}=400$ nm。求屏上第一级光谱的宽度。

20-10 一光栅每毫米内有 200 条刻线，总宽度为 5.00 cm。问：

(1) 在第一级光谱中，钠黄光双线（波长分别为 589.0 nm 和 589.6 nm）的角间距是多少？每条谱线的半角宽为多大？能否分辨双线？

(2) 在第二级光谱中，在波长 640 nm 附近能够分辨的最小波长差是多少？

20-11 一光栅在 2.54 cm 的长度上具有 15 000 条窄缝，对某一波长的光，测得第一级衍射角为 13°14′，求此光波的波长。

20-12 波长 $\lambda=600.0$ nm 的单色光垂直入射到一光栅上，测得第二级主极大的衍射角为 30°且第三级是缺级。

(1) 光栅常量 d 等于多少？

(2) 透光缝可能的最小宽度 a 等于多少？

(3) 在选定了上述 d 和 a 之后，求在屏幕上可能出现的主极大的级次。

20-13 一衍射光栅，每 1 cm 上有 100 条透光缝，每条透光缝的宽度为 2×10^{-3} cm，在光栅后放一焦距为 1 m 的凸透镜，现以波长为 600 nm 的单色平行光垂直照射光栅。

(1) 透光缝 a 的单缝衍射中央明纹宽度为多少？

(2) 在该宽度内，有几个光栅衍射的主极大？具体写出主极大的级次。

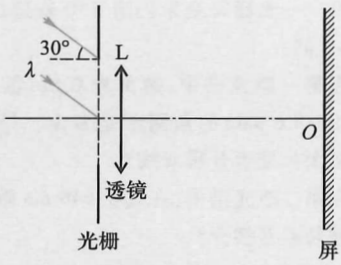
20-14 一束平行光垂直入射到某个光栅上，该光束有两种波长的光 $\lambda_1=440.0$ nm，$\lambda_2=660.0$ nm。实验发现，两种波长的谱线（不含中央明纹）第二次重合于衍射角 $\theta=60°$ 的方向上，求此光栅的光栅常量 d。

20-15 以波长为 500 nm 的单色平行光斜向入射在光栅常量为 2.10 μm，缝宽为 0.70 μm 的光栅上；入射角 $i=30°$，如图所示。

(1) 求斜入射时的光栅方程；

(2) 第几级光谱线缺级？

(3) 具体写出能看到的光谱线的级次，并说明共有几条。



习题 20-15 图

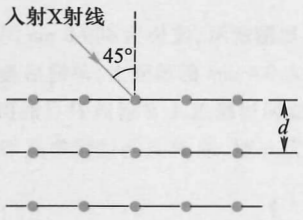
20-16 一光源含有氢原子和氘原子的混合物，它所发出的光是中心波长为 $\lambda = 656.3$ nm 的红双线，其波长间隔为 $\Delta\lambda = 0.18$ nm。若能用一光栅在第一级谱线中将这两条谱线分开，光栅的刻痕数目 N 至少应是多少？

20-17 以波长为 0.110 nm 的 X 射线照射岩盐晶面，实验测得在 X 射线和晶面的夹角为 11°30′时获得第一级极大的反射光，问：

（1）岩盐晶体原子平面间的间距 d 为多大？

（2）若以另一束待测的 X 射线照射岩盐晶面，测得 X 射线与晶面的夹角为 17°30′时获得第一级极大的反射光，则待测的 X 射线的波长为多大？

20-18 如图所示，入射 X 射线束不是单色的，而是含有由 0.095 ~ 0.13 nm 这一波带中的各种波长，晶体的晶面间距为 $d = 0.275$ nm，问与图中所示平面相联系的衍射的 X 射线是否会产生？



习题 20-18 图

20-19 用单色平行光垂直照射宽度为 $a = 0.5$ mm 的单缝上，在缝后放置一个焦距为 $f = 100$ cm 的透镜，则在焦平面的屏幕上形成衍射条纹，若在与屏上中央明纹中心距离为 1.5 mm 处的 P 点为一明纹，试求：

（1）入射光的波长；

（2）P 点条纹的级次和该条纹对应的衍射角；

（3）狭缝处波面可分为几个半波带；

（4）中央明纹的宽度。

20-20 用钠光（$\lambda_1 = 589.3$ nm）垂直照射某光栅，测得第三级光谱的衍射角为 60°。（1）若换用另一光源测得第二级光谱的衍射角为 30°，求光栅常量 d 和后一光源发光的波长 λ_2；（2）若以白光（400 ~ 760 nm）照射该光栅，求第二级光谱衍射角的张角。

习题答案

第二十一章　光的偏振

光的干涉和衍射现象说明光具有波动性，而光的偏振现象则说明光是横波。偏振顾名思义就是振动方向有特别的取向。对于纵波，其振动方向与传播方向一致。因此当传播方向确定后，其振动方向就完全确定了。横波就有很大的区别。横波在垂直于其传播方向的平面里振动，所以有很多可能的方向。由于这种不同的振动方向导致的不同物理属性称为横波的偏振。因此偏振性是横波区别于纵波的最明显的标志之一。电磁场理论已经告诉我们，光波是横波，光的振动矢量（光矢量）与光的传播方向垂直，因此光具有偏振性。本章主要讨论光的各种偏振态以及偏振光的产生、检验和应用。



本章补充资源

NOTE

21-1　光的五种偏振态

在垂直于光传播方向的平面内，光矢量可以有各种不同的状态，据此我们可把光大体分为五种。

1. 自然光

光是由光源中大量原子或分子发出的。由于原子或分子发光的间歇性和独立性，大量原子在同一时间内发出的光不仅相位不同，振动方向也不同。在垂直于光的传播方向的平面内，光矢量可取任何方向的振动，没有哪一个方向比其他方向更占优势，即在所有可能的方向上，光矢量的振幅都相等，这样的光称为自然光，如图 21-1(a)所示。对于自然光，我们可把它分解为两个互相垂直、强度相同的光矢量，它们的强度都等于自然光强度的一半，如图 21-1(b)所示。但由于自然光中各个光矢量之间无固定的相位关系，所以这两个相互垂直的光矢量之间无固定的相位关系。通常用图 21-1(c)来表示自然光，点表示垂直于纸面的光

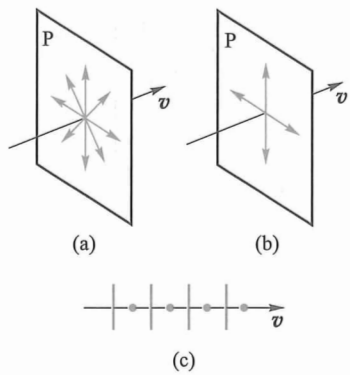


图 21-1　自然光及其表示

振动，短线表示在纸面内的光振动。点和短线交替均匀画出，表示这两个方向的振动强度相同。

2. 线偏振光

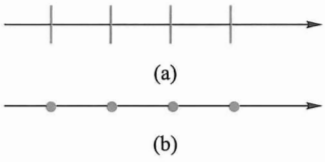


图 21-2 线偏振光及其表示

自然光经过某些物质反射、折射或吸收后，可能只保留沿某一方向的光振动。这种光矢量只沿某一固定方向振动的光称为线偏振光，简称偏振光。偏振光的振动方向与传播方向组成的平面称为振动面。如图 21-2(a)所示为光振动在纸面内的线偏振光，如图 21-2(b)所示为光振动垂直于纸面的线偏振光。

3. 部分偏振光

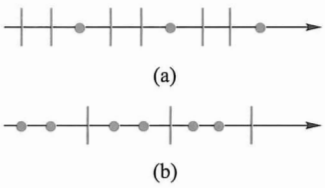
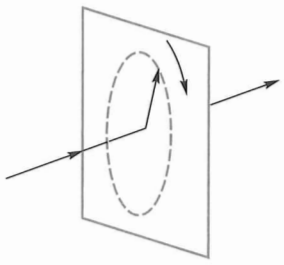


图 21-3 部分偏振光及其表示

除了自然光和线偏振光外，还有一种偏振态介于这两者之间的光。如果在垂直于光的传播方向的平面内，光矢量可取任何一个方向的振动，但不同方向振动的振幅不同，某一方向振动最强，而与该方向垂直的方向振动最弱，则这种光称为部分偏振光。通常，用图 21-3(a)表示在纸面内的振动强于垂直纸面振动的部分偏振光，用图 21-3(b)表示垂直于纸面的振动强于在纸面内振动的部分偏振光。

4. 椭圆偏振光和圆偏振光


图 21-4 椭圆偏振光

如果在垂直于光的传播方向的平面内，光矢量按一定的频率旋转(左旋或右旋)，当光矢量的端点轨迹是圆，这种光称为圆偏振光；而当矢量端点的轨迹是椭圆，这种光称为椭圆偏振光，如图 21-4 所示。根据相互垂直的简谐振动的合成规律，椭圆偏振光和圆偏振光可看成由两个相互垂直、频率相同、相位差恒定的线偏振光合成。圆偏振光是椭圆偏振光的一种特例。

21-2 偏振光的产生和检验

1. 偏振片的起偏和检偏

NOTE

获得偏振光最常用的方法是利用偏振片。偏振片是一种人造的透明薄片。某些物质，例如硫酸碘奎宁晶体，能吸收沿某一方向的光振动，而只让与这个方向垂直的光振动通过。把这种物质蒸镀在透明薄片上，就做成了偏振片。为了便于说明，我们在所使用的偏振片上标出记号“↕”，以表示该偏振片允许通过的光的振动方向，这个方向称为偏振化方向。

如图 21-5 所示，P_1 和 P_2 是两个平行放置的偏振片。当自然光垂直入射 P_1 时，透过 P_1 的光将是和 P_1 的偏振化方向相同的线偏振光。这时，偏振片 P_1 称为起偏器。偏振片不但可以用来将自然光变为偏振光，而且可以用来检验某一光波是否为偏振光。如果让通过 P_1 的偏振光射到 P_2 上，当 P_2 的偏振化方向与 P_1 的偏振化方向相同时，该偏振光可以全部通过 P_2，即透过 P_2 的光强最大，如图 21-5(a)所示；当 P_2 和 P_1 的偏振化方向相互垂直时，该偏振光不能通过 P_2，即透过 P_2 的光强为零，如图 21-5(b)所示；如果将 P_2 以光的传播方向为轴慢慢转动，则透过 P_2 的光经历着由明变暗，再由暗变明的变化过程。如果射向 P_2 的是自然光，那么在旋转 P_2 的过程中，就不会出现明暗变化。如果射向 P_2 的光是部分偏振光，当转动 P_2 时，会有由明到暗、由暗到明的变化，但此时的暗不是全黑。从上述讨论可知，偏振片 P_2 起到了检验光的偏振态的作用，故我们称之为检偏器。

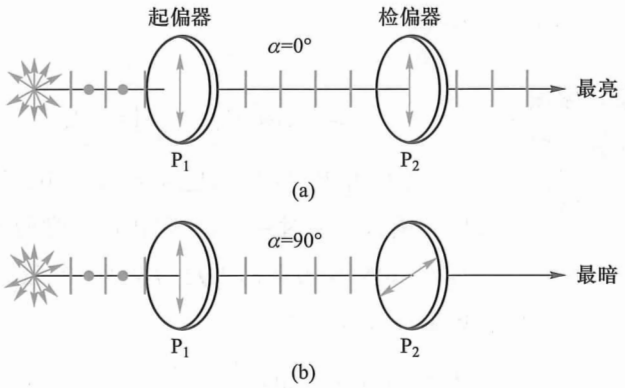


图 21-5 偏振片的起偏和检偏

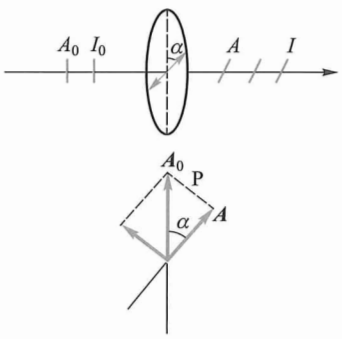


图 21-6　马吕斯定律用图

前面只定性地讨论了由起偏器产生的线偏振光通过检偏器后其光强的变化。如果入射的线偏振光的振动方向和检偏器的偏振化方向成 α 角，那么透过的光的光强遵循什么规律呢？设入射的线偏振光振幅为 A_0，光强为 I_0；透过偏振片的线偏振光振幅为 A，光强为 I。A_0 在偏振片的偏振化方向的投影就是透过光的振幅 A，即 $A=A_0\cos\alpha$，如图 21-6 所示。因光强与振幅的平方成正比，所以

$$\frac{I}{I_0}=\frac{A^2}{A_0^2}=\cos^2\alpha$$

即

$$I=I_0\cos^2\alpha \tag{21-1}$$

这一公式称为马吕斯(E. L. Malus)定律。由此公式，当 $\alpha=0$ 或 $\alpha=\pi$ 时，$I=I_0$，透射光的光强最大；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$ 时，$I=0$，光强为零，这时没有光透过。

例 1

如图 21-7 所示，偏振片 P_1 与偏振片 P_3 的偏振化方向彼此正交，两者之间有一偏振片 P_2，其偏振化方向与 P_1 的偏振化方向成 $\pi/6$ 角度。(1) 若用光强为 I_0 的自然光垂直照射 P_1，从 P_3 透射的偏振光光强为多大？(2) 若 P_2 从图示位置以角速度 $\omega=4\pi$ rad/s 逆时针旋转(以光的传播方向为轴)，则从 P_3 透射的光强又如何？

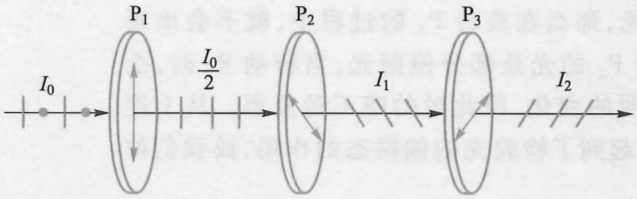


图 21-7　例 1 图

解　(1)自然光通过偏振片 P_1 后成为偏振光，其光强为 $I_0/2$。当此强度的线偏振光射向 P_2 时，从 P_2 透过的光强为 I_1，由马吕斯定律得

$$I_1=\frac{1}{2}I_0\cos^2\frac{\pi}{6}=\frac{3}{8}I_0$$

同理，当强度为 I_1 的光入射到 P_3 时，透过 P_3 的光强为

$$I_2=I_1\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{32}I_0$$

(2)若 P_2 以角速度 $\omega=4\pi$ rad/s 绕光的传播方向逆时针旋转，则在任意时刻 t，P_2 和 P_1 偏振化方向的夹角为 $\omega t+\pi/6$，透过 P_2 的偏振光光强为

$$I_1=\frac{1}{2}I_0\cos^2\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}I_0\cos^2\left(4\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$$

该时刻透过 P_3 的偏振光光强为

$$I_2 = I_1 \cos^2\left[\frac{\pi}{2} - \left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} I_0 \cos^2\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \sin^2\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{8} I_0 \sin^2\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

由此可见，透过 P_3 的偏振光光强随时间发生周期性的变化。

2. 光在反射和折射时的偏振

1809 年马吕斯发现，当自然光入射到折射率分别为 n_1 和 n_2 的两种各向同性的介质的分界面上时，反射光和折射光都是部分偏振光，如图 21-8(a)所示。在反射光中垂直于入射面的光振动强于平行于入射面的光振动，而在折射光中平行于入射面的光振动强于垂直于入射面的光振动。

实验表明，改变入射角 i 时，反射光的偏振化程度也随之改变。当入射角为某一特定值 i_0 时，反射光中只有垂直于入射面的光振动，这时，反射光为偏振光，折射光仍为部分偏振光。如图 21-8(b)所示。这个特定的入射角 i_0 称为起偏角。

实验还发现，自然光以起偏角 i_0 入射到两种介质的分界面上时，反射光和折射光相互垂直，即

$$i_0 + \gamma = 90°$$

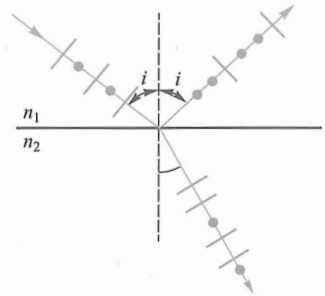
根据折射定律，有

$$n_1 \sin i_0 = n_2 \sin \gamma = n_2 \cos i_0$$

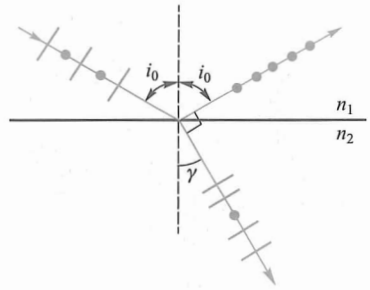
即

$$\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1} \tag{21-2}$$

(21-2)式是 1812 年由布儒斯特(D. Brewster)从实验中确定的，称为布儒斯特定律，起偏角 i_0 又称为布儒斯特角。



(a) 自然光反射和折射后产生的部分偏振光



(b) 起偏角

图 21-8

如前所述，当自然光以起偏角入射到两种介质的界面时，反射光为偏振光，折射光为部分偏振光。对一般的光学玻璃，经过计算可知，反射光的强度通常只占入射光强的 7%。为了增强反射光的强度和提高折射光的偏振化程度，可以让自然光通过由许多平行玻璃片构成的玻璃片堆，如图 21-9 所示。当自然光以起偏角入射时，垂直于入射面的振动在每一个分界面上都要被反射掉一部分，而与入射面平行的振动在分界面上都不被反射。当玻璃片数量足够多时，从玻璃堆透出的光非常接近线偏振光。因

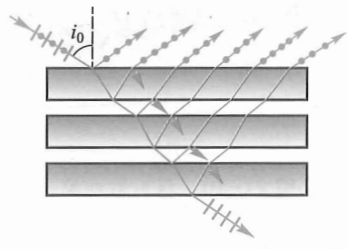


图 21-9 利用玻璃片堆产生偏振光

NOTE

此，利用玻璃片堆可制成起偏器来得到偏振光，同样也可以利用它们来检验偏振光。

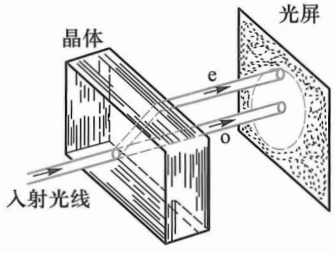
反射光的部分偏振化现象在日常生活中处处可见。如果我们通过一偏振片观察太阳光，将发现来自蓝天的光也是部分偏振的[①]。在晴天拍摄白云时，由于蓝天的背景光太强，往往得不到清晰的云彩照片。这时可以在相机镜头前放置一个由偏振片制成的滤镜，旋转偏振片，滤去部分蓝天的背景光，便可以突出白云。这同样适用于拍摄粼粼的波光，因为太阳的直接反射光通常很强，可以通过偏振片将其减弱，突出水波的其他漫射光的反射。天文学上还根据由行星反射的光的偏振性质，推断出金星大气中含有冰晶或水滴，并确定土星光环是由冰晶所组成。

3. 双折射现象

（1）双折射现象

在有些物质中，如玻璃、水等，光的传播速度既与光的传播方向无关，又与光的偏振状态无关，这些物质称为各向同性介质。还有些物质，如方解石、石英等许多晶体，光在其中的传播速度与光的传播方向及光的偏振状态有关，这些物质称为各向异性介质。

当一束光线在两种各向同性介质的分界面上发生折射时，在入射面内只有一束折射光，其方向由折射定律决定。但是，当光射到各向异性介质中时，一束入射光线将产生两束折射光线，它们沿不同的方向传播，如图 21-10(a)所示。这种现象称为双折射现象。能够产生双折射现象的晶体称为双折射晶体。大部分晶体(除立方系晶体，如岩盐外)都是双折射晶体。通过双折射晶体观察物体时，可看到物体的双重像，如图 21-10(b)所示。



(a)



(b)

图 21-10 双折射现象

实验证明，双折射晶体中的两条折射光线具有不同的性质。其中一条折射光在晶体内的传播规律与在各向同性介质中一样遵从折射定律，这条折射光称为寻常光线，简称 o 光。另一条折射光一般不遵从折射定律，也可能不在入射面内，这条折射光称为非寻常光线，简称 e 光。当用偏振片检查这两束光时，发现它们都是线偏振光，它们的振动方向近似相互垂直。应该指出，所谓 o 光和 e 光，只在双折射晶体内部才有意义，射出晶体以后就无所谓 o 光和 e 光了，这时它们仅是两束振动方向不同的线偏振光而已。

① 蓝天是由太阳光经过大气散射的漫射光形成的，这种光是部分偏振光。

NOTE

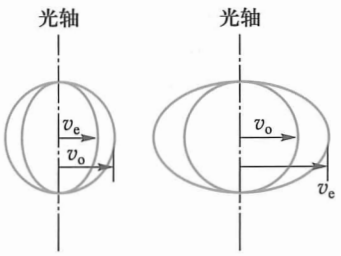
进一步的实验研究表明，在双折射晶体中，存在着一个特殊的方向。当光线在晶体内沿着这一方向传播时，不发生双折射现象，这一特殊的方向称为晶体的光轴。光轴仅表示晶体内的一个方向，任何一条与上述光轴方向平行的直线都可以表示光轴。晶体中仅有一个光轴方向的称为单轴晶体，例如方解石、石英、红宝石等。有些晶体具有两个光轴方向，称为双轴晶体，例如云母、蓝宝石等。本章只讨论单轴晶体。

通过光轴并与任意晶面正交的面称为晶体的主截面。在晶体中，任意光线和光轴所组成的平面称为这一光线的主平面。过 o 光和光轴的平面称为 o 光的主平面；过 e 光和光轴的平面称为 e 光的主平面。实验表明，o 光振动垂直于 o 光的主平面，而 e 光的振动平行于 e 光的主平面。一般情况下，o 光和 e 光的主平面并不重合，但对大多数晶体而言，两者夹角不大。当入射光线在主截面内，即入射面和晶体主截面重合时，o 光和 e 光都在主截面内。这时，o 光和 e 光的主平面与晶体的主截面合二为一，o 光和 e 光的振动方向相互垂直。

（2）惠更斯原理对双折射现象的解释

为什么在各向异性的晶体内会产生双折射现象呢？我们可以用晶体结构和光的电磁理论作出严格的理论解释，在此我们仅用惠更斯原理给出定性的说明。

惠更斯假设，沿各方向传播速度相同的 o 光在晶体中某一点所引起的子波波面是球面，而沿各方向传播速度不同的 e 光在晶体中同一点所引起的子波波面是旋转椭球面，如图 21-11 所示。可以证明，o 光和 e 光沿光轴方向具有相同的传播速度，因此，任何时刻 o 光和 e 光两个波面在光轴上都是相切的。在垂直于光轴的方向上，两光线的速度相差最大。用 v_o 表示 o 光的速度，n_o 表示它的折射率；v_e 表示 e 光在垂直于光轴方向的速度，n_e 表示它在这个方向的折射率。这个折射率 n_e 称为 e 光的主折射率，e 光在其他方向上的折射率则介于 n_o 和 n_e 之间。



(a) 正晶体　　(b) 负晶体

图 21-11　晶体中的子波波阵面

对于有些晶体，$v_o > v_e$，即 $n_o < n_e$，我们称它们为正晶体，如石英等。另外有些晶体，$v_o < v_e$，即 $n_o > n_e$，我们称它们为负晶体，如方解石等。

下面从两种子波的概念出发，结合惠更斯作图法，以负晶体为例，确定几种特殊情况下 o 光和 e 光的传播方向，从而说明双折射现象。

图 21-12 所示为平面波斜入射的情况。此时，光轴在入射面内且与晶体表面有一夹角，AC 为入射平面波的波阵面。当波阵面上的 C 点传播到 B 点时，自 A 向晶体内发出的子波已形成球

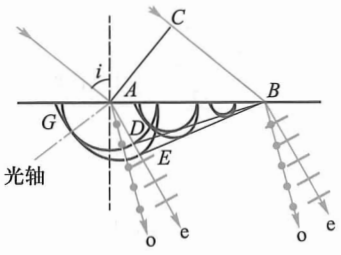


图 21-12

形和旋转椭球形两个子波波面。波阵面 AC 上的其他各点，从 A 至 C 相继到达晶体表面，并相继向晶体内发出半径依次减小的球形子波波面和长、短轴依次减小的旋转椭球子波波面。所有球形子波波面的包络面 BD 即为 o 光的新波阵面，引 AD 线，就得到了 o 光在晶体中的传播方向。同理，所有旋转椭球形子波波面的包络面 BE 即为 e 光的新波阵面，引 AE 线，就得到 e 光在晶体中的传播方向。从图可见，e 光的传播方向和 e 光的波阵面并不垂直，e 光不遵守折射定律。

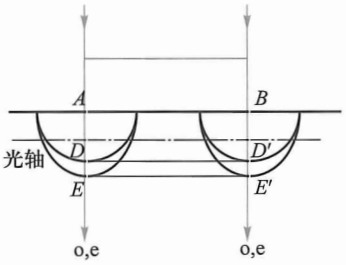


图 21-13

图 21-13 所示为平面波正入射的情况。此时，光轴与晶体表面平行，o 光和 e 光都沿原入射方向传播，但两者的传播速度和折射率都不相等，因而和光在晶体中沿光轴方向传播时无双折射的情况是不同的。

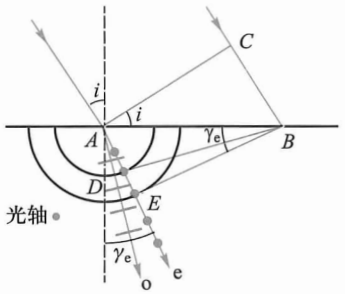


图 21-14

图 21-14 所示为平行光斜入射的情况。此时，光轴与晶面平行且与入射面垂直。在此情况下，o 光和 e 光的子波波面均被入射面截成圆形，所以 o 光和 e 光的传播方向分别与各自的波阵面垂直。虽然在一般情况下，e 光不遵从折射定律，但在此特殊情况下，e 光也遵循通常的折射定律，即有 $\sin i/\sin \gamma_e = n_e$，式中 n_e 为 e 光的主折射率。

从上面的讨论可知，利用晶体的双折射现象，从一束自然光可以获得振动方向相互垂直的两束偏振光，这两束偏振光分开的程度取决于晶体的厚度。纯净天然晶体的厚度一般都较小，因而两偏振光的分开程度很小，实用价值不大。实际上，人们利用晶体的双折射特性，制成了专门产生线偏振光的光学元件，使用较广的有尼科耳（W. Nicol）棱镜、渥拉斯顿（W. H. Wollaston）棱镜和洛匈（Rochen）棱镜。

4. 椭圆偏振光的获得

从单轴晶体中切出一块薄片，使其两个晶面和光轴都互相平行，这样的一片晶体称为晶片，如图 21-15 所示，一束波长为 λ 的单色线偏振光垂直入射至厚度为 d 的晶片。入射光的振幅为 A，光振动方向和晶片光轴的夹角为 θ。此线偏振光进入晶体后生成 o 光和 e 光，o 光振动垂直于光轴，e 光振动平行于光轴。o 光和 e 光的振幅分别为

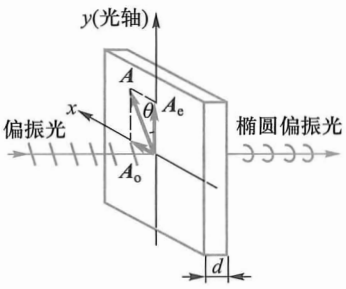


图 21-15　椭圆偏振光

$$\begin{cases} A_o = A\sin\theta \\ A_e = A\cos\theta \end{cases} \tag{21-3}$$

此种情况下，o 光和 e 光沿同一方向前进，但传播速度不同。透

过晶片后，二者的光程差 δ 为

$$\delta=(n_o-n_e)d \tag{21-4}$$

相应的相位差 $\Delta\varphi$ 为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d \tag{21-5}$$

这样的两束相位差恒定、振动方向相互垂直的光互相叠加，一般来说形成椭圆偏振光。

如果适当选取晶片的厚度，使 o 光和 e 光的相位差 $\Delta\varphi=\pi/2$（光程差 $\lambda/4$），此晶片称为四分之一波片。四分之一波片的厚度为

$$d=\frac{\lambda}{4|n_o-n_e|} \tag{21-6}$$

使线偏振光入射四分之一波片，再使 $\theta=45°$，则 $A_o=A_e$，此时透过晶片的光将是圆偏振光。

若某一晶片，使 o 光和 e 光的相位差 $\Delta\varphi=\pi$（光程差 $\lambda/2$），此晶片称为二分之一波片。二分之一波片的厚度为

$$d=\frac{\lambda}{2|n_o-n_e|} \tag{21-7}$$

使线偏振光通过二分之一波片后得到的仍为线偏振光，但其振动面已转过 2θ 角。若 $\theta=\pi/4$，可使线偏振光的振动面旋转 $\pi/2$。

值得注意的是，二分之一波片和四分之一波片是对特定的波长为 λ 的光而言的，不能通用。

NOTE

21-3 偏振光的干涉及应用

1. 偏振光的干涉

观察偏振光干涉的装置如图 21-16 所示。图中 P_1 和 P_2 是两平行放置的偏振片，它们的偏振化方向互相垂直，C 为双折射晶体，其光轴和 P_1 的偏振化方向的夹角为 α。

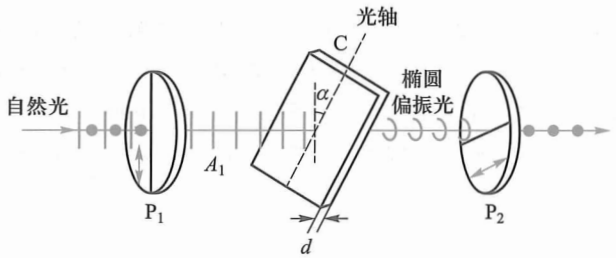


图 21-16 观察偏振光干涉的装置

波长为 λ 的单色自然光垂直入射于偏振片 P_1，通过 P_1 后成为振动方向和 P_1 的偏振化方向一致、振幅为 A_1 的线偏振光。此线偏振光射入晶片后产生双折射，成为沿相同方向传播，但振动方向相互垂直的 o 光和 e 光，它们的振幅为

$$A_{1o}=A_1\sin\alpha,\quad A_{1e}=A_1\cos\alpha$$

相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}|n_o-n_e|d$$

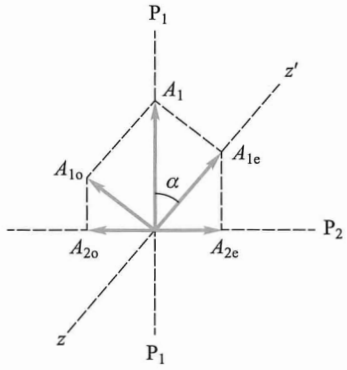


图 21-17　正交偏振片系统中光的振幅关系

NOTE

当这两束光再经过偏振片 P_2 时，只有沿 P_2 偏振化方向的分量 A_{2o} 和 A_{2e} 才能通过。由图 21-17 可知，能通过 P_2 的两振动的振幅为

$$A_{2o}=A_{1o}\cos\alpha=A_1\sin\alpha\cos\alpha$$

$$A_{2e}=A_{1e}\sin\alpha=A_1\sin\alpha\cos\alpha$$

相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}|n_o-n_e|d+\pi$$

上式中的 π 是由于投影到 P_2 的偏振化方向的光矢量方向相反所引起的一附加相位差。

由上述讨论可见，通过 P_2 的两束光振动方向相同，频率相同，有恒定的相位差，所以它们将产生相干叠加。通过 P_2 的光强取决于这种相干叠加的结果。当

$$\Delta\varphi=2k\pi,\quad k=1,2,3,\cdots$$

或

$$|n_o-n_e|d=(2k-1)\frac{\lambda}{2}$$

时，干涉最强，视场最亮。当

$$\Delta\varphi=(2k+1)\pi,\quad k=1,2,3,\cdots$$

或

$$|n_o-n_e|d=k\lambda$$

时，干涉最弱，视场最暗。若晶片厚度不均匀，各处干涉情况不同，则视场中将出现干涉条纹。如果入射光是白光，则因对不同波长的光不会同时满足干涉加强或干涉减弱的条件，必然是某些波长的光满足干涉加强条件，而另一些波长的光满足干涉减弱条件，所以在通过偏振片 P_2 的光中，波长组成及相对强度发生了变化，从而呈现出一定的色彩，这种现象称为色偏振。色偏振现象已广泛用于检验双折射现象、矿物分析以及研究晶体的内部结构等。

例 2

偏振光的干涉有广泛的应用。在地质和冶金研究中，就是基于不同矿物晶体在正交偏光系统中形成不同干涉颜色，广泛使用偏光显微镜来观察岩石样品中的矿物组成、矿物结晶的形态和分布情况的。例如某岩石样品被磨制成 1.5×10^{-6} m 厚的薄片。如果该岩石样品中包括了几种透明的具有双折射性质的矿物：方解石、白云石、菱铁矿时，则当把该薄片放在两正交的偏振片之间，用显微镜观察时，就会发现这三种矿物显示三种不同的颜色。试分析这三种矿物在偏光显微镜下各是什么颜色。

解　按偏振光干涉原理，主折射率之差为 n_o-n_e，厚度为 d 的矿物当满足以下条件：

$$(n_o-n_e)d=(2k-1)\frac{\lambda}{2},\quad k=1,2,3,\cdots$$

此时，相应各波长的光干涉得到加强。

对方解石，$n_o-n_e=0.172$，由以上条件可得在可见光范围内干涉加强的波长为

$$\lambda=\frac{2(n_o-n_e)d}{2k-1}=\frac{2\times0.172\times1\,500}{2\times1-1}\ \text{nm}=516\ \text{nm}(\text{绿})$$

同理，对白云石（$n_o-n_e=0.181$）、菱铁矿（$n_o-n_e=0.240$），干涉加强的波长分别为 543 nm（黄）和 720 nm（红）。由此可知，方解石对应于绿色，白云石对应于黄色，菱铁矿对应于红色。从这些色彩的分布，我们可以了解到该岩石中，这几种矿物的不同分布及相应的晶型。

NOTE

2. 光弹效应

某些透明的物质，如玻璃、塑料等，在通常情况下是各向同性的，光通过这类物质时不发生双折射现象。但在内应力或机械应力作用下，它们会变成各向异性的，从而使光产生双折射，这种现象称为光弹效应。

实验表明，在这种应力作用下的透明介质中，o 光的折射率和 e 光的折射率之差 n_o-n_e 与应力 σ 成正比，即

$$n_o-n_e=k\sigma$$

式中 k 为取决于材料性质的系数。如果把这种透明介质制成厚度为 d 的片状，插在两正交的偏振片之间，由于应力不同的地方 n_o-n_e 也不同，所以 o 光和 e 光的相位差也不同，在第二个偏振片后将观察到一定的干涉图样。当以白光照射，则呈现彩色的干涉图样。图 21-18 所示是圆盘受压时观察到的干涉图样。干涉条纹与应力有关，应力越集中的地方，各向异性越强，干涉条纹越细密。

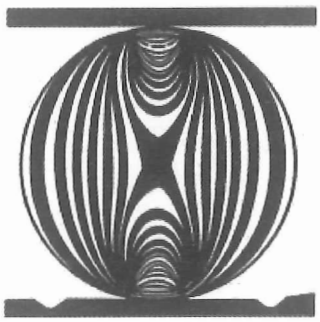


图 21-18　光测弹性干涉图样

在工程技术中，对桥梁、水坝以及机械零件的设计必须考虑

NOTE

有荷载时内部的应力分布情况。由于绝大多数的材料是不透明的，故不能直接应用上述方法进行研究。但可采用模拟的办法，用透明材料做成与实物相似的模型，并仿照真实物体所受的荷载施以机械力。通过观察和分析所出现的彩色条纹，就可知模型内部的应力分布。这种利用偏振光的干涉来测定物体内部应力分布的方法称为光弹性方法，现已发展为专门的学科——光测弹性学。

3. 电光效应

某些各向同性的介质在外界强电场的作用下，会变得各向异性，从而产生双折射，这种现象称为电光效应。

一种电光效应是克尔(J.Kerr)于1875年首次发现的，称为克尔效应。图21-19是观察克尔效应的实验装置。在两正交偏振片 P_1 和 P_2 之间，放置一个充有硝基苯液体的小盒，称为克尔盒。克尔盒内装有长为 l、间隔为 d 的平行板电极。在不加电场时，液体是各向同性的，光不能通过偏振片 P_2。加电场后，克尔盒中的介质分子因在电场作用下定向排列，而呈现各向异性，其光学性质和单轴晶体类似，光轴方向沿电场方向，这时由于双折射，有光通过 P_2。实验表明，o光和e光的折射率之差与所加电场的平方成正比，即

$$n_o - n_e = kE^2$$

其中 k 是取决于液体性质的常量，称为克尔常量。o光和e光通过厚为 l 的液体后的光程差为

$$\delta = (n_o - n_e)l = klE^2 = kl\frac{U^2}{d^2}$$

式中 U 为两极间所加的电压。由此式可见，加于电容器的电压改变时，光程差 δ 随之改变，从而使通过 P_2 的光强也随之改变。

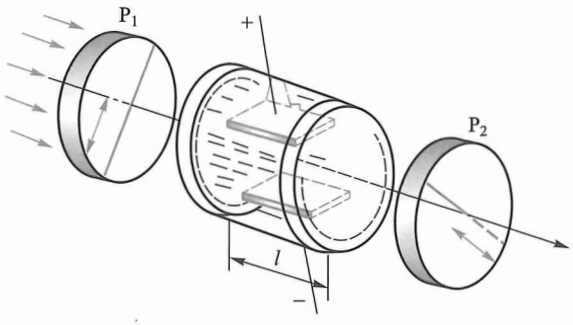


图21-19 克尔效应装置

应用这一原理，可对光波的强度进行调制，目前这一技术已应用于激光通信和电视图像的传播装置中。

NOTE

克尔效应的弛豫时间极短，它随电场的产生和消失而很快地产生和消失，只需约 10^{-9} s 的时间，因此它可用于制作高速开关。这种几乎无惯性的光开关，在 1 s 内可切断光束高达 10^{9} 次，这是任何机械开关都不能比拟的。克尔盒作为高速开关，在高速摄影、光速测量以及激光技术中获得广泛应用。

由于克尔盒中的硝基苯液体有毒，携带不方便，因此近年来克尔盒已逐渐被具有电光效应的晶体所代替。

21-4 旋光现象

1811 年，阿拉戈（D. Arago）首先发现，当线偏振光沿着石英晶体的光轴方向通过晶体时，虽然并没有发生双折射，透射光仍是一束线偏振光，但其振动面却旋转了一个角度，这种现象称为旋光现象。

旋光现象不仅可以在石英等晶体中发现，在某些液体中也有旋光现象，如松节油等纯液体、糖的水溶液和酒石酸溶液等。溶液的旋光性在制糖、制药和化工等方面很有用。例如，测定糖溶液浓度的糖量计就是根据糖溶液的旋光性而设计的一种仪器。

正如用人工方法产生双折射一样，我们也可用人工方法产生旋光现象。其中最重要的是磁致旋光的方法，其原理通常称为法拉第旋转效应，是法拉第在 1846 年发现的。当线偏振光沿磁场方向通过磁性物质时，线偏振光的振动面将转过一个角度。利用这一性质可以制成光隔离器，即只允许光从一个方向通过而不能从反方向通过的光阀门。这在激光的多级放大装置中往往是必要的。

本章摘要

1. 光波的五种偏振状态

自然光、线偏振光、部分偏振光、椭圆偏振光、圆偏振光。

2. 产生偏振光的三种方法

偏振片、反射和折射、双折射。

3. 马吕斯定律

$$I=I_0\cos^2\alpha$$

NOTE

4. 布儒斯特定律

$$\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1}$$

5. 双折射

光进入晶体后分为 o 光和 e 光。o 光服从折射定律，e 光一般来说不服从折射定律。o 光和 e 光均是线偏振光。

6. 偏振光的干涉

利用晶片和偏振片可以使偏振光分成振动方向相同、相位差恒定的相干光而产生干涉。

7. 偏振光干涉的应用

光弹效应、电光效应。

8. 旋光现象

线偏振光通过某些物质后，振动面会发生旋转。

思考题

21-1 有人说，某束光可能是(1)线偏振光、(2)圆偏振光、(3)自然光，你如何用实验来确定这束光是这三种光的哪一种？

21-2 一块偏振片没有标明偏振的方向，你能否想出一个简单方法来确定它的方向？

21-3 自然光经过方解石以后分成 o 光和 e 光，若把这两束光再合起来，是否可能产生干涉？

21-4 求一束圆偏振光：

(1) 垂直入射到四分之一波片上时，透射光的偏振态；

(2) 垂直入射到八分之一波片上时，透射光的偏振态。

21-5 一束椭圆偏振光入射至四分之一波片，其长轴和光轴的夹角 $\alpha=0°$，求透射光的偏振态。

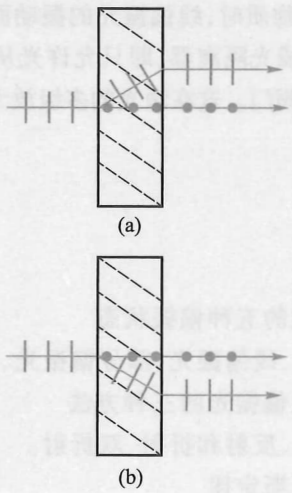
21-6 雷达波能否成为圆偏振波？空气中的声波能否成为圆偏振波？

21-7 一束自然光通过方解石后，透射光有几束？若将方解石沿垂直于光传播的方向截成两块，且平移分开，此时通过这两块方解石后有几束透射光？若将其中一块绕光线转过一角度，此时透射光有几束？

21-8 怎样区别二分之一波片、四分之一波片和偏振片？

21-9 用一检偏器观察一束光时，发现光强有一最大及一最小，但无消光现象。令该光束先经四分之一波片，波片的光轴方向与光强最大时检偏器的偏振化方向平行。若通过检偏器观察时，看到有消光现象，试分析这束光的偏振态。

21-10 在题图中虚线代表光轴，试根据图中所画的折射情况判断晶体的正负。



思考题 21-10 图

习题

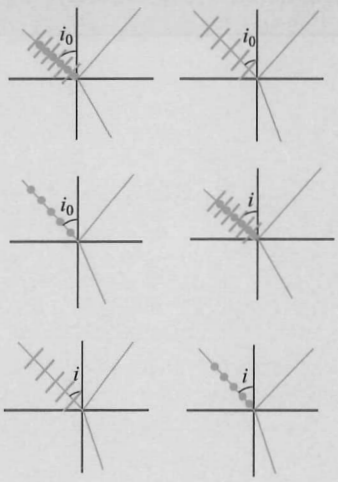
21-1　自然光投射到互相重叠的两块偏振片上，若透射光的强度为入射光强度的 1/9，求两块偏振片的偏振化方向的夹角。

21-2　使自然光通过两个偏振化方向相交 60° 的偏振片，透射光强为 I_1。今在这两个偏振片之间再插入另一偏振片，它的偏振化方向与前两个偏振片均成 30° 角，则透射光强为多少？

21-3　用线偏振光和自然光混合的光束垂直照射偏振片，转动偏振片，测得透射光光强最大值 I_{max} 和最小值 I_{min} 之比等于 5，求入射光中线偏振光和自然光的光强之比。

21-4　一束自然光通过偏振化方向互成 60° 的两个偏振片，若每个偏振片吸收 10% 可通过的光线，求出射光强与入射光强之比。

21-5　在题图所示的各种情况中，以非偏振光或偏振光入射于两种介质的分界面，图中 i_0 为起偏振角，$i \neq i_0$，试画出折射光线和反射光线偏振状态。（用点和短线表示）

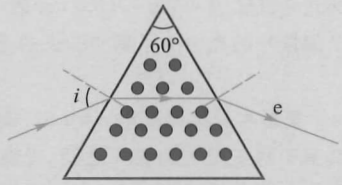


习题 21-5 图

21-6　怎样测定不透明电介质的折射率？今测得釉质的起偏振角 $i_0 = 58°$，试求它的折射率。

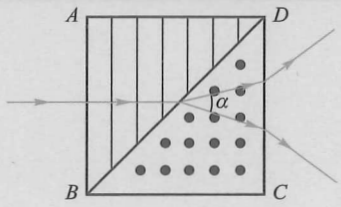
21-7　水的折射率为 1.33，玻璃的折射率为 1.50。当光由水中射向玻璃而反射时，起偏角为多少？当光由玻璃射向水中而反射时，起偏角又为多少？

21-8　将方解石割成一个 60° 的正三角形棱镜，光轴垂直于棱镜的正三角形截面。设非偏振光的入射角为 i，e 光在棱镜内的折射线与镜底边平行，如题图所示，求入射角 i，并在图中画出 o 光光路。已知 $n_e = 1.49$，$n_o = 1.66$。



习题 21-8 图

21-9　如题图所示的二维渥拉斯顿棱镜的截面是通过将两个棱角均为 45° 的直角方解石棱镜的斜面黏合而构成的，棱镜 ABD 的光轴平行于 AB，棱镜 BDC 的光轴垂直于图截面。当自然光垂直 AB 入射时，试在图中画出 o 光和 e 光的传播方向及光矢量振动方向。



习题 21-9 图

21-10　某晶体对波长 632.8 nm 的折射率 $n_o = 1.66$，$n_e = 1.49$。将它制成适用于该波长的四分之一波片，晶片至少要多厚？

21-11　两片相互正交的偏振片之间，放置一片四分之一波片，当自然光垂直入射时转动四分之一波片，问什么位置处透射光的光强最大？

21-12 一束波长为 589.3×10^{-9} m 的自然光通过起偏器后垂直地进入石英晶片，该晶片的光轴平行于晶片表面。石英晶体对寻常光线的折射率和对非寻常光线的主折射率分别为 1.544 3 和 1.553 4。若要使穿过石英晶片后的透射光为圆偏振光，求：

（1）石英晶片的最小厚度；

（2）起偏器的偏振化方向与晶片光轴的夹角。

21-13 厚为 0.025 mm 的方解石晶片的表面平行于光轴。将其放在两个正交的偏振片之间，光轴与两个偏振片的偏振化方向各成 45°角。如果射入第一个偏振片的光是波长为 400.0~760.0 nm 的可见光，问透出第二个偏振片的光中少了哪些波长的光？

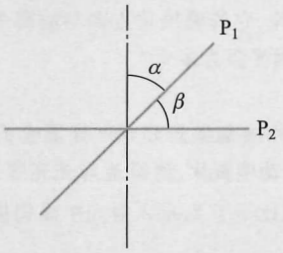
21-14 楔形水晶棱镜顶角 $\alpha=0.5°$，棱边与光轴平行。将其置于两正交的偏振片之间，光轴与两个偏振片的偏振化方向各成 45°角。以水银灯发出的波长为 404.7 nm 的紫色光垂直照射，水晶对此光的 $n_o=1.557$，$n_e=1.566$，问：

（1）通过第二个偏振片看到的干涉图样如何？

（2）相邻明纹的间距 d 是多少？

（3）若第二个偏振片转 90°角，干涉条纹有何变化？

21-15 两个偏振片 P_1、P_2 叠在一起，由强度相同的自然光和线偏振光混合而成的光束垂直入射到偏振片上。已知穿过 P_1 后的透射光强为入射光强的一半，连续穿过 P_1、P_2 后透射光强为入射光强的四分之一。求：(1)入射光中线偏振光的光矢量振动方向与 P_1 的偏振化方向夹角 α；(2)P_1、P_2 的偏振化方向之间的夹角 β。



习题 21-15 图

21-16 假设有一线偏振光 $\lambda=589.3$ nm（钠黄光）垂直入射到石英晶片上，晶片的光轴平行于表面，设入射光的偏振化方向与光轴夹角为 30°。已知该石英片厚度为 $d=4\ 092.36$ nm，两个主折射率分别为 $n_e=1.553$，$n_o=1.541$。试问：

（1）出射光中的 o 光和 e 光的相位差为多少？

（2）出射光中的 o 光和 e 光的强度之比如何？

习题解答

第二十二章　光的量子论

本章介绍电磁波的初级量子理论，包括黑体辐射、光电效应和康普顿效应。介绍经典物理学在解释这些实验现象时所遭遇的困境。介绍普朗克、爱因斯坦等人是如何通过引入量子的概念而达到与实验一致的理论结果的。



本章补充资源

22-1　热辐射

NOTE

辐射是指物体放出电磁波的物理现象。辐射的机制主要有两种：一种是组成物质的原子分子（包括原子核）从激发态跃迁到低激发态或者基态释放出光子；另一种是带电粒子在作加速运动时会释放出电磁波。还有一种罕见过程是一些粒子湮没生成光子。虽然第一种机制是最普遍的辐射来源，但是在量子论建立以前，经典物理学只有第二种辐射机制。热辐射是指物体的辐射特性与物体的温度相关，即与组成物体的微观粒子的热运动相关。图 22-1 展示的是人头部的热辐射影像。这里要区分物体的热辐射和物体的普通反射。普通反射从机制上讲是组成物质的带电粒子受到入射电磁波的影响而发出的辐射，所以它与入射电磁波关系大，与物质热运动关系不是很大。



图 22-1　人体热辐射主要集中在红外波段，需要通过电子设备转换成人眼可视的图像（见彩色插页）

为了定量描述热辐射，我们引进辐出度的概念。一个物体在波长 $\lambda \sim \lambda+\mathrm{d}\lambda$ 范围内，在单位时间通过单位面积的辐射能量称为单色辐出度

$$\mathrm{d}E(\lambda, T)=M(\lambda, T)\,\mathrm{d}\lambda \tag{22-1}$$

物体在全波段单位时间通过单位面积的辐射能量称为总辐出度：

$$M(T)=\int M(\lambda, T)\,\mathrm{d}\lambda \tag{22-2}$$

图 22-2 展示的是物体单色辐出度与温度的关系（图 22-2 实际是黑体辐射谱，定性上与普通物质的单色辐出度差别不大）。

从图 22-2 中我们可以观测到热辐射的一些特性：对于确定的温度，单色辐出度都有一个极大值，其对应的波长为 $\lambda_{\max}$，它代

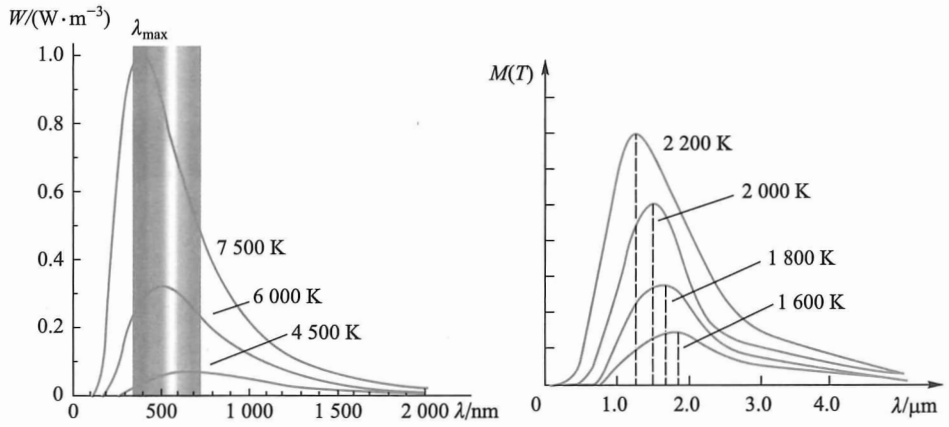


图 22-2 单色辐出度与温度的关系(见彩色插页)

NOTE

表在这个温度下,物体在此波长附近辐射的电表在磁波最强。λ_{max}随着温度的升高逐渐变小,因此导致如下现象:

(1) 在温度<600 ℃时,物体的辐射集中在红外、远红外区域,因此在无可见光的夜晚只能通过红外设备才能显现人像。

(2) 随着温度上升到 600 ℃以上,物体开始变红,表明物体开始辐射红色可见光(严格说是可见光足够强到人眼可以分辨)。随着温度的上升,物体变得发白,进一步发出蓝光,"炉火纯青"就是描述炉膛温度达到了锻造金属的温度。

22-2 基尔霍夫定律

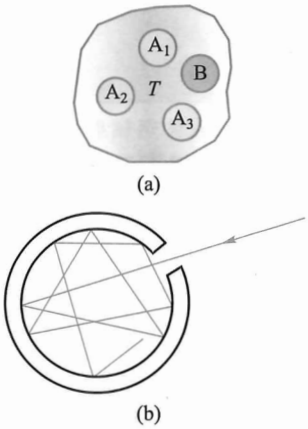


图 22-3 (a)说明基尔霍夫定律的空腔(b)黑体辐射模型

一个物体如果达到热平衡,温度不再变化,那么它通过热辐射释放的能量一定要获得补偿,即同时它也会吸收辐射。一般物体不会完全吸收入射到它表面的辐射,会反射其中一部分辐射。不同的物体吸收和反射辐射的能力是不同的。我们用 $\alpha(\lambda,T)$ 表示一个物体对波长为 λ 的入射波在温度为 T 时的吸收率。我们考虑一个达到热平衡的空腔(图 22-3),里面放置了各种材质的物体。由于达到热平衡,空腔中的电磁波能流是固定的,所以每个物体的单色辐出度与吸收率之比都是一样的(吸收等于辐射),是波长和温度的普适函数,即

$$\frac{M_1(\lambda,T)}{\alpha_1(\lambda,T)}=\frac{M_2(\lambda,T)}{\alpha_2(\lambda,T)}=\cdots=f(\lambda,T) \tag{22-3}$$

(22-3)式称为基尔霍夫定律。它表明一个物体在某个波长吸收

能力强，其辐射能力也强。比如一件白色的 T 恤，其在可见光波段反射能力强，即吸收能力弱，所以其在可见光波段辐射能力也差。而一件黑色的 T 恤正相反。因此不同物体的热辐射性质有差异。

NOTE

我们现在引进绝对黑体的概念。绝对黑体是能够 100%吸收照射在它表面的所有波长的电磁波，即 $\alpha(\lambda, T)=1$。这样的物体在自然界应该是不存在的。然而我们可以人工制造一个逼近绝对黑体的环境。我们可以制造一个空腔，空腔上开一个很小的孔，小孔就成为空腔与外界的接触表面（图 22-3）。外界入射进空腔的辐射，必须经过空腔多次反射，才有可能从小孔射出。由于每次反射都损失能量，最后从小孔反射出的辐射几乎为零。小孔就是一个近似的绝对黑体。同时空腔中的辐射也会通过小孔射出。这种辐射称为黑体辐射。其辐射的性质与用什么材料建立的空腔无关，因为其吸收率恒定为 1。我们可以通过图 22-4 来说明空腔中的辐射与空腔的材料无关。图中两种材料的空腔用一根细管连接。当达到热平衡后，左右两个空腔的能量是恒定的，所以左边空腔通过细管传入右边的辐射能量一定等于右边传入左边的辐射能量。这个结论在任意波长附近都是成立的。我们可以在细管中插入一张膜。只让某种波长的辐射通过。在达到热平衡后，依然是左传右等于右传左。所以左右空腔通过细管的能流密度是相等的。把细管换成开窗，就是黑体辐射，其单色辐出度与空腔的材料无关。

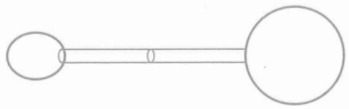


图 22-4 左右空腔可以形状不同，材料不同

黑体辐射可以通过图 22-5 的装置进行研究。黑体辐射的单色辐出度与温度和波长的关系显示在图 22-2 中。

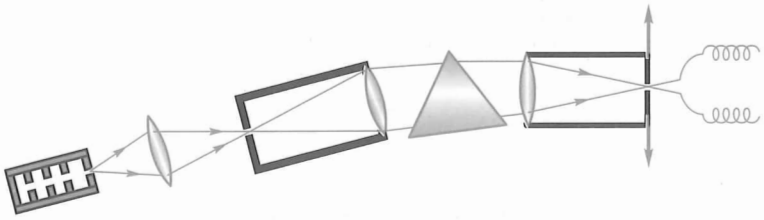
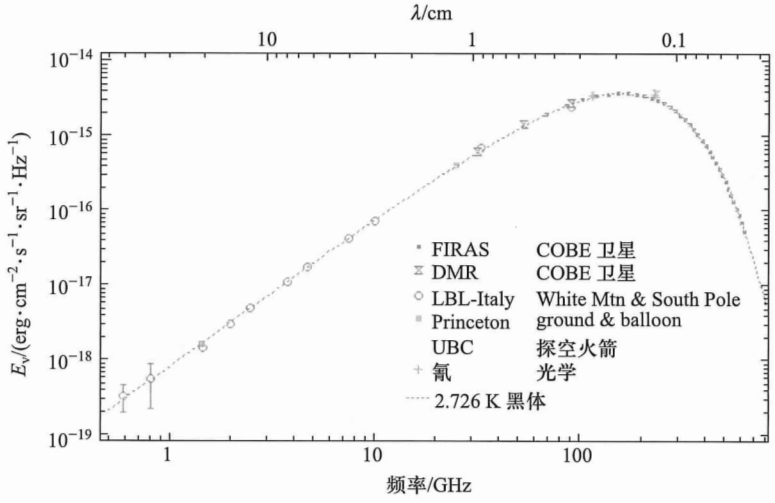


图 22-5 从小孔引出辐射后通过平行光管形成平行光，再经过三棱镜分光，然后经过平行光管达到热电偶，测量单色辐出度

根据我们现在的认知，宇宙是有限的，产生于 140 亿年前的一次大爆炸。因而宇宙可以视为一个大空腔，里面充满了由于大爆炸而产生的辐射。随着宇宙的膨胀而降温，这种辐射的温度到今天只有约 2.7 K。实验完美地证实了这些辐射是黑体辐射，见图 22-6。这是对宇宙大爆炸模型的重要支持。

NOTE

一块黑色的瓷片和一块白色的瓷片，在有光的夜晚哪块会更亮一些？如果加热到 1 200 ℃，哪块会更亮一些？



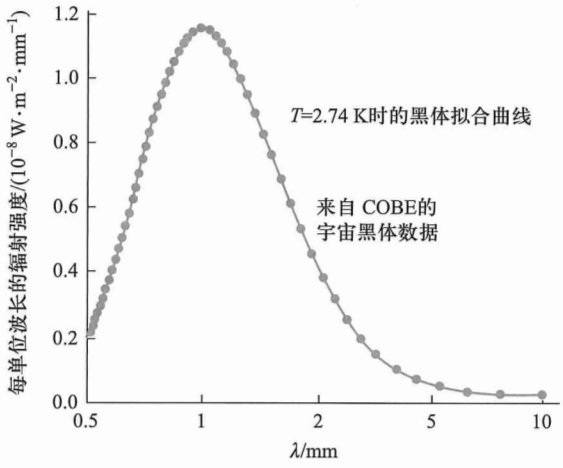


图 22-6

22-3 黑体辐射的性质

维恩根据实验发现黑体单色辐出度最大值所对应的波长 λ_{max} 与温度成反比，总结出了维恩位移定律：

$$\lambda_{max}=\frac{b}{T} \tag{22-4}$$

其中 $b=2.897\times10^{-3}$ m · K，称为维恩常量。维恩位移定律可以用来

估计物体的温度，特别是遥远星体的温度。比如太阳的单色辐出度在 $\lambda_{max}=497$ nm（黄绿光）达到最大，将太阳作为黑体（事实上其辐射谱很接近黑体谱），可以估计出太阳表面的温度为 $T=5\ 828$ K。

黑体辐射的总辐出度与温度的四次方成正比，这称为斯特藩-玻耳兹曼定律：

$$M(T)=\sigma T^4 \tag{22-5}$$

其中 $\sigma=5.67\times10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2\cdot K^4)}$ 是斯特藩-玻耳兹曼常量。根据斯特藩-玻耳兹曼定律，太阳表面单位面积的辐射功率（总辐出度）大约是

$$M(T)=5.67\times10^{-8}\times5\ 828^4\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}=6.5\times10^7\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$$

这个能流即使达到地球也有很大的可利用性。

在流行病爆发时，大量人体体表温度计被应用（图 22-7）。特别在很多人流量大的公共场所，如医院、车站等，人通过时可自动测温。这些温度计就是利用斯特藩-玻耳兹曼定律，通过人像识别，收集人体红外辐射，从而确定人体的体温。

请估计地球表面单位面积接收太阳辐射的功率。

NOTE



图 22-7

22-4 经典电磁学对黑体辐射的解释

这一小节我们简单介绍经典电磁辐射理论及瑞利-金斯公式的来历，这对于理解普朗克谐振子量子化的想法有帮助。对这些内容不感兴趣的同学可以直接跳到本节最后看结果。以下讨论的主要思路是：空腔中的辐射不断被腔壁吸收，腔壁同时又不断向腔内辐射，这两个过程最终达到平衡。通过腔壁的吸收和辐射机制，我们可求出空腔中的辐射密度与温度的关系。而空腔中的辐射密度与空腔开一个小口向外的辐出度直接相关。

在经典电磁学中，辐射是由电荷作加速运动而产生的。电磁辐射的一个很重要的辐射机制是偶极辐射。一对正负电荷处于平衡位置。如果我们使其偏离平衡位置，它们会作简谐振动。电偶极矩可以表示成

$$p=ql=qA\cos\ \omega t+c \tag{22-6}$$

c 是一个常量，表示振子在平衡位置处的电偶极矩。A 是振子在平衡位置附近振动的振幅。根据经典电磁学，作简谐振动的偶极子（电荷作加速运动）的辐射功率为

NOTE

$$P=\frac{|\ddot{p}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{22-7}$$

将(22-6)式代入(22-7)式,对时间求平均得到平均辐射功率为

$$\overline{P}=\frac{\omega^4 q^2 A^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}=\frac{\omega^4 q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 k}\frac{1}{2}kA^2=\frac{\omega^4 q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 k}\overline{E}=-\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\mathrm{d}t} \tag{22-8}$$

k 是振子的弹性系数,$\overline{E}=\frac{1}{2}kA^2$ 是振子的总能量。(22-8)式最右的等式说明辐射的功率等于振子单位时间损失的能量。因此振子是有阻尼的,振幅可以表述成时间的函数:

$$A=\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}}A_0 \tag{22-9}$$

γ 是阻尼系数,根据(22-8)式可以表示成

$$\gamma=\frac{\omega^4 q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 k} \tag{22-10}$$

我们现在考虑这个偶极子的振动是受电磁波影响的受迫振动(达到平衡的振子不断辐射,并同时受到外辐射场的力提供的功):

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=-kx+qE\cos\ \omega t \tag{22-11}$$

式中 E 是电磁波电场强度的振幅。(22-11)式受迫振动的特解是①

$$x=\frac{-qE}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\cos\ \omega t \tag{22-12}$$

其中

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

是系统的固有角频率。当入射波的频率和固有频率相同时,就发生共振,振幅(22-12)式为无穷大。这是因为外加的驱动力与振子同步,总是做正功,振子的能量随时间不断增加。这是一个理想无损耗的振子,自然界中不会有这样的振子。由于振子(22-11)式同时也在辐射,所以会有阻尼。引进阻尼后,(22-12)式的振幅修正为(可参考 7-4 节关于受迫振动的页下注)

$$A=\frac{-qE}{m(\omega^2-\omega_0^2+i\omega\gamma)} \tag{22-13}$$

(22-13)式采用了复变函数,这是在处理波时常用的方法,后面

① 还有一个通解,是振子的固有振动,与外场无关。特别是存在阻尼时,振幅随着时间衰减,最后只剩下(22-13)式的项。(22-13)式不随时间衰减,是因为辐射和吸收达到平衡。

量子力学相关章节还会采用。引进阻尼后(22-13)式在共振时振幅是有限的。复数形式的振幅在振动相位上会引进一个固定的相位差,这个相位差和我们的讨论主题无关。我们只要知道振幅大小的平方等于复数振幅的模方,即系统的总能量等于

NOTE

$$\begin{aligned}\overline{E}&=\frac{1}{2}k|A|^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{qE}{m}\right)^2\frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}\\&=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\frac{kq^2}{\varepsilon_0m^2}\frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}\end{aligned}\tag{22-14}$$

其中$\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$就是单频入射电磁波的时间平均能量密度。对于空腔内部的电磁波,其频率不是确定的,有一个分布。我们可以定义在区间$\omega\sim\omega+\mathrm{d}\omega$的能量密度是$u(\omega)\mathrm{d}\omega$,用来替代单频的能量密度$\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$。这样振子受到这个波段电磁波影响的总能量是

$$\mathrm{d}\overline{E}=\frac{kq^2}{\varepsilon_0m^2}\frac{u(\omega)\mathrm{d}\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}\tag{22-15}$$

这个波段的辐射(散射)功率就是①

$$\mathrm{d}P=\gamma\mathrm{d}\overline{E}\tag{22-16}$$

那么振子受腔内电磁波影响而辐射(散射)的总功率是

$$P=\frac{kq^2}{\varepsilon_0m^2}\int_0^\infty\frac{\gamma u(\omega)\mathrm{d}\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}\tag{22-17}$$

要完成(22-17)式的积分,我们需要作些近似。因为阻尼系数γ非常小,整个积分主要由角频率靠近固有角频率(发生共振)的那个区域贡献的,所以(22-17)式可以近似为

$$P=\frac{kq^2u(\omega_0)\gamma_0}{4\varepsilon_0m^2\omega_0^2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\omega}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma_0^2/4}\tag{22-18}$$

式中γ_0是(22-10)式中频率设为固有频率(发生共振)的阻尼系数。由于$\omega_0>>\gamma_0$,所以(22-18)式可以近似为

$$\begin{aligned}P&=\frac{kq^2u(\omega_0)\gamma_0}{4\varepsilon_0m^2\omega_0^2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\mathrm{d}\omega}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma_0^2/4}\\&=\frac{kq^2u(\omega_0)\gamma_0}{4\varepsilon_0m^2\omega_0^2}\frac{2\pi}{\gamma_0}=\frac{k\pi q^2u(\omega_0)}{2\varepsilon_0m^2\omega_0^2}\end{aligned}\tag{22-19}$$

根据(22-10)式和(22-19)式,得到

① 虽然此时辐射和吸收达到平衡,振幅不再随时间变化,但辐射的效果依然造成阻尼,其功率依然可以写成(22-16)式。

NOTE

$$P=\frac{k\pi q^2 u(\omega_0)}{2\varepsilon_0 m^2\omega_0^2}\approx\gamma_0\overline{E}=\frac{\omega_0^4 q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 k}\overline{E} \tag{22-20}$$

约等于号表示，我们将总辐射功率近似为振子总能量乘以共振频率的阻尼系数。因此我们得到空腔电磁波的能量分布函数

$$u(\omega_0)=\frac{\omega_0^2}{3\pi^2 c^3}\overline{E} \tag{22-21}$$

由于振子是各种各样的，固有频率是不确定的，其总能量也是不确定的，我们将振子能量设置为热平衡下振子的平均能量。利用能量均分定理，一个简谐振子在一个方向上振动的平均能量是 kT，在三个方向上就是 $3kT$。我们同时也可以把(22-21)式的下标“0”去掉，用 $3kT$ 代替(22-21)式中振子的能量，得到

$$u(\omega)=\frac{kT\omega^2}{\pi^2 c^3} \tag{22-22}$$

得到能量密度分布函数后，我们需要求腔中辐射的能流密度分布函数。对于平面波来说，能流密度就等于能量密度乘以光速。由于腔中辐射是各向同性的，即朝任何方向的能流密度是一样的，对不同传播方向的电磁波求平均①，这个平均因子是 1/4。根据第二小节的讨论，空腔在 $\lambda\sim\lambda+\mathrm{d}\lambda$ 区间的能流密度与黑体的单色辐出度是一样的，即有如下关联：

$$M(\lambda,T)\,\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{4}cu(\omega)\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{4}c\,\frac{kT}{\pi^2 c^3}\left(2\pi\,\frac{c}{\lambda}\right)^2\left(2\pi c\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}\right)=\frac{2\pi ckT}{\lambda^4}\mathrm{d}\lambda \tag{22-23}$$

(22-23)式第二个等号左右两侧的式子是我们将角频率换作波长得到的。$\mathrm{d}\omega$ 用 $\mathrm{d}\lambda$ 代换时出现的负号我们略去了，它只表示当频率增加时波长是减小的。这样就获得了瑞利-金斯公式②。这个公式有个明显的特点：单色辐出度没有最大值。在波长趋于零时，是发散的，与实验数据明显不同，这就是著名的“紫外灾难”。另一方面，在波长变得很大时，与实验数据趋于一致，见图 22-8。

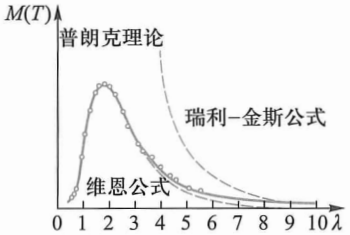


图 22-8

在瑞利-金斯公式发表之前，德国科学家维恩根据实验数据得到了一个半经验的单色辐出度公式：

$$M(\lambda,T)\,\mathrm{d}\lambda=\frac{c_1}{\lambda^5}\mathrm{e}^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \tag{22-24}$$

① 不同方向传播的电磁波在通过一个确定的面时，通量的贡献是不同的，所以需要求和然后取平均。由于辐射是各向同性的，求平均后的通量密度对任意方向的面都是适用的。

② 1900 年瑞利最初得到的公式系数不正确，后来金斯对此作了修正。

其中 c_1、c_2 是根据实验确定的常量。可以验证(22-24)式有极值,且形式上满足维恩位移定律。维恩的公式在短波段与实验数据符合得很好,在长波段与实验数据有差异。

下面对本节作一个小结。根据经典电磁理论和经典统计理论,黑体辐射的单色辐出度为(22-23)式,称为瑞利-金斯公式。更早一些时候,维恩获得了关于黑体单色辐出度的半经典公式(22-24)式。

22-5 能量量子化

NOTE

普朗克针对维恩经验公式的缺陷,提出了一个修正公式,即普朗克公式:

$$M(\lambda,T)\,\mathrm{d}\lambda=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1} \tag{22-25}$$

其中 h 是个常量,称为普朗克常量。这个公式在短波长时,趋于维恩公式(22-24)式,与实验符合得很好,但是在长波长时也与实验符合得很好。普朗克并不满足于这点,他需要找出这个公式成功背后的原因。经过两个多月的思考,普朗克提出了能量的量子化假设①。普朗克发现问题的关键是(22-21)式中振子热平衡时的总能量。在经典统计物理中,我们知道一个自由度的动能 $mv_x^2/2$ 平均值是 $kT/2$,一个自由度的势能 $kx^2/2$ 平均值也是 $kT/2$,这对于二次型的能量都是适用的。普朗克认为振子总能量的平均值不是这样的。我们回忆一下玻耳兹曼分布。一个系统处在能量为 E 的状态的概率是

$$P_E=A\mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}}$$

A 是归一化常量。在经典物理中,我们的归一化方式是②

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty}A\mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=1 \tag{22-26}$$

而能量的平均值就是

$$\overline{E}=\iiiint_{-\infty}^{\infty}A\mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}}E\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{22-27}$$

代入 $E=mv_x^2/2+kx^2/2$ 很容易验证能量均分定理。普朗克认为振子的能量只能是分立的,即只能是一个份额的整数倍

① 普朗克原始的出发点和推导比较复杂,我们采用的是某种“现代”的观点。

② 能量只涉及平动速度和位置的函数的情况。如果要包括转动动能,还需要对角速度积分。

NOTE

$$E=nh\nu,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{22-28}$$

其中 ν 是振子的固有频率。这样(22-26)式的归一化公式要修正为

$$\sum_n A\mathrm{e}^{-\frac{nh\nu}{kT}}=1 \tag{22-29}$$

而能量的平均值是

$$\overline{E}=\sum_n Anh\nu\mathrm{e}^{-\frac{nh\nu}{kT}}=\frac{\sum_n nh\nu\mathrm{e}^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_n \mathrm{e}^{-\frac{nh\nu}{kT}}} \tag{22-30}$$

在第二个等式中,我们已经用(22-29)式替换了(22-30)式中的归一化因子 A,即

$$A=\frac{1}{\sum_n \mathrm{e}^{-nh\nu}}$$

令

$$\beta=\frac{1}{kT}$$

我们可以得到

$$\begin{aligned}\sum_n \mathrm{e}^{-\frac{nh\nu}{kT}}&=\sum_n \mathrm{e}^{-nh\nu\beta}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-h\nu\beta}}\\ \sum_n nh\nu\mathrm{e}^{-\frac{nh\nu}{kT}}&=\sum_n nh\nu\mathrm{e}^{-nh\nu\beta}=\sum_n -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\mathrm{e}^{-nh\nu\beta}\\ &=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\sum_n \mathrm{e}^{-nh\nu\beta}=\frac{h\nu\mathrm{e}^{-h\nu\beta}}{(1-\mathrm{e}^{-h\nu\beta})^2}\end{aligned} \tag{22-31}$$

因此一个振子的平均能量等于

$$E=\frac{h\nu\mathrm{e}^{-h\nu\beta}}{1-\mathrm{e}^{-h\nu\beta}}=\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{22-32}$$

用(22-32)式中的平均能量替换(22-23)式中的 kT,就得到了(22-25)式。若每份的能量 $h\nu\to 0$(h 趋于零,或者波长很大),(22-32)式中的平均能量就趋于 kT,(22-23)式就趋于瑞利-金斯公式。

由普朗克公式[(22-25)式]可以推导出维恩位移定律和斯特藩-玻耳兹曼定律,它们是对黑体辐射的完美描述。然而一个谐振子的能量有最小份额的想法,与建立在微积分基础上的经典物理学格格不入。普朗克本人也认为这只是权宜之计,是某种连续理论的近似。他为此探索了 20 年,最终承认量子论不可替代。

请利用(22-25)式证明维恩位移定律(22-4)式,并求出维恩常量。

22-6 光电效应

光电效应顾名思义就是光产生电的效应。1888 年，德国物理学家赫兹在做电磁波的发射与接收实验时，发现是紫外线导致了接收器出现火花。这是关于光电效应的第一个实验。19 世纪 90 年代很多物理学家加入了对光电效应的研究。1900 年伦纳德指出光电效应是金属中的电子接收光（电磁波）的能量、从金属中逃逸出来的现象，如图 22-9 是光电效应机制的示意图和验证电子逃逸的实验示意图。伦纳德做了几个关于光电效应的关键实验。实验的示意图和结果显示在图 22-10 中。伦纳德的实验结果可以总结为以下几点：

（1）对于特定的金属，光的频率只有大于一定值时，才有光电子发射出来；

（2）光电子的能量只与光的频率有关，与光强无关；

（3）逸出光电子的多少取决于光强；

（4）光电子发射是即时的（即使光强很弱），比光照滞后时间不超过 10^{-9} s。

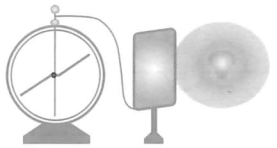
除了第三条，其余几条都与经典电磁理论不符。在经典电磁理论里，电磁波的能量密度和能流密度只与电磁波的振幅相关，与频率无关。电子是连续吸收电磁波的能量，要聚集到足够逃逸的能量需要时间：电磁波强度（能流密度）大时，需要的时间短，强度弱时需要的时间长。实验显示逸出的时间极短，与光强无关。

频率在经典波中的角色是什么？为什么在经典理论中频率与电磁波的能量密度、能流密度无关？

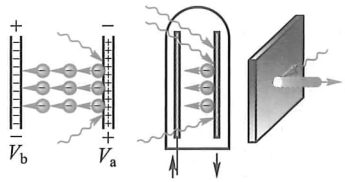
1905 年，爱因斯坦发表了论文《光的产生和转化的一个启发性观点》。在文中，爱因斯坦将普朗克的能量量子化观点推广到电磁波中。爱因斯坦认为电磁辐射的能量也是量子化的（普朗克只认为腔壁的谐振子能量是量子化的）。电磁波传播的能量不是连续的，而是很多一份份的最小单元（能量子）。每一份称为光子，携带能量的大小是

$$E_\nu = h\nu \tag{22-33}$$

而电子每次只能吸收一份这样的能量[①]。“每个能量子将它的能



(a) 锌板在紫外线照射下，显现出带电荷

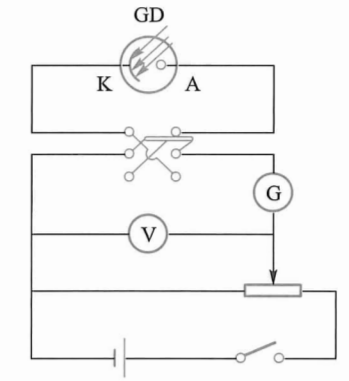


(b) 在真空隔离的两金属板加上电压，负极受到电磁波照射后，有电子溢出，在正极吸引下形成电流

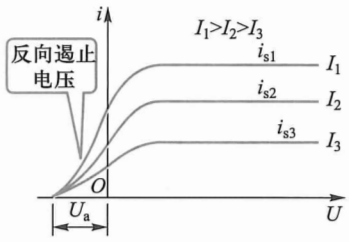
图 22-9 光电效应机制的示意图和验证电子逃逸的实验示意图（见彩色插页）

NOTE

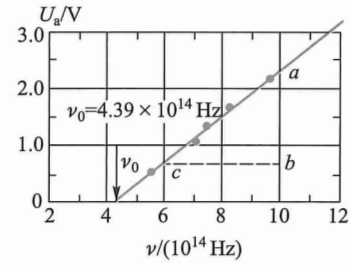
① 电子可以连续吸收两个光子的，但是需要光子的密度非常大。通常在吸收第二个光子之前，电子已经释放了第一个光子（如果光子能量不足以激发电子）。



(a) 光电效应实验简图



(b)



(c)

图 22-10[②]

量转移给电子，与所有其他的量子无关，那么电子的速度分布将与入射光的强度无关。”因此电子吸收光子获得的能量只与光的频率相关。光强只用于描述单位时间通过单位面积的总能量，它等于单位时间通过单位面积的光子数乘以每个光子的能量。为此，爱因斯坦写下了著名的光电效应方程：

$$eV=h\nu-A \tag{22-34}$$

其中 V 是反向遏止电压，A 是材料的逸出功。当光子的能量小于材料的逸出功，或者说当光子的频率小于红线频率

$$\nu_0=\frac{A}{h} \tag{22-35}$$

时，不会发生光电效应。当发生光电效应时，图 22-10 中的反向遏止电压随着光的频率增加而增加。光电子产生的数目等于吸收的光子数，因而图 22-10 中光电流的最大值正比于光强。由于光会产生光压，爱因斯坦进一步假定光子也携带一份动量

$$p=\frac{h}{\lambda} \tag{22-36}$$

物体吸收电磁波时，不仅获得能量，也同时获得动量，这是产生光压的原因。爱因斯坦的光量子说极大推广了普朗克的能量量子说。随后的统计物理只要依靠光量子说，就可以获得黑体辐射谱，而不需要借助腔壁的谐振子。(22-33)式和(22-36)式组成了爱因斯坦关于光的波粒二象性学说。公式的左边代表光的粒子性，右边代表光的波动性。它们的等价性说明波与粒子的统一[①]。但是在当时这个观点受到了大批物理学家的抵制，连普朗克也认为“他可能在他的思索中失去目标”。因为光如果是粒子，在经典物理学里是无法解释光的干涉和衍射现象的。在众多的反对者里，有一位杰出的物理学家密立根，想通过实验证明爱因斯坦的猜想是错误的。用他自己的话说：“与我自己预料的相反，这项工作终于在 1914 年成了爱因斯坦光电效应

① 即使是爱因斯坦本人，在去世前也不认为自己理解了光的波粒二象性。物质的波粒二象性在量子力学这章还会更详细讨论。

② 图 22-10 中，图(a)是光电效应的电路图。通过切换开关，可以改变 K、A 间的电势方向。变阻器可以调节 K、A 间电势差的大小。图(b)横坐标是 K、A 间的电势差，纵坐标是光强。首先可以看到，即使 K、A 之间没有电势差，也有光电流。这是因为电子被光激发出来具有初始动能，只要运动方向正确，可以自己从 K 极运动到 A 极。在 K、A 间加上正向电压(A 电势高)，光电流变大，这是因为运动方向不正确的光电子也会趋向 A 极。若电势达到一个定值，光电流不再增大，这表明所有光电子都被吸引到 A 极。图(b)也表明，饱和光电流的大小与光强成正向关系，光强越大，光电流越大。现在在 K、A 间加上反向电压，光电流变小，直到最后等于零。光电流等于零时的电压称为遏止电压。显然遏止电压与光电子的最大初始动能相关。而图(b)表明，无论光强多大，反向遏止电压的大小都是一样的。图(c)是遏止电压和入射光频率的关系图。随着频率的增加，遏止电压线性增加。

方程在很小实验误差范围内精确有效的第一次直接实验证据”，他第一次直接从光电效应测定了普朗克常量 h。图 22-11 是密立根的实验结果示意图。爱因斯坦和密立根分别在 1921 年和 1923 年由于这些工作获得了诺贝尔物理学奖。

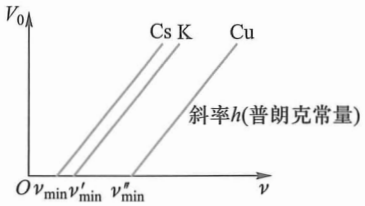


图 22-11 对于不同金属材料，红线频率是不同的，斜率都是相同的

为什么短波长的光(紫外线或更短波长)会对人体造成伤害？

光电效应在现代技术上有广泛的应用。比如光控仪器，通过光强的变化导致光电流改变，从而控制仪器做相应调整。还有光电倍增管，接收到微弱光子，通过光电流放大，产生足够大的信号。

22-7 康普顿效应

在黑体辐射这一节，我们介绍了经典电磁学关于光的散射(反射)理论，入射电磁波激发振子作受迫运动，振子的振动频率等于入射电磁波的频率(受迫振动)。振子会辐射，辐射的频率是振子的振动频率。因此，振子吸收了电磁波，然后又把它散射出去。入射波和散射波的频率是相等的。1923 年康普顿做 X 射线散射实验时，发现事实不是这样的。如图 22-12 所示是康普顿实验的示意图。康普顿实验的结果显示在图 22-13 中。

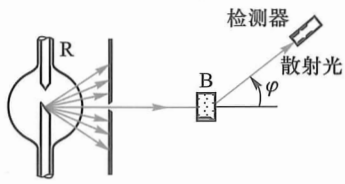


图 22-12 可以改变探测器的位置，接收不同散射角的散射 X 射线

NOTE

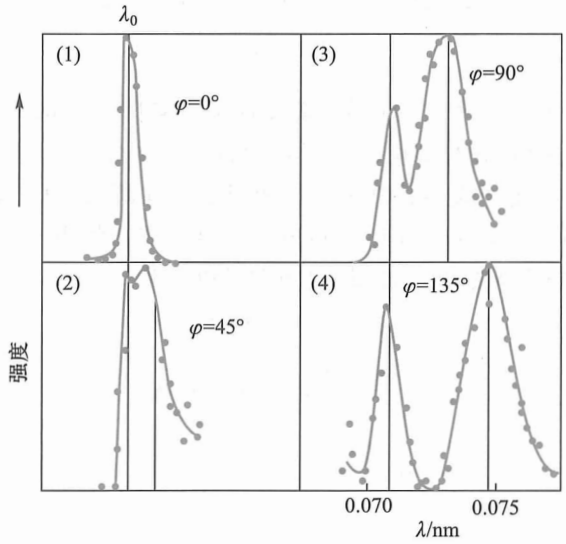


图 22-13 散射波波长与散射角度的关系

NOTE

可将实验结果总结如下：

（1）由图 22-13 可以看到，散射波包含两种波长的 X 射线：一种和入射波的波长一样，另外一种比入射波的波长大，且差距随着散射角的增加而加大。同时原波长的 X 射线的强度随着散射角的增加而减弱，新波长的强度随散射角的增加而增强。在零散射角只有入射波的波长。

（2）由图 22-14 可知[①]，原波长的 X 射线强度随着原子序数的增加而增强。新波长的强度随着原子序数的增强而减弱。

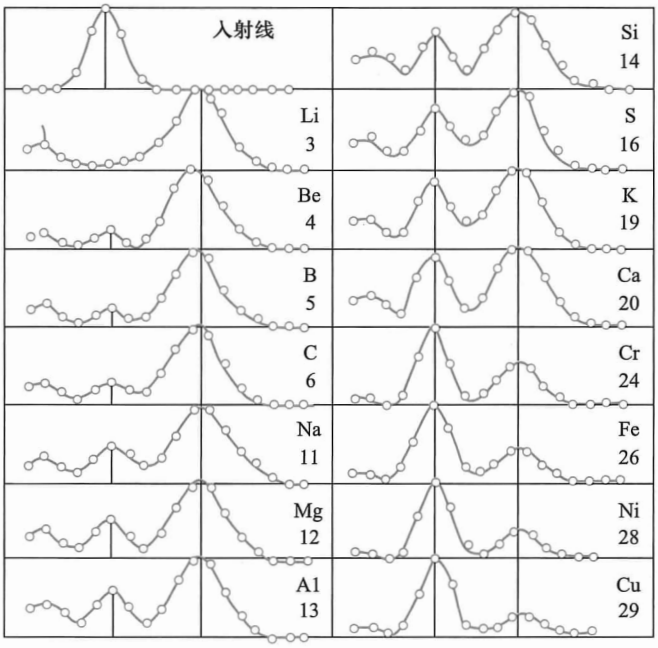


图 22-14

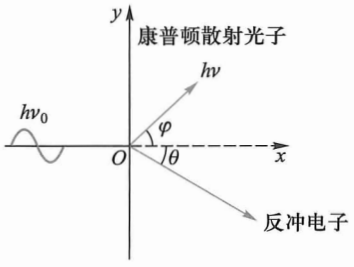


图 22-15

为了解释这些实验现象，康普顿利用爱因斯坦的光子概念，提出 X 射线散射的新机制。康普顿将 X 射线视为一个个光子，与原子中的电子发生弹性碰撞。如图 22-15 所示，由能量守恒和 x 轴、y 轴方向的动量守恒可以建立三个方程（将电子视为自由的，因为相比 X 射线的能量，束缚能可以忽略。）

$$\begin{aligned} h\nu_0+m_0c^2&=h\nu+mc^2\\ \frac{h\nu_0}{c}&=\frac{h\nu}{c}\cos\varphi+mv\cos\theta\\ 0&=\frac{h\nu}{c}\sin\varphi-mv\sin\theta \end{aligned} \tag{22-37}$$

① 我国物理学家吴有训对本图的相关工作有重要贡献，他当时是康普顿的学生。

NOTE

ν_0 是入射波频率，ν 是散射波频率。m_0 是电子的静止质量，m 是电子的动质量。第一个方程表明能量守恒，第二、第三个方程表明 x、y 方向的动量守恒。由于这样的碰撞总在一个平面中，所以不需要考虑 z 轴方向的动量守恒。由(22-37)式后两个方程消去 θ 可以得到

$$\left(\frac{h\nu_0}{c}-\frac{h\nu}{c}\cos\varphi\right)^2+\left(\frac{h\nu}{c}\sin\varphi\right)^2=m^2\nu^2 \tag{22-38}$$

由(22-37)式的第一个方程得到

$$\left(\frac{h\nu_0-h\nu}{c}+m_0c\right)^2=m^2c^2 \tag{22-39}$$

将(22-39)式两边减去(22-38)式两边得到

$$\left(\frac{h\nu_0-h\nu}{c}+m_0c\right)^2-\left(\frac{h\nu_0}{c}-\frac{h\nu}{c}\cos\varphi\right)^2-\left(\frac{h\nu}{c}\sin\varphi\right)^2=m_0^2c^2 \tag{22-40}$$

化简(22-40)式得到康普顿方程

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi) \tag{22-41}$$

其中 h/m_0c 具有长度的量纲，称为电子的康普顿波长，其值为 $2.43\times10^{-12}\,\mathrm{m}=2.43\times10^{-3}\,\mathrm{nm}$，代表波长可能改变的量级。如果入射波的波长比较大，比如可见光，大概波长为几百纳米，发生这么小的改变，实验上不容易分辨。当然入射光波长太大，能量过小，原子中的电子就不能被视为自由的。X 射线波长很小，图 22-13 中只有 0.07 nm，对(22-41)式这样的改变很敏感。另外这样的光子能量足够大，原子外层电子的束缚能可以忽略。(22-41)式和实验符合得很好①。对图 22-13 中原波长的散射光子的理解是：光子也会和内层束缚得很紧的电子(或原子核)碰撞。这种碰撞可以视为和整个原子发生碰撞，因而(22-41)式中的质量比电子质量大几千至几万倍，波长的改变就很小了。随着原子序数的增加，这种内层电子的数目也会增加(原子核的电荷量也会增加，散射的概率与电荷的平方成正比)，与这样的电子发生碰撞的概率也会增加，所以保持原波长的散射光子数目也会增加，这就是图 24-14 的结果。康普顿效应是对爱因斯坦光子说的进一步证实。它不仅证实了光子的能量假设，也证实了光子的动量假

① 康普顿并不是第一个发现光子被散射后波长会改变的现象的人。在 20 世纪初，已经有多人发现 γ 射线被散射后波长会改变。康普顿是对这一现象给出正确解释的第一人。

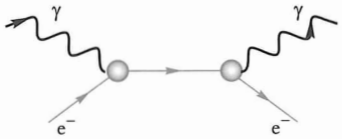


图 22-16 康普顿散射。电子从左边进入吸收一个光子，在右边出来并放射出一个光子

NOTE

设。从此，对爱因斯坦光子说的怀疑就很少了。需要澄清的是，我们在建立(22-37)方程组时，假设光子与电子发生弹性碰撞，这还是一个经典的图像，与光电效应的图像不一致。量子的图像是：电子吸收了入射光子，然后再释放出一个散射光子(见图 22-16)。放出的光子和吸收的光子波长可以一样，也可以不一样。一样的就是零角度散射，不一样的散射角就是非零的。这个图像与光电效应的图像一致(电子可以吸收光子，也可以释放光子)。由于整个过程依然是能量守恒和动量守恒，所以(22-37)式依然成立。

从(22-41)式看，散射的光子波长总是比入射光子长(最多相等)，这是由于电子在由静止到反冲的过程中会获得能量。而很多情况下(或者说换一个参考系)，电子初始就是运动的，特别是开始电子的速度就接近光速，这时散射光子的能量可以大于入射光子的能量，这就是逆康普顿效应。在宇宙中，一些星体(比如中子星、黑洞)可以发射出高能电子，宇宙背景辐射的光子遇到高能电子会发生逆康普顿效应，光子能量会变大。这些效应在宇宙背景辐射中会被观察到。

康普顿效应在实际中有广泛的应用。康普顿效应是生物医学中放射性疗法的理论基础。有些放射性疗法是需要摄入放射性药物，这些放射性物质会发出 γ 射线(高能光子)杀死癌细胞。而通过监测药物发出高能光子的康普顿效应，可以了解药物在人体的分布和代谢。另外康普顿效应在 X 射线衍射技术中可以更加精确确定 X 射线的波长，从而提高测量精度。

习题

22-1 一个质量为 1 g、弹性系数为 1 N/mm 的小谐振子作简谐振动，其振幅为 1 mm。这个系统有多少个普朗克能量子？

22-2 人眼的瞳孔直径约为 3 mm。如果人眼正对夏季的阳光，请估算每秒进入人眼的光子数(可以选取阳光黑体谱的峰值波长 497 nm)。

22-3 人体的体温是 37 ℃，人的热辐射单出辐射度峰值波长是多少？成年人平均体表面积是 1.6 m^2。请估算人每秒通过皮肤散发的热量。

22-4 天空中最亮的恒星——天狼星半径是太阳的 1.7 倍，表面温度为 10 000 K，质量是太阳的 2 倍。如果一直保持这样的状态(实际上恒星各个演化过程中状态是不同的)，天狼星的寿命是太阳的几倍？

22-5 波长为 200 nm 的紫外线打在 Cs 金属上，光电流的遏止电压是 3.2 V，求 Cs 的逸出功。

22-6 根据图 22-13，求出图中散射角为 90° 的 X 射线的波长。

22-7 两个正反电子相遇后会湮没成两个光子。请计算光子的最小频率。①

22-8 波长为 0.000 1 nm 的伽马射线、波长为 0.01 nm 的 X 射线和波长为 100 nm 的紫外线分别和静止的电子发生康普顿散射，散射角为 60°。电子获得的反冲动能分别是多少？

22-9 一个光子与静止的质子发生康普顿散射，散射角为 90°，散射波长增加了一倍。求光子的波长。这个光子属于电磁波的哪个波段？



习题解答

① 医学上用的正电子发射断层成像(positron emission tomography，PET)的原理就是利用正负电子湮没放出两个 γ 光子。先向人体注入示踪剂，一般是一种葡萄糖和放射性元素的结合。由于癌细胞获取葡萄糖的能力高于正常细胞，所以示踪剂会在癌细胞周围富集。放射性元素会释放正电子，正电子立刻会和周围的负电子湮没，释放出两个 γ 光子，它们背对背飞行，被人体周围的探测器俘获。成对的光子沿着不同的直线飞行，它们的焦点就是癌细胞的聚集地。目前 PET 是医学上比较先进的技术。

第二十三章　玻尔的原子模型

本章补充资源

本章围绕卢瑟福散射实验、原子光谱实验，分别介绍卢瑟福原子模型和玻尔原子模型的建立过程、它们的成功之处及面对的挑战。

23-1　卢瑟福模型

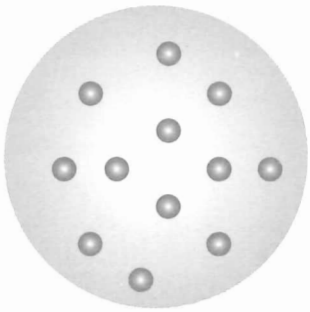


图 23-1

NOTE

1897 年，J.J.汤姆孙采用自己研制的阴极射线管证实了电子带负电，并且测量了电子的荷质比（比荷），只有氢离子的 1/2 000。汤姆孙大胆推测，电子的质量只有氢原子的 1/2 000。因此项研究他在 1906 年获得诺贝尔物理学奖。电子的存在预示着原子是有结构的。为此，J.J.汤姆孙提出了他的葡萄干布丁模型，见图 23-1。原子的主体是一个带正电的小球（半径的量级是 10^{-10} m），质量均匀分布，因而密度不大，这是被称为“布丁”的原因。电子嵌在球中，像“葡萄干”，保持原子的电中性。为了解释原子辐射现象，他认为电子受到激发会在平衡位置附近作振动，辐射电磁波。又为了解释元素周期律，他提出电子的排列方式是围绕原子中心的一层层同心圆，每一个同心圆只排列有限个电子。这个假设与后来量子力学的结论非常相似。

1909 年卢瑟福（汤姆孙的学生）的研究生马斯登和盖革用 α 粒子（氦原子核）轰击厚度为 0.4 μm 的金箔，发现绝大多数 α 粒子都是直线穿过金箔，但是有 1/20 000 的概率被反射回来，见图 23-2。用卢瑟福的话说：就像用来复枪对一张纸开枪，子弹被弹了回来。这是葡萄干布丁模型无法解释的。为此卢瑟福提出了原子有核模型：原子由原子核和核外电子组成。原子核带正电荷，半径只有原子半径的 10^{-4}，集中了原子的 99.9%的质量。电子在原子核的库仑力作用下围绕原子核旋转。经过计算，这个模型与 α 粒子散射实验数据符合得很好。然而卢瑟福模型也遇到了很大的困难：无法解释原子的稳定性及同一元素原子的相似性。电子在绕原子核旋转时是作加速运动的，根据经典电磁理论，

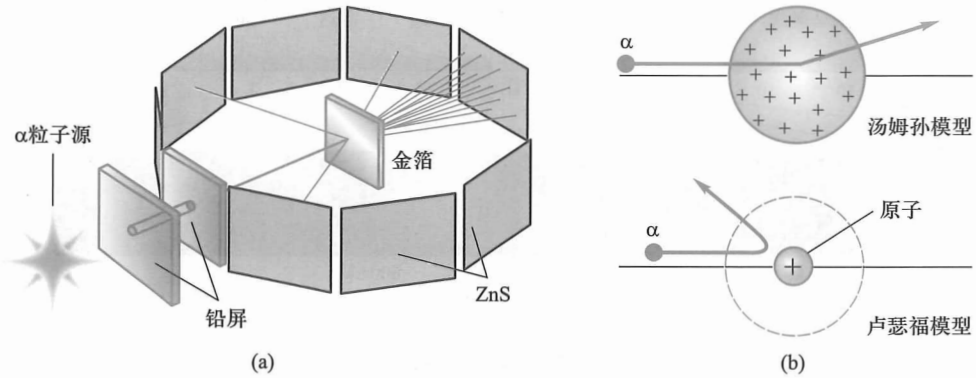


图 23-2 图(a)是 α 粒子轰击金箔的实验装置示意图;图(b)是在两种模型中 α 粒子可能的轨迹

电子会辐射电磁波而损失能量。计算表明大约 10^{-8} s 电子就会因为动能耗尽而落入原子核(见图 23-3)。原子会坍塌,当时就有人开玩笑:为什么物理学家自己住的楼没有坍塌! 卢瑟福模型的另外一个问题是:为什么同一元素的原子都是一模一样的? 根据卢瑟福模型,电子绕原子核的轨道半径和电子的能量相关。因此即使是同一元素,其大小也会因为电子所带能量不同而有所不同。当然,卢瑟福模型也不能解释原子光谱,因为电子在落入原子核的过程中,辐射的电磁波波长是连续的,而原子光谱是分立的,关于这一点的阐述,请见下一小节。

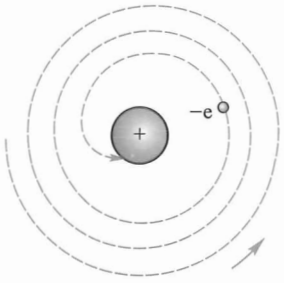


图 23-3 电子由于辐射损失能量坠入原子核

23-2 氢原子光谱

NOTE

我们日常见到的光(电磁波)绝大多数都是原子(原子核)、分子发射出来的。每种元素的原子都会发出特定波长的光,这是这种原子的重要特征,对应谱线称为这种元素的光谱线。最早发现这种特征光谱线的是英国化学家沃尔斯顿,他在 1802 年注意到太阳光谱中有一些特定的暗线。这些暗线随后被夫琅禾费独立发现,并被称为“夫琅禾费线”,因为夫琅禾费对谱线的位置进行了详细标注,见图 23-4。在 19 世纪中叶,基尔霍夫发明了分光仪并对各种元素的光谱进行分析。他发现固体的光谱是连续的[①],而稀薄气体光谱是分立的。他还发现有些元素的谱线与太阳光谱中的暗线重合。他意识到太阳也存在这些元素。暗线是

① 固体光谱的特点可以参见固体物理相关一章节。我们这一章节讨论的是原子相对独立的稀薄气体光谱。

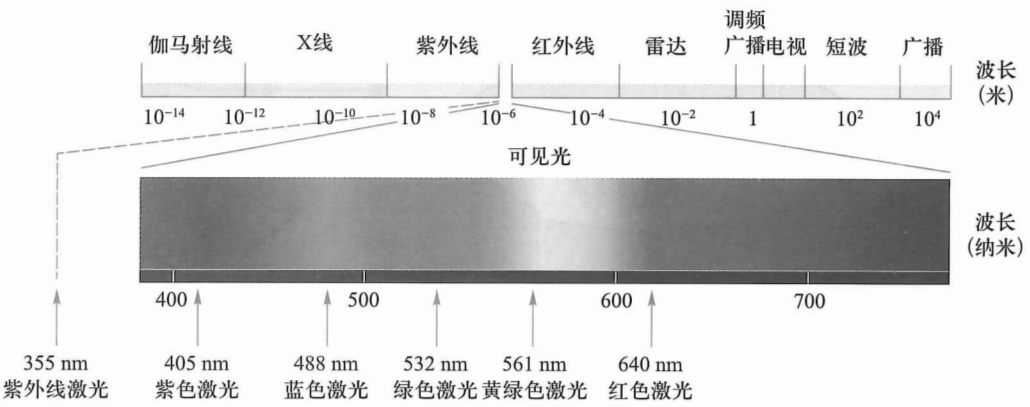


图 23-4 “夫琅禾费线”(见彩色插页)

这些元素吸收了这个位置的光线。现在我们把这些暗线称为吸收线。通过分析恒星的光谱,可以发现恒星大气,或者星光穿过的星云中的化学元素。元素氦就是首先在阳光中发现的。

时间到了 19 世纪末,1885 年,瑞士中学数学教师巴耳末发现氢原子的四条可见光范围的谱线可以用一个经验公式表示为①

$$\frac{1}{\lambda}=R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right),\quad n=3,4,5,\cdots \tag{23-1}$$

$$R_{\mathrm{H}}=1.096\ 775\ 8\times10^{7}\ \mathrm{m}^{-1}$$

R_{H} 称为里德伯常量。随后里德伯将其推广为

$$\frac{1}{\lambda}=R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right),\quad m=1,2,3,\cdots,n=m+1,m+2,m+3,\cdots \tag{23-2}$$

当 $m=2$ 时,就是巴耳末系。$m=1$ 称为莱曼系,在紫外区域,由美国物理学家莱曼在 1906 年发现。其他线系在随后的时间都被一一发现,见表 23-1。

表 23-1 氢原子线系

线系	发现年份	m	n	谱线波段
莱曼	1904	1	2,3,4,…	紫外
巴耳末	1885	2	3,4,5,…	可见
帕邢	1908	3	4,5,6,…	红外
布拉开	1922	4	5,6,7,…	红外
普丰德	1924	5	6,7,8,…	红外
汉弗莱	1953	6	7,8,9,…	红外
汉森	1973	7	8,9,10,…	红外

① 巴耳末最初的表达式是两边都取倒数,是里德伯把它翻转过来,写成了现在的简洁形式。

例 1

莱曼系的波长范围是多少？

解 莱曼系是(23-2)式中 $m=1$ 的谱线系。所以最短、最长波长分别满足

$$\frac{1}{\lambda_{\min}}=R_{\mathrm{H}}\left(1-\frac{1}{\infty^{2}}\right)\Rightarrow\lambda_{\min}=R_{\mathrm{H}}^{-1}=91\ \mathrm{nm}$$

$$\frac{1}{\lambda_{\max}}=R_{\mathrm{H}}\left(1-\frac{1}{2^{2}}\right)\Rightarrow\lambda_{\max}=\frac{4}{3}R_{\mathrm{H}}^{-1}=122\ \mathrm{nm}$$

属于紫外波段。

23-3 氢原子玻尔模型

NOTE

卢瑟福的原子模型遇到了重大危机，他本人却说：我们的科学事业除了今天还有明天。1913 年卢瑟福实验室来了一位年轻人，他叫尼尔斯·玻尔。玻尔被卢瑟福的模型所吸引，他相信这个模型总体是对的。为了解决这个模型遇到的困难，他提出了两个假设：

(1) 电子只能在一些固定的轨道上绕原子核运动，而且不会辐射电磁波。因而电子也只能具有一些固定的能量。这些轨道被称为“定态”。

(2) 电子可以在不同的轨道之间跃迁。当电子从高能量的轨道跃迁到低能量的轨道时，电子会放出一个光子。光子的能量等于两个轨道的能量差：

$$h\nu=E_n-E_m>0 \qquad (23-3)$$

n、m 是标定轨道的整数，称为轨道量子数。玻尔第一个假设解决了原子不稳定的问题。如果你问玻尔，为什么在这些轨道上电子不辐射能量？玻尔也不能回答这个问题。但是玻尔观察到微观和宏观有差别，宏观获得的经验不能照搬到微观，因而这是一个大胆的猜想。第二个假设解决了原子光谱分立的现象，而且用到了爱因斯坦的光量子说。这个假设也解决了原子有固定大小的问题，因为这些固定的轨道中，一定有一个最靠近原子核，因而能量最低，也是最稳定的，我们称这个轨道上的原子处于基态(图 23-5)。绝大多数原子都处于这个“定态”，因而同样元素的原子具有相同的大小。

玻尔的这两个假设定性解决了卢瑟福模型遇到的困难，但是不足以定量与实验数据比较，因为哪些轨道是被允许的并不知

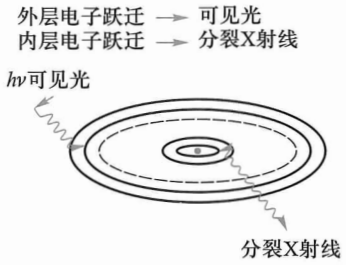


图 23-5

NOTE

道,因而电子“定态”的能量也是不清楚的,不能从(23-3)式推出原子的光谱。为此,玻尔提出了对应原理。这个原理指出:宏观经验和微观经验一定有个连接之处,就像狭义相对论和牛顿时空观有个连接之处,即速度趋于零的低速。宏观和微观的连接之处是在量子数 n 趋于无穷大的时候。对于我们现在讨论的情况就是当 n 很大时,轨道跃迁放出的光子频率

$$h\nu = E_n - E_{n-1} \tag{23-4}$$

与经典电磁学预言是一致的。那么经典理论的预言是什么?我们知道电子所作的圆周运动可以视为两个垂直方向上振动的合成,也就是可以视为两个一维振子的叠加,而振子的角频率就是圆周运动的角速度。回忆一下我们在上一章所讲的,振子辐射电磁波的频率等于振子的振动频率。因此 n 轨道的角速度就等于(24-4)式光子频率的 2π 倍。利用这个关系玻尔获得了“定态”的能量。由于这个思路比较复杂,我们将作为例题来验证。我们的出发点是通过对应原理而获得的一个结论——电子轨道角动量是量子化的。处于稳定轨道的电子的角动量取分立值:

$$L_n = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar \tag{23-5}$$

普朗克常量除以 2π 是角动量的一个基本单元,会经常出现,所以用一个新符号 $\hbar$ 来表示。(23-5)式也可以作为玻尔的第三个假设。我们下面导出氢原子的“定态”能量。电子轨道的总能量是其动能与势能的和:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{23-6}$$

电子作圆周运动,满足

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{23-7}$$

由于轨道角动量为 $L=mvr$,由(23-5)式和(23-7)式可以解出电子轨道的速度和半径:

$$r_n = n^2\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}, \quad v_n = \frac{1}{n}\frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} \tag{23-8}$$

将(23-8)式代入(23-6)式得到定态的能量

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right) \approx -\frac{13.6\ \text{eV}}{n^2}, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{23-9}$$

电子的轨道半径与 n^2 成正比。$n=1$ 对应于氢原子的基态,其半径为

$$r_1 = 0.529\times10^{-10}\ \text{m} = 0.529\ \text{Å} \tag{23-10}$$

称为玻尔半径。Å 是原子物理常用的长度单位。在原子物理的计算中，有一些复合常量用起来会比较方便，它们是

$$\frac{e^2}{2\varepsilon_0 hc}=\frac{1}{137},\quad hc=1\ 240\ \text{eV}\cdot\text{nm},\quad mc^2=511\ \text{keV} \tag{23-11}$$

比如计算 $n=1$ 的电子的速度时，利用(23-8)式可得到

$$v_1=\frac{e^2}{2\varepsilon_0 hc}c=\frac{c}{137}=2.2\times10^6\ \text{m/s} \tag{23-12}$$

利用(23-11)验证(23-9)的第二个式子。

定态的半径也可以写成

$$r_n=n^2 r_1 \tag{23-13}$$

定态的能量与 n^2 成反比。$n=1$ 能量最小，因此对应的态称为基态，其能量为-13.6 eV。其他的态称为激发态，它们很容易跃迁到更低的能态而放出光子，所以寿命很短。图 23-6 是定态的能谱示意图。

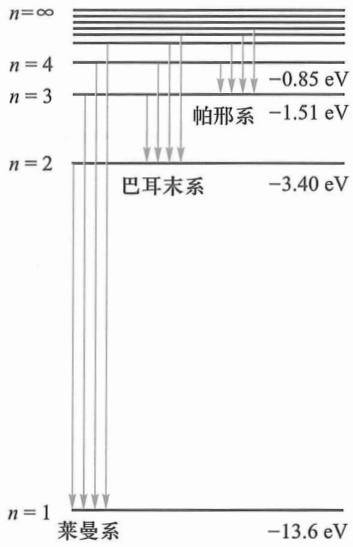


图 23-6

利用(23-3)式我们可以获得氢原子的光谱

$$h\nu=\frac{hc}{\lambda}=\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\right)\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right),\quad m<n \tag{23-14}$$

比较里德伯公式(23-2)式和(23-14)式得到里德伯常量

$$R_{\text{H}}=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\frac{1}{hc}\approx\frac{13.6\ \text{eV}}{1.24\times10^{-6}\ \text{eV}\cdot\text{m}}=1.096\ 77\times10^7\ \text{m}^{-1}$$

与(23-1)式惊人地一致。图 23-6 显示氢原子各系的跃迁示意图。

请估计，多高温度时氢离子将处于离子状态？

例 2

验证氢原子的能谱满足玻尔的对应原理。

解 将(23-9)式代入(23-4)式得到

$$h\nu=\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\right)\left[\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right]$$

$$=\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\right)\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$$

在 n 趋于无穷大时，可以表示成

$$h\nu\approx\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\right)\frac{2}{n^3}=\frac{h}{2\pi}\frac{\pi me^2}{n^2\varepsilon_0h^2}\frac{1}{n}\frac{e^2}{2\varepsilon_0h}$$

$$=\frac{h}{2\pi}\frac{1}{r_n}v_n=h\frac{v_n}{2\pi r_n}$$

$v_n/(2\pi r_n)$ 就是电子在 n 定态的轨道旋转频率。

玻尔的氢原子模型完美地解决了卢瑟福模型的问题，与氢原子光谱高度一致，把量子论推到了一个新的高度。人们对原子结

NOTE

构的认识也迈进了一大步。和卢瑟福模型一样，玻尔模型有新的发现，也会遇到新的问题。玻尔无法解释为什么在这些定态轨道上电子不辐射能量，也无法解释电子是如何从一个轨道跃迁到另一个轨道的。更重要的是，玻尔模型无法推广到更复杂的原子上去解决那些原子的光谱，也无法解释谱线的宽度、强度和偏振的问题。正是因为这些问题使得量子论进入了下一步的大发展。

如果原子序数是 Z，对于最内层的电子来说，(23-8)式和(23-9)式如何在修正后便可以使用？

23-4 激光

若理解原子发光的原理，自然会产生一个想法：把原子两个能级间跃迁的光子都收集起来，这束光的单色性一定很好。这是没错的。不过收集需要一定的技术手段，因为光子都是从不同原子中随机发射出来，其传播方向、偏振状态都不一样，所以简单收集形成的光干涉性是不好的。我们这里介绍的激光(laser，light amplification by stimulated emission of radiation)，其字面含义是受激辐射光放大。首先我们需要理解自发辐射和受激辐射。一个原子自发地由激发态跃迁到低能态，放出一个光子，这种辐射称为自发辐射，如图 23-7(a)所示。一个原子处于激发态时，从外界射入一个光子，光子的能量正好等于原子两个能级之差。原子激发态受到这个光子扰动会跃迁到低能态，放出频率一样的光子。这种辐射称为受激辐射，由爱因斯坦第一次提出，如图 23-7(b)所示。受激辐射的特点是，辐射的光子和入射的光子完全相同，不仅频率一样，传播方向、偏振情况也都相同。毫无疑问，把这样的光子收集起来以后，形成的光的方向性很好，相干性也很好。口径为 1 mm 的激光器，角发散只有 10^{-3} rad，口径为 5 m 的激光器角发散为 10^{-7} rad，激光在远距离传输时光强减弱得很慢。这也使激光在能量聚集上有极大优势。10 mW 的氦氖激光器的亮度可以达到太阳光的数千倍。激光的相干长度可以达到几十千米。激光的这些优异性能使激光有广泛的应用前景：精密加工、精确定位、制冷技术、军事技术、人工核聚变等。需要说明的是，现在有很多种激光器，如自由电子激光器，飞秒、阿秒激光器等，其工作原理并不是受激辐射，性能也各异。例如，飞秒、阿秒激光器有超大的功率、极短时脉冲，但是频谱很宽，它并不是我们

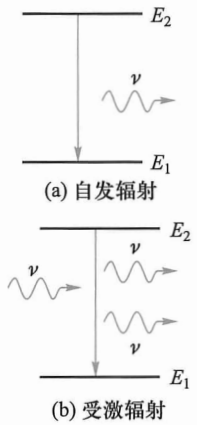


图 23-7 自发辐射和受激辐射

此处介绍的激光器。下面我们简单介绍受激辐射激光的工作原理。

NOTE

一个外来光子进入原子，可以让处于激发态的原子受激辐射，放出两个一样的光子（一个是入射），这就是受激辐射放大（如同克隆一般）。然而如果光子进入的是处于基态的原子，就会把原子激发到激发态。然后原子在激发态自发辐射，随机放出另外一个光子。这样光子数（指的是需要克隆的光子）反而减少了。让激发态受激辐射和把基态激发到激发态的概率是一样的。因此，要让最终结果是全同的光子数变多，处于激发态的原子就要比处于基态的原子数目多。这种状态称为粒子数反转。让激发态原子变多的方式称为激励（泵浦），方式可以是化学激励、光电激励等。然而光有激励是不行的。因为根据玻耳兹曼分布，通常情况下低能态的原子要比高能态的原子多，激励的效率无法抗衡自发辐射的效率。因此对于两能级的原子，粒子数反转是无法达到的。要想达到粒子数反转，原子必须具有三个或更多能级，而且有一个低激发态的寿命比高激发态的长，这样的原子是存在的，见图 23-8。可以先把原子激励到高激发态。高激发态自发辐射跃迁到低激发态，而低激发态的寿命远长于高激发态，这样低激发态的数目就会累积起来，超过基态的数目，达到粒子数反转。有了粒子数反转，就有了光放大的基础。但是一个变成两个不能达到实用的放大，需要把这两个种子留下来，去产生更多的全同光子。做法是在工作物质（也就是我们选取的能够发生粒子数反转的原子群）两端放置反射镜。如图 23-9 所示。两镜之间为谐振腔。光子在谐振腔里来回穿梭，通过工作物质不断放大。谐振腔也具有选择作用，其他自发辐射的光子，若传播方向不在谐振腔轴线上，则会从两边逸出。频率不等于谐振频率的，也会很快耗散。谐振腔一端的反射镜允许部分光透射，便有了激光输出。

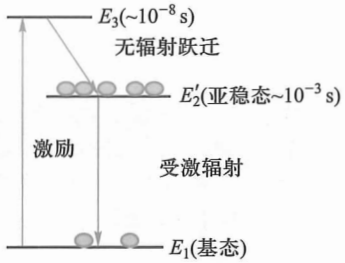


图 23-8　三能级示意图

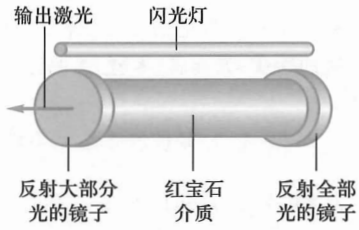


图 23-9　红宝石激光器示意图

本章摘要

1. 氢原子光谱的里德伯公式

$$\frac{1}{\lambda}=R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right),\quad m=1,2,3,\cdots,n=m+1,m+2,m+3,\cdots$$

$$R_{\mathrm{H}}=1.096\ 775\ 8\times10^{7}\mathrm{m}^{-1}$$

NOTE

2. 玻尔模型

(1) 轨道角动量量子化

$$L_n = n\hbar$$

(2) 氢原子能级

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right) \approx -\frac{13.6\ \text{eV}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

(3) 氢原子轨道半径和轨道速度

$$r_n = n^2 \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}, \quad v_n = \frac{1}{n}\frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}$$

习题

23-1 请估计序数为 30 的原子的光谱中最短的波长。它属于什么波段?

23-2 从所有的氢原子光谱高度一致这个现象,你可以得到哪些结论?

23-3 原子核半径只有原子半径的万分之一,说明原子几乎是空的,为什么一个带电粒子很难穿透一般的物质,如金属、木材、水泥等?

23-4 r_1 是玻尔半径,请验证氢原子基态能量为玻尔半径处电势能的二分之一,$E_1 = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1} = -\frac{1}{2}V(r_1)$。

23-5 氢原子有三条著名的谱线 H_α、H_β、H_γ,分别是 $n=3,4,5$ 到 $n=2$ 的巴耳末线(可见光),在天文学中有重要意义。请计算它们的波长。

23-6 能级跃迁可以发生在任意两个能级之间,所以从激发态 n 向低能级跃迁的过程中可以产生很多谱线。如果 $n=5$,共可以产生多少谱线?

23-7 氢原子有一条波长为 1 876 nm 的红外谱线,它是哪两个能级之间的跃迁产生的?

23-8 对于基态氢原子,要发出可见光,至少需要给它多大的能量?

23-9 原子序数为多大时,基态的能量大小等于电子静止能量大小的相反数?(电子静止能量为 511 keV),即基态电子的总能量(包括静止能量)为零。原子序数为多大时,基态电子的速率等于光速(我们这里假设玻尔模型在这样极端条件下还是成立的)?



习题答案

第二十四章　量子力学初步

本章介绍新量子论的建立过程(玻尔的量子论称为旧量子论),重点阐述了德布罗意的物质波、海森伯的不确定关系及波粒二象性的实质,对薛定谔方程、氢原子的能态结构、电子的轨道角动量和自旋作了初步介绍。



本章补充资源

24-1　德布罗意波

NOTE

爱因斯坦关于光的波粒二象性的学说获得了巨大的成功。这深深吸引了法国一位历史系本科生的注意,他就是 L.德布罗意。他认为波粒二象性应该是一个普遍真理,而不仅仅局限于光。为了弄清神秘的量子,他报考了法国物理学家郎之万的博士生。德布罗意注意到玻尔为了得到电子的稳定性和氢原子的光谱,假定了电子轨道角动量是量子化的。德布罗意认为:纵观整个物理学,整数只出现在和周期相关的现象中:波的干涉、衍射和驻波。电子在原子中的稳定运动需要引入整数来描述,那么电子不应该仅仅被视为一个粒子,而应该赋予电子波动性。为此,他于 1924 年在其博士论文中正式提出任何粒子都具有与光子同样的波粒二象性,其动量和波长的关系为

$$p=\frac{h}{\lambda} \tag{24-1}$$

这就是著名的德布罗意关系式。德布罗意通过(24-1)式导出了玻尔的角动量量子化条件。德布罗意认为一束电子波能稳定地待在原子中,那么这束波一定是驻波。为此德布罗意给出原子中电子驻波的条件

$$2\pi r=n\lambda \tag{24-2}$$

这里 r 是电子的轨道半径。由于电子“走”了一个闭合线,其驻波条件与两壁之间的驻波条件略有不同,如图 24-1 所示。

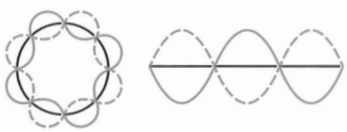


图 24-1　左边是闭合圆形弦的驻波,右边是不闭合弦(开弦)的驻波,两者驻波条件有区别

现在将(24-1)式代入(24-2)式,得到

NOTE

$$L=pr=n\frac{h}{2\pi}=n\hbar \tag{24-3}$$

这正是玻尔的轨道角动量条件。这么完美自然的结果在其博士论文答辩中震惊四座。连爱因斯坦也赞叹到:“这是对物理之谜中最棘手的一个谜投下的第一道微弱的光芒。”那么电子波能否得到验证呢?我们得首先估计一下电子波的波长大概是多少。

将爱因斯坦关于光子的波粒二象性公式推广到电子,求电子的频率与波长的乘积(采用相对论的动量和能量形式)。你会有什么发现?

例 1

电子经过 100 V 电压的加速,其德布罗意波长是多少?

解

$$\frac{1}{2}mv^2=eU$$

$$mv=\sqrt{2eUm}$$

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2eUm}}=\frac{hc}{\sqrt{2eUmc^2}}$$

$$=\frac{1\ 240\ \text{nm}\cdot\text{eV}}{\sqrt{2\times1\ \text{eV}\times511\ \text{keV}}}\frac{1}{\sqrt{\tilde{U}}}=\frac{12.25}{\sqrt{\tilde{U}}}\ \text{Å} \tag{24-4}$$

其中 $\tilde{U}$ 是去掉量纲“V”的电压数值,电子的静止能量是 511 keV,Å 是上一章引入的长度单位埃,1 Å = 0.1 nm。将 $\tilde{U}$ = 100 代入(24-4)式得到

$$\lambda=1.225\ \text{Å}$$

因此,通常来说电子的波长很短,而且随着电子能量的提高波长会更短,其波动性很难观察到。那么是否降低电子的能量就能就更容易观察到呢?答案是否定的,因为低速的带电粒子很容易被环境的原子所吸收。L.德布罗意的哥哥(一位实验物理学家)就是因为电子的速度不够快而没有观察到电子的衍射。所以要观察电子的波动性,电子的动能就要足够大,其波长就会很短,必须采用和观察 X 射线类似的方法,用晶体作为光栅来观察电子的衍射。

1927 年,美国物理学家戴维孙和革末将电子枪射出的电子束投射到镍单晶表面,得到了电子衍射的实验现象,与采用德布罗意公式的计算结果一致。图 24-2 中是戴维孙和革末的实验装置示意图。类似于 X 射线衍射,电子的衍射角也满足关系

$$2d\sin\theta=k\lambda,\quad k=1,2,3,\cdots \tag{24-5}$$

NOTE

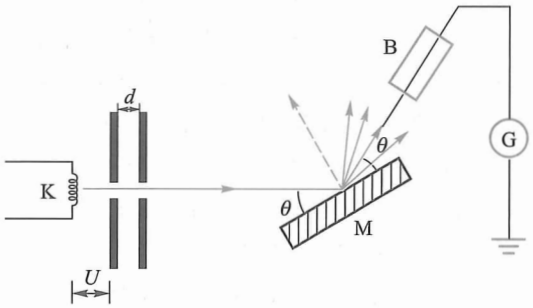


图 24-2 戴维孙和革末的单晶电子衍射装置

将(24-4)式代入(24-5)式得到

$$\sqrt{\tilde{U}}=\left(\frac{1.225\text{nm}}{2d\sin\theta}\right)k \qquad (24-6)$$

可以固定衍射角,改变电压,观察电流的改变。图 24-3 是电流随电压改变的关系图。在电流峰值位置,即衍射极大处,电压满足(24-6)式。峰对应的$\sqrt{U}$显然是等间距的,与(24-6)式一致。代入具体的晶格常量 d 和衍射角 θ,计算结果也与实验结果一致。

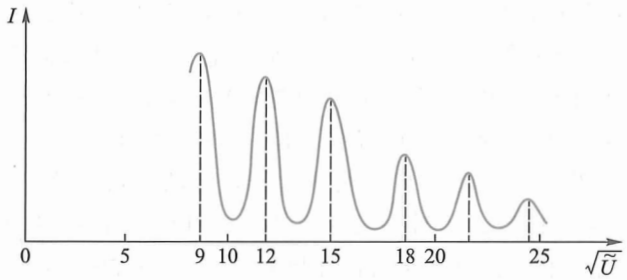


图 24-3 电子衍射实验中电流与电势差的关系

在同一年,英国物理学家 G.P.汤姆孙(J.J.汤姆孙的儿子)采用电子在多晶铜上的衍射证实了电子的波动性。多晶铜有不同方向的晶面(晶面间距也有多种取值),这相当于入射电子有不同的入射角,满足(24-6)式条件的衍射角将形成圆形亮斑,所以多晶铜的衍射图案是很多同心圆,见图 24-4。随后质量更大的中子、质子的波动性都被观察到了。进一步地,人们自然会想到,宏观物体是否也具有波动性?质量为 1 g 的宏观物体,其质量是电子的 10^{27} 倍,当其具有与电子同样的速度时,波长是电子的 $1/10^{27}$。太小的波长以目前的技术根本观察不到,即使将其速度降下来也无济于事。那么让其速度趋近于零呢?若质点的动量小到和电子可比拟,波长就会和电子差不多,但是这时质点的速度就是 10^{-20} m/s 的量级了,这是以目前的技术无法控制的。所以在

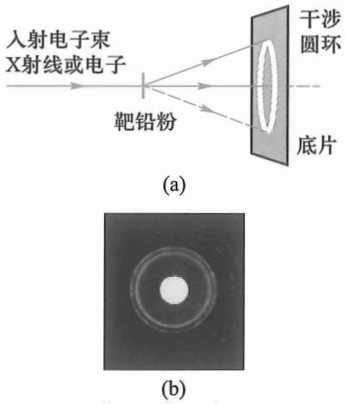


图 24-4 G.P.汤姆孙的多晶电子衍射实验(见彩色插页)

目前人类技术所及范围内，宏观物体的波动性无法观测到①。

电子的双缝干涉实验于1961年由美国物理学家克劳斯·约恩松完成。图24-5是双缝干涉实验的干涉条纹。该图能很好地说明电子的波粒二象性。现代的电子枪已能使电子几乎是一个一个发射②。因此刚开始的时候，屏幕上只有少许光点随机分布，随着电子数的增加，慢慢有了条形的明纹，电子数越多，明纹越清晰。这个实验可以说明以下几点：

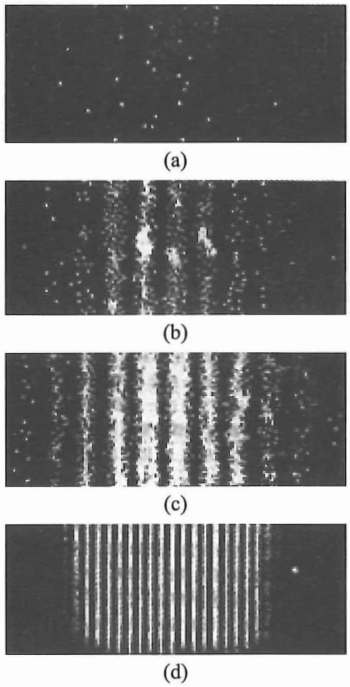


图 24-5

（1）电子是一个“粒子”，因为屏幕上出现了一个个光点。

（2）电子是自己和自己发生干涉，因为电子都是一个个单独通过双缝的。

（3）电子打在屏幕上的位置不确定。亮的地方电子数多，说明电子出现的概率大。

那么，既然电子是粒子，它一定是从某一条狭缝穿过的，是从哪条缝呢？如果电子是从一条狭缝穿过的，则屏幕上的粒子可以分成两类，分别从狭缝1穿过和狭缝2穿过。若屏幕上有1 000个电子，如果穿过两条狭缝的电子各占一半，500个从狭缝1穿过，500个从狭缝2穿过。现在我们来做一个实验，把狭缝2关闭，然后发射电子，那么电子只能从狭缝1穿过，待屏幕上有500个电子后，把狭缝1关闭，再发射500个电子使其从狭缝2穿过。这样屏幕上的1 000个电子形成的图样和双缝都打开的图样有区别吗？按照我们的经验，图样应该是一样的，但事实完全相反，干涉条纹消失了！屏幕上只有两团对着狭缝的亮斑。这说明电子在穿过某一狭缝时，另外一条狭缝是否关闭对它有重要影响。

NOTE

如果从粒子性和波动性的角度看，第二个实验中的电子更像粒子，我们可以明确知道电子是从哪条狭缝穿过的，电子有大概的轨迹，屏幕上的光团也是粒子性的体现。

在第一个实验中，我们虽然想象电子是从一条狭缝通过的，但是我们并不知道它是从哪条狭缝通过的。在屏幕上各个电子是随机分布的，不满足牛顿运动定律，因为牛顿运动定律要求所有的粒子都打在一个点上（因为每个粒子所处的力学环境完全相同）。即使每个电子初始条件略有不同，也应该像第二个实验中一样分布在某个点的周围。最后，干涉条纹也显示了电子的某种波动性，虽然这种波动性和经典图像表现出的不一样。条纹是一个个粒子组成的，而不像经典的波那样，是连续分布的。这两个

① 有一种退相干理论认为，由很多基本粒子组成的宏观物体没有相干性，原因是宏观物体很难避免外界影响。

② 也可以将屏幕放至足够远处，让电子稀疏到几乎一个一个地通过狭缝。用光做的类似实验早在1909年就由英国物理学家泰勒完成了。

实验被玻尔用来说明他的互补原理：粒子性和波动性是事物的两面，像一枚硬币一样，你看到其中的一面，就看不到另一面。你想知道电子是从哪条缝穿过去的，就看不到干涉条纹。你要看到干涉条纹，就无法知道电子从哪条缝穿过去的。从量子力学诞生以来，近百年来，很多人绞尽脑汁既想看到干涉条纹，同时又想知道电子是从哪条缝穿过去的，但他们的尝试都没有成功①。我们在后面的章节还会继续讨论这个实验。

电子的波动性具有重要的应用价值。电子显微镜就是根据电子的波动性研制而成的。由于电子的波长很短，电子显微镜的分辨本领远高于光学显微镜，可以达到零点几纳米，放大倍数达到几十万倍，可以分辨出原子图像。电子显微镜下的冠状病毒见图 24-6。

为什么分辨更小尺度的结构，需要探测波的波长更短？

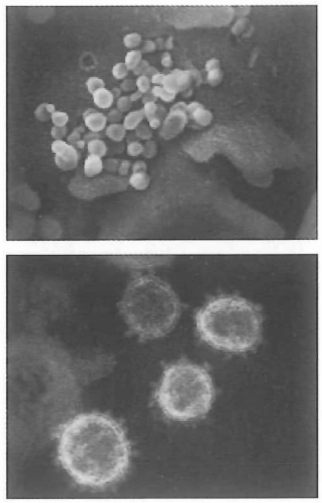


图 24-6 电子显微镜下的冠状病毒（见彩色插页）

24-2 不确定关系

玻尔已经发现了微观和宏观的不同，为此他规定原子中的电子在某种轨道上不辐射电磁波。这个规定在海森伯看来有点生硬。他质疑：既然微观和宏观有区别，宏观获得的概念在微观是否还有用？他认为人们从原子中能观察到的只是分立光谱，完全不知道电子在原子中的运动状态，因此将“轨道”这种宏观经验推广到微观时必须谨慎。他进一步通过电子的波粒二象性推断电子在原子中没有轨道，从而揭开了“新量子论”的序幕。我们下面就采用海森伯的经典例子说明海森伯的不确定关系。如图 24-7 所示是电子的单缝衍射示意图。电子通过狭缝时可以视为对电子 x 轴方向位置的测量，由于狭缝宽为 a，所以电子沿 x 轴方向的坐标没有完全确定，存在一个误差

$$\Delta x = a \tag{24-7}$$

电子打到屏幕上形成衍射图样，这说明电子在 x 轴方向的动量（速度）也是不确定的。由于主极大占整个图样亮度的 90%，我们可以将电子分布的不确定限制在主极大中。主极大的衍射角满足

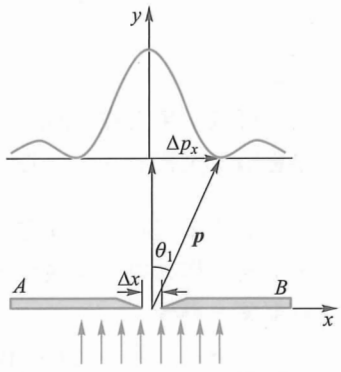


图 24-7

① 比如，可以不关闭双缝，在一个缝边上放一个微型探测器，观察电子是否从这条缝通过。当电子一个个通过时，探测器有反应，表明电子从这条缝通过；没有反应，就表明电子从另外一条缝通过，此时干涉条纹便消失了。

NOTE

$$\sin\theta=\frac{\lambda}{a} \tag{24-8}$$

所以在 x 轴方向电子的动量不确定度是

$$\Delta p_x=p\sin\theta=\frac{h}{\lambda}\frac{\lambda}{a}=\frac{h}{a} \tag{24-9}$$

由(24-7)式和(24-9)式得到

$$\Delta x\Delta p_x=h \tag{24-10}$$

(24-10)式说明,如果想更精确地知道电子的 x 坐标,必须减小缝的宽度,这样会加强衍射效果,x 分量动量的不确定度就会加大。基于量子力学的原理,不确定关系会修正为

$$\Delta x\Delta p_x\geqslant\frac{\hbar}{2} \tag{24-11}$$

(24-11)式显然在任何坐标轴方向都是成立的。那么(24-11)式说明什么问题呢?在牛顿经典力学中,只要知道一个质点的初始条件,即在某个时刻 t_0 的位置和速度 (x_0,y_0,z_0),(v_{x0},v_{y0},v_{z0}),质点任意一个时刻的位置和坐标便都是确定的(当然在一定的力作用下),利用牛顿第二定律,也就可以预测粒子的轨迹。显然不知道初始条件是无法预测的。(24-11)式就是告诉我们,无法同时精确地知道质点的位置和速度(动量)。如果初始条件是不精确、有不确定性的,我们就不可能知道下一时刻粒子的精确位置和速度,那么粒子的轨迹就"消失"了。由于物理学是实验科学,在下结论时,要考虑精度。因此,我们用例题来估计一下粒子轨迹的不确定度。

例 2

将电子束缚在氢原子中,估计电子的速度不确定度。如果将一个质量为 1 g 的物体的位置精度也控制在一个原子大小的范围内,估计质点的速度不确定度。

解 氢原子直径的大小是 1 Å 左右,我们将这个大小作为电子位置的不确定度,利用不确定关系得到

$$\Delta v\geqslant\frac{\hbar}{2mr}=\frac{6.63\times10^{-34}}{2\times3.14\times9.1\times10^{-31}\times10^{-10}}\ \text{m/s}$$

$$\approx1.2\times10^{6}\ \text{m/s}$$

这个速度不确定度已经可以与电子在原子中的速度大小相比了[见(24-12)式],所以电子完全没有方向性,不知道下一个时刻飞向哪里。那么质量为 1 g 的物体呢?如果有同样的位置精度,那么根据不确定关系动量的精度也是一样的。但是速度的精度就差别巨大了,1 g 是电子质量的约 10^{27} 倍,所以速度的不确定度只有电子的 $1/10^{27}$,远比质点的宏观运动速度小得多,远超过测量的精度。同时把质点的位置精度限制在原子尺度,也远远超过宏观测量精度,所以在宏观测量上,质点的下一个位置是确定的,即质点有轨迹。

NOTE

从这个例子可以看出，将宏观的经验不加批判地直接推广到微观有多么危险（在未知的世界里，可能会出现人类经验无法解释的现象）。不确定关系也可以一定程度上对双缝干涉实验进行解释。从电子枪发射的电子初始条件是有一定的不确定性的，会导致下一刻位置的不确定性，依次类推不确定度就会加大。单缝相当于筛选器，将那些具有一定方向的电子选出来。那么这个狭缝成为新的电子源，初始条件具有较小的不确定度，因此屏幕上电子分布的范围较小。如果用双缝筛选，筛选后的电子的方向不确定度大，因此屏幕电子分布范围比较大。但对于周期性的电子分布（干涉条纹），还需要在后面的小节进行讨论，这里只作简单阐述。（单）双缝实验其实包括两次测量，一次是（单）双缝，它确定了最终到达屏幕的电子的中转地。经过单缝的电子，虽然不产生干涉现象，但是还是具有一定的波动性（单缝衍射）。如果我们设置层层的单缝让电子逐一穿过最终打到屏幕上，就会显示电子的清晰轨迹，此时不体现波动性。这是因为在到达屏幕前，我们经过了太多次的测量，每次测量都是对电子的干扰，会使电子的动量（波长）的不确定度增加，因而干涉现象减弱。经过层层狭缝，电子不再具有波动性，而像一个经典的粒子一样打在屏幕的很小区域内。玻尔的互补原理又一次体现出来。

除了位置和动量的不确定关系，还有时间和能量的不确定关系：

$$\Delta t \Delta E \geqslant \frac{\hbar}{2} \tag{24-12}$$

从狭义相对论的观点来看，这是很自然的：时间是四维时空的零分量，能量是四维动量的零分量。（24-12）式说明测量一个粒子能量持续的时间越长（因而时间的误差越大），能量的精度越高。比如原子的光谱并不是精确处于某个波长的，而是有一定的宽度，见图 24-8。谱线的展宽有很多原因，如原子运动的多普勒效应。排除所有外在的原因，还有一个本源性的原因：原子处于激发态时是不稳定的，有一定的寿命。平均寿命越短，谱线宽度越大。之所以说平均寿命，是因为每个激发态的跃迁有随机性，寿命都是不一样的。我们只能谈激发态的平均寿命。这样我们不能确切知道电子处于激发态的时刻，只能知道电子处于激发态时刻的精度[①]。而光谱体现出激发态的能量，那么光谱的宽度代表

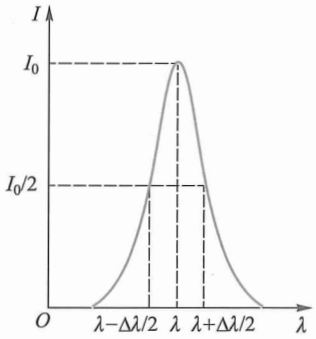


图 24-8

① 粒子衰变满足指数衰减模式（即粒子的数目随时间指数衰减），因此粒子寿命的不确定度等于其平均寿命（需要计算）。

激发态能量的精度。根据(24-12)式,平均寿命和光谱宽度满足

$$Th\Delta\nu \geqslant \frac{\hbar}{2} \Rightarrow T \geqslant \frac{1}{4\pi\Delta\nu} \tag{24-13}$$

T 是平均寿命。我们可以根据光谱的宽度来估计激发态的寿命。

例 3

氢原子激发态的平均寿命为 $10^{-9}\sim10^{-8}$ s,因此其谱线频率展宽是

$$\Delta\nu=\frac{1}{4\pi T}\approx 10^{7}\sim10^{8}\ \text{Hz}$$

以黄绿光(500 nm)为例,其频率是 6×10^{14} Hz,因此光谱展宽相对不大。

原子核的直径约为 10^{-14} m,请估计原子核中质子的动能。

24-3 波函数

NOTE

既然存在物质波,就需要用波函数来描述它。我们采用与机械波类比的方式来引入物质波的波函数。机械波的波函数是

$$\Psi(x,t)=A\cos\left[2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)\right] \tag{24-14}$$

这个波函数是实数,因为它是表述某位置的一个质点离开平衡位置的位移。在讨论物质波时,我们不可避免地要引入复数形式的波函数(我们后面将看到薛定谔方程是个复函数方程)。比如沿 x 轴正方向传播的物质波的波函数写成

$$\Psi(x,t)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)}=\cos\left[2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)\right]-\mathrm{i}\sin\left[2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)\right] \tag{24-15}$$

这个波函数的实部与(24-14)式是一样的。然而(24-14)式不是动量的“本征态”(粒子处于动量本征态就具有确定的动量,后面的小节中会定义本征态)。为了看得更清楚,我们可以把(24-14)式改写成

$$\Psi(x,t)=\frac{A}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)}+\frac{A}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)} \tag{24-16}$$

因此(24-14)式描述的是沿 x 轴正方向和反方向的两束波的叠加,不是沿单方向的平面波,因而不可能具有确定的动量[①]。那么一个复数的波函数到底有什么物理意义呢?的确一个复数不可能直接与可观测物理量关联,但是对波函数进行某些代数操作,就可以得到所有的可观测物理量。比如,我们求出波函数的模方

$$|\Psi(x,t)|^2=\Psi^*(x,t)\Psi(x,t) \tag{24-17}$$

(24-17)式中,$*$ 代表取复共轭。它代表在位置 x 处发现这个粒子的概率密度,即在 x 周围一小段距离 $\mathrm{d}x$(如果是三维,就是一小块体积 $\mathrm{d}V$)中,发现粒子的概率为

$$P=|\Psi(x,t)|^2\mathrm{d}x \tag{24-18}$$

这就是德国物理学家玻恩 1926 年提出的波函数统计诠释。对于电子双缝干涉实验,我们一直在纠结电子是粒子还是波。如果是粒子,为什么图样分布有空间周期性(牛顿运动定律无法解释)?如果是波,为什么屏幕上是一个个光点?有了不确定关系,我们知道微观粒子运动不满足牛顿运动定律,但是周期性还是没有解释。现在我们用波来描述一个粒子。粒子的运动对应于波的传播。由(24-18)式可知,粒子的运动没有轨迹,我们只能知道粒子在某时刻处于某个位置附近的概率。按照波的干涉原理,穿过单缝到达屏幕的波,与穿过双缝到达屏幕的波是不一样的。穿过双缝的波,其振幅大小在屏幕会有周期性的改变。振幅等于零意味着粒子出现的概率为零,振幅最大则意味着出现的概率也最大。因此当电子数很少时,屏幕上是随机分布的一些电子。若到达屏幕的电子数目足够多,统计规律就会显示出来。这与实验观察到的现象完全一致。到此为止,我们发现物质波和机械波完全不一样。机械波描述的是很多质点的振动,不同振子之间有固定的相位差,多个质点好像在跳不同步但有序的集体舞。而物质波只描述单个粒子的运动状态。波本身是虚拟的,人们需要通过运算才能得到关于粒子的统计信息。对于物质波到底是一个客观实在,还是人类发明出来的数学工具,还有争论。

我们对波粒二象性作一个小总结:

(1) 粒子不是经典力学中的质点,它的运动规律不满足牛顿运动定律。它没有确定的轨迹。

(2) 物质波不是机械波那种可视的波动,它只是描述一个粒子运动的数学工具,它代表了粒子运动的随机性和统计性。粒子

① (24-14)式不是薛定谔方程的自由波解,是相对论性的克莱因-戈尔登方程的自由波解。

NOTE

所有的可观测物理量(位置、速度、动量、能量等),都可以通过对波函数的某种代数运算得到,且都只是在统计意义上的(即只是平均值)。用物质波描述粒子的状态,表明我们放弃了同时对粒子各个物理量的精确掌握。要提取粒子的物理信息,必须反复对同一种粒子做重复实验,就像电子的双缝干涉实验一样,从而获得所关心的物理量的统计信息。

波函数还具有其他性质。由于波函数用于描述一个粒子,因而在全空间找到粒子的概率为 1,即

$$\int |\Psi(x,y,z,t)|^2 \mathrm{d}V = 1 \tag{24-19}$$

这称为波函数的归一化。波函数除了满足归一化,还是单值、连续函数。

平面波[(24-15)式]的概率密度是多少?它的含义是什么?

这里我们介绍一些和本章相关的复数基本性质。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

这个公式可以通过洛朗展开①得到:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{1}{2}(i\theta)2 + \frac{1}{3!}(i\theta)3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \cdots + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

因此

$$|e^{i\theta}|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

对于任意一个复数,有

$$z = x + iy = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

其中

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = r^2 = |r|^2 |e^{i\theta}|^2$$

因此一个复数等于其模乘以一个提供相位(相角)的 e 指数因子。

① 这里洛朗展开可以理解为泰勒展开的复数形式。

24-4 薛定谔方程

NOTE

薛定谔方程是关于物质波的波动方程。波动方程是主宰波运动的方程，就像牛顿方程是主宰质点运动的方程一样。例如，机械波有其对应的波动方程。对于满足(24-14)式的机械波，不难验证其满足

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) \tag{24-20}$$

其中 $v=\lambda\nu$ 是波速。(24-14)式是波动方程(24-20)式的自由波解。如果波被限制在两个点之间(比如两端固定的绳上的波)，那么(24-20)式的解就不再是(24-14)式，需要用边界条件限制，最后的解就是我们已知的驻波。遵循这样的思路，物质波也必须有它的波动方程。这样可以通过波动方程解出各种物理条件下的物质波。薛定谔为此提出了关于物质波的波动方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)+V(x,t)\Psi(x,t) \tag{24-21}$$

其中 $V(x,t)$ 是粒子所具有的势能。(24-21)式是一维的波动方程。薛定谔方程不能从某个原理推导出来，它本身是量子力学的出发点，是薛定谔的大胆猜想，其正确性只能通过实验来验证。下面我们只是尽量还原薛定谔可能的思考过程。我们先利用波粒二象性关系用(24-1)式把(24-15)式写成

$$\Psi(x,t)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)}=A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\left(\frac{E}{h}t-\frac{p}{h}x\right)}=A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{Et-px}{\hbar}\right)} \tag{24-22}$$

所以有

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=E\Psi(x,t),\quad -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)=p\Psi(x,t) \tag{24-23}$$

左边的微分算符作用在波函数上得到一个常量(能量和动量)与波函数的乘积。我们把这个常量称为相对应的算符的本征值，而把波函数称为算符的本征态；把与能量对应的算符称为能量算符，把与动量对应的算符称为动量算符。由于波函数代表粒子所处的状态，薛定谔作出大胆假定：算符代表粒子的相应物理量，即能量算符代表粒子的能量，动量算符代表粒子的动量。只要算符作用于波函数，就可以获得相应的物理量的统计值(如果是本征态，值是完全确定的；如果不是本征态，通过一定的代数运算得到平均值)。这不仅对(24-22)式这样的波函数(它是能量动量本征态)有效，而是对任意波函数都有效，对于一个自由运动的粒

NOTE

子，经典力学中能量和动量的关系是

$$E=\frac{p^2}{2m} \tag{24-24}$$

将(24-24)式算符化，就成为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=\frac{1}{2m}\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Phi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(x,t) \tag{24-25}$$

(24-25)式是自由粒子的薛定谔方程。如果粒子在势场中具有势能，则经典的粒子能量为

$$E=\frac{p^2}{2m}+V(x) \tag{24-26}$$

与(24-26)式对应的薛定谔方程就是

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)+V(x,t)\Psi(x,t) \tag{24-27}$$

(24-27)式是普遍意义下的薛定谔方程，可以处理满足非相对论条件的任意物理问题。

*24-5 波的叠加与态的叠加

玻尔在提出玻尔模型时，假设电子必须处在固定的轨道上，不同的轨道之间可以发生量子跃迁。有人便提出了疑问：电子从一个轨道跃迁到另外一个轨道的过程中，中间在做什么？玻尔当时是回答不出来的。在量子力学里，我们用“态”的概念来描述电子所处的状态，因为你已经无法精确地说电子在某个位置、具有某个确定的物理量(动量、能量等)[①]。这种态由电子的波函数描述。电子的所有力学量(位置、动量、能量等)的统计值都可以通过对波函数的某种代数运算(算符运算)获得。电子的态(波函数)随时间是可以变化的，其变化规律由薛定谔方程(24-27)式描述。这样，电子的跃迁过程可以描述为：电子开始处于状态A(也就是玻尔说的A轨道)。电子由于受到某种扰动(用薛定谔方程中的势能函数描述)，开始变化，最后变化到状态B(B轨道)。那么从状态A到状态B的中间状态，显然既不是A，也不是B。我们说这种状态不是能量的本征态(A和B是能量的本征态。为什么是能量的本征态？请见下一小节)。简单起见，我们

① 在某种态上单个物理量可以具有确定值，比如能量本征态、动量本征态等，但不可能所有物理量都具有确定值。

NOTE

说它们是 A 和 B 的叠加态(可以有 C 态、D 态等参加叠加,因为 A 受到扰动,所以也可能衰变到别的态):

$$\Psi(x,t)=A\Psi_A(x,t)+B\Psi_B(x,t) \tag{24-28}$$

为什么叠加态可以表示成(24-28)式?因为它仅仅是波的性质。两列波会合,最后的波函数就是两列波的简单代数和(叠加)。这是线性波动方程具有的特性①,比如 $\Psi_A(x,t)$ 是薛定谔方程的解,$\Psi_B(x,t)$ 是薛定谔方程的解,(24-28)式也是薛定谔方程的解。因此(24-28)式一定是电子可以处于的某种状态[机械波波动方程(24-20)式具有同样的性质,因此符合叠加原理]。如果我们通过薛定谔方程找出电子所有的能量本征态(可以视为对应于所有玻尔轨道),那么任意电子态的波函数可以表示成

$$\Psi(x,t)=\sum_i \eta_i\Psi_i(x,t) \tag{24-29}$$

$\Psi_i(x,t)$ 是某个能量本征态。为了简化,我们都用一维的波函数形式。所以中间电子态一定具有(24-29)式的形式,是(24-28)式更普遍的形式。这和一个质点的坐标很类似。质点可以在 x 轴上,也可以在 y 轴、z 轴上。当然也可以不在轴上,而表示成

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{24-30}$$

我们还可以把(24-30)式拓广到 N 维空间。对于空间上的一个点$(x_1,x_2,\cdots,x_N)$,其位矢可以表示成 $\boldsymbol{r}=\sum_{m=1}^{N}x_m\boldsymbol{i}_m$。和(24-29)式比较,可以发现能量本征态 $\Psi_i(x,t)$ 就如同坐标轴的基矢 $\boldsymbol{i}_m$,它们(能量本征波函数)的确是互相正交归一的(函数正交)②。因此 $\Phi_i(x,t)$ 张成了一个空间(希尔伯特空间),其维数是无穷维(因为能量本征态有无穷多个),任意一个量子态是这个空间的一个矢量(态矢量)。对于这些目前看来有点复杂的概念,我们在此不再深入探讨。既然 $\Psi_i(x,t)$ 可以视为互相正交的单位矢量,利用波函数的归一化(即任何态矢量的长度都等于 1),从(24-29)式可以得到

$$\sum_i |\eta_i|^2=1 \tag{24-31}$$

而 $|\eta_i|^2$ 可以视为电子处于 $\Psi_i(x,t)$ 的概率。有了这些概念我们就可以描述量子跃迁的过程了。最开始 $|\eta_A|^2=1$,其他都等于零。随着态演化,$|\eta_A|^2$ 变小,而 $|\eta_B|^2$ 变大。当 $|\eta_B|^2=1$ 时跃迁完成。然而新的问题又出来了:既然有中间态,我们为什么没

① 有非线性的波动方程,这时波不满足叠加原理。

② 函数的正交归一性由积分表达,$\int\Psi_i^*(x,t)\Psi_j(x,t)\mathrm{d}x=\delta_{ij}$,这里用一维波函数举例。

NOTE

有讨论中间态的氢原子？中间态是可以观测的吗？也就是说，我们能发现电子处于中间态吗？哥本哈根学派认为中间态是不可观测的，人们只能观测到本征态。当你开始测量中间态，中间态会由于你测量的干扰，退回到 A 态或者跃迁到 B 态。至于究竟到哪个态，由这时的波函数决定。如(24-31)式所示，哪个态的系数模方大，到哪个态的概率就大。就像你抛起一枚硬币，然后用手压住。移开手，你只能看到正面或反面，而看不到中间的过程。对于粒子可以处于某种不可观测的叠加态的观点，一些经典物理的维护者都提出反对意见，其中著名的有爱因斯坦、薛定谔[①]。薛定谔提出了著名的薛定谔猫，期望以此反驳哥本哈根的观点。薛定谔以原子核衰变为例来反驳微观粒子有叠加态这一观点。原子核衰变也是高能态到低能态的跃迁，和原子跃迁类似。薛定谔设计了一个机关：当原子核衰变时，会放出粒子(α，β，γ 射线)、触发机关，机关连接着一个锤子。这个锤子会打破一瓶毒药。这套装置和一只活猫用一个笼子关在一起，见图 24-9。毫无疑问，你开着门，可以看到猫和机关，你就可以看到原子核衰变和猫的死亡(只要时间足够长)。这时的猫不是活着，就是死亡，那是因为你在不断观察原子核，原子核不断受到扰动，因此不是处于原来的状态，就是已经衰变了。现在关上门，原子核不受到外界扰动(我们假定人不去观察它，它就不受到扰动)。那么原子核的中间态就会出现。与此同时，猫处于怎样的状态呢？显然猫也应该处于某种叠加态上，有一定的概率死亡，也有一定的概率活着。这种概率不是由于你知识的缺乏导致的。比如用手压着硬币，你不知道硬币正面朝上还是朝下，但是你确信硬币朝向已经定了，只是你猜中的概率为 50%。猫的状态是死活未定，你只有开门才能确定其死活，因为正是你开门，扰动了原子核，使它退回原来的状态或者发生衰变。当然这种不死不活的猫谁也没有见过。薛定谔把微观粒子状态的不确定性放大到宏观的猫，以此说明哥本哈根观点的荒谬。但是既然微观状态的不确定性都无法直接观测[②]，宏观猫的不确定性自然是谁也没有见到过了[③]。

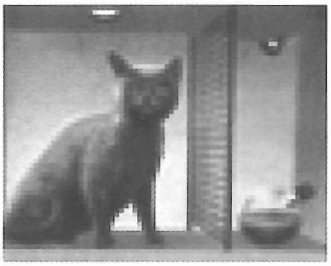


图 24-9 薛定谔猫的实验装置

① 没错，薛定谔本人虽然建立了薛定谔方程，其对于方程的理解是经典的。

② 有个别研究人员观测到原子中间状态，但他们的研究既没有被别人重复，又没有跟进的研究结果。

③ 物理态(包括中间态)是客观的，还仅仅是人类发明的描述自然的工具，到目前为止争论还在持续。我们考虑整个宇宙的物理态，人、猫和其他粒子在其中。不仅是猫，我们人也可能处于叠加态[对于宏观是否有态的叠加(干涉性)也有不同的观点，有宏观退相干之说]。如果认定态是客观的，那么为什么我们观察不到另一种状态呢？为此有人提出了多重宇宙的观点，猫(或者我们)的另一种可能性在其他的宇宙中出现。由于不同的人、不同的猫和不同的其他粒子都有不同的状态，而且某种状态的人在某个宇宙中，会演化出不同状态，又必须分别进入不同的宇宙，所以必须有无穷多重宇宙才能展现出无穷多种可能性。多重宇宙显然是不能被证实的。彭罗斯对中间态提出了更尖锐的问题：为什么只有死和活是可观察的状态，不死不活却不是可观察的状态？是谁决定了可观测状态？关于量子力学测量问题的争论还在继续。

请验证：如果 $\Psi_A(x,t)$ 和 $\Psi_B(x,t)$ 是薛定谔方程的解，(24-28)式也是薛定谔方程的解。

24-6 定态

NOTE

我们现在来考虑粒子的能量本征态。能量本征态在量子力学中占有重要的地位。因为粒子一旦处于能量本征态，其在空间的概率分布就不会随着时间而改变，所以也被称为定态。考虑一个能量本征态

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=E\Psi(x,t) \tag{24-32}$$

E 是这个粒子的能量本征值。(24-32)式这个方程很容易解。只要将虚数 i 当实数看待，就可得到

$$\Psi(x,t)=\Psi(x,0)e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \tag{24-33}$$

因此，这个态粒子的概率密度是

$$|\Psi(x,t)|^2=|\Psi(x,0)|^2 \tag{24-34}$$

和时间无关。定态是一个稳定的状态，所以只要我们考虑一个稳定的原子、原子核等，我们要处理的问题就是其中粒子的定态问题。当然如(24-15)式那样的粒子自由运动状态，也是定态，其在空间所有点上的粒子概率密度都是一样的，不随时间而变，因而其位置就是完全不确定的。相对应地，(24-15)式是动量本征态，其动量是完全确定的。另外，一个系统要处于定态，通常(24-27)式中的势能不是时间的函数。系统势能随时间变化，系统很难处在一个稳定的状态。

24-7 一维无限深势阱

1. 能量本征态

我们现在考虑粒子(如电子)被束缚在有限空间(原子或原子核)中。我们用一个简单的模型描述电子的状态：我们假定电

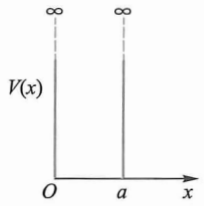


图 24-10

子被束缚在两面墙之间。墙无限高,电子无法穿越。在墙之间,电子可以自由运动。这个模型可以用一个势能表示(图 24-10):

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x\leqslant 0 \text{ 或 } x\geqslant a\\ 0, & 0<x<a\end{cases} \tag{24-35}$$

这个简单模型虽然和实际情况有差距,但是可以反映很多基本的量子性质。现在我们来解这个模型的定态问题。根据方程(24-27)式、(24-32)式和(24-33)式可以得到

$$E\Psi(x,0)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,0)+V(x)\Psi(x,0) \tag{24-36}$$

NOTE

下面我们将使用简略写法

$$\Psi(x)=\Psi(x,0) \tag{24-37}$$

将(24-35)式代入(24-36)式得到

$$\begin{cases}\Psi(x)=0, & x\leqslant 0 \text{ 或 } x\geqslant a\\ E\Psi(x)=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x), & 0<x<a\end{cases} \tag{24-38}$$

(24-38)式第一个等式是因为不等于零的波函数将导致方程(24-36)式出现无穷大。(24-38)式第二个方程和谐振子方程类似,其通解为

$$\Psi(x)=A\sin kx+B\cos kx, \quad 0<x<a \tag{24-39}$$

其中

$$k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{24-40}$$

由于在 $x=0$ 和 $x=a$ 处,波函数等于零(我们称这个条件为边界条件),所以可以得到

$$\begin{aligned}&B=0\\ &ka=n\pi, \quad n=1,2,3,\cdots\end{aligned} \tag{24-41}$$

由(24-41)式的第二式和(24-40)式可以得到

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \quad n=1,2,3,\cdots \tag{24-42}$$

n 不能等于零,否则波函数在整个空间都等于零了,因此粒子有最小能量。这个能量称为粒子的零点能[①]。这与经典的情况有本质区别。经典粒子可以静止于两墙之间,而量子粒子是不可能完全静止的。(24-42)式显示粒子的能量是量子化的。这和经典的驻波在数学上是完全等价的。将经典波限制在一定的范围里,比如将绳子两端固定,只有确定的振动模式可以存在,这就是驻波的简正模式。能量的量子化正是这种现象在微观上的

① 零点能又称为真空能,表示某种物理条件下的最低能态。真空能不等于零说明真空并不是空无一物的。

体现，所以波这种数学描述方式用来描述微观粒子也就获得了巨大的成功①。

NOTE

如果粒子是自由的，它的能量也是量子化的吗？请用不确定关系估计无限深势阱基态的动能大小。观察势阱宽度趋于无限的情况。

波函数中的常量 A 还没有确定。这个可以通过波函数的归一化得到：

$$\int_0^a A^2 \sin^2 kx\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}} \tag{24-43}$$

因此粒子的波函数是

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin kx \tag{24-44}$$

*2. 波函数的统计性

我们现在来考虑波函数表现的统计性质。对于不同的能态 n，其波函数显示于图 24-11 中。利用(24-44)式我们可以求出粒子的平均位置。粒子处于 $x \sim x+\mathrm{d}x$ 间隔的概率是

$$|\Psi(x)|^2\mathrm{d}x \tag{24-45}$$

因此粒子的平均位置是

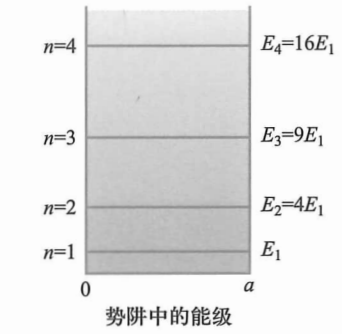
$$\bar{x} = \int_0^a x|\Psi(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{a}{2} \tag{24-46}$$

这个和自然的预期一致。我们还可以继续计算位置的不确定度，也就是位置的方差：

$$\Delta x^2 = \int_0^a (x-\bar{x})^2|\Psi(x)|^2\mathrm{d}x = \int_0^a x^2|\Psi(x)|^2\mathrm{d}x - \bar{x}^2$$

$$= \frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{2n^2\pi^2} \Rightarrow \Delta x = \frac{\sqrt{3n^2\pi^2 - 18}}{6n\pi}a \tag{24-47}$$

位置的不确定度在基态最小，原因是 n 越小，概率分布越在中部集中。当 $n \to \infty$ 时，概率分布趋于均匀，见图 24-11。不确定度也趋近于均匀分布的 $\sqrt{3}\,a/6$。玻尔的对应原理再次体现出来，因为对于经典粒子，其出现在任何位置的概率是一样的。



势阱中的能级

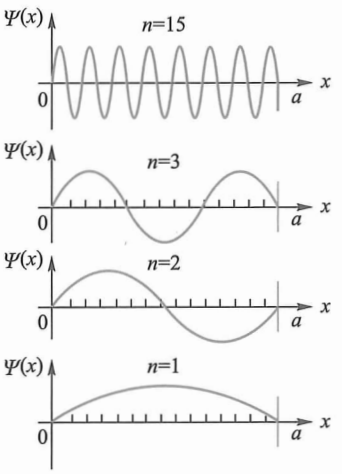


图 24-11

① 波动是单个量子的行为，宏观的电磁波是多个光子的宏观效应。那么机械波也是量子的宏观集体行为吗？应该说也是，只是不同于光子、电子等微观粒子(它们是独自形成了波动)。机械波是微观粒子互相作用形成的宏观波动。

NOTE

我们现在考虑这个粒子的动量不确定性。量子力学中有完整的计算动量不确定性的方法，我们这里采用更直观的方法。我们把波函数写成两个动量本征态的叠加：

$$\Psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin kx=\sqrt{\frac{1}{2a}}\frac{1}{\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}) \tag{24-48}$$

这其实就是向左和向右的两列波的叠加，这正好是驻波形成的方式。它们具有的动量本征值分别是：

$$p_{右}=k\hbar,\quad p_{左}=-k\hbar \tag{24-49}$$

由于这两列波的强度（振幅的模方）是一样的，所以粒子处于两种动量本征态的概率是一样的，平均动量等于零，

$$\bar{p}=|\eta_{右}|^2k\hbar-|\eta_{左}|^2k\hbar=0 \tag{24-50}$$

其中

$$|\eta_{右}|^2=|\eta_{右}|^2=\frac{1}{2}$$

现在来求动量的不确定度，即求动量的方差，

$$\begin{aligned}\Delta p^2&=|\eta_{右}|^2(k\hbar-\bar{p})^2+|\eta_{左}|^2(-k\hbar-\bar{p})^2\\&=(|\eta_{右}|^2+|\eta_{左}|^2)(k\hbar)^2=(k\hbar)^2\end{aligned} \tag{24-51}$$

因此动量不确定度为

$$\Delta p=k\hbar \tag{24-52}$$

由(24-47)式和(24-52)式得到

$$\Delta x\Delta p=\frac{\sqrt{3n^2\pi^2-18}}{6n\pi}ka\hbar=\frac{\sqrt{3n^2\pi^2-18}}{6}\hbar>\frac{\hbar}{2} \tag{24-53}$$

(24-53)式满足不确定关系。而且对于基态($n=1$)，(24-53)式左边是最接近不确定关系的下限，所以用不确定关系来估计基态的动能误差是最小的。

24-8 量子隧道效应

如果我们要到A星球旅行，我们首先要克服地球的引力，我们通常是利用火箭让我们具有足够大的动能。当我们的动能大于地球对我们的引力势能时，我们就能挣脱地球的束缚，飞向太空。我们受到地球的引力势能是

$$U(r)=-\frac{GM_{\mathrm{E}}m}{r} \tag{24-54}$$

我们用图24-12把势能表示出来。我们处于$r=R$的位置。

当我们的总机械能(动能加势能)大于零,我们就能越过势能壁垒(势垒),自由飞行。在远方有一个星球 A,它也有一个类似的势能。我们要降落在 A 星球,就必须减小我们的动能(靠火箭反推),否则就不可避免地自由落体般坠落了。因此地球和 A 星球之间有一个势垒,按照经典力学,我们必须先加速再减速,才能越过势垒。由于 A 星球表面的引力势能和地球表面的引力势能是一样的,加速和减速用去的大量燃料似乎白白浪费掉了。我们能否像崂山道士一样从势垒中穿过,到达 A 星球?这样可以省去大量燃料(从地球表面移到 A 星球表面不违反机械能守恒定律。)。为了研究这个问题,我们将地球和 A 星球共同形成的引力势能简化。我们将地球表面设置为势能零点,地球内部就不考虑了。地球和 A 星球之间的势能设置为常量,即

$$U(x)=\begin{cases}=0, & x<0 \text{ 或 } x>a\\ =U_0, & 0\leqslant x\leqslant a\end{cases} \tag{24-55}$$

势能的示意图如图 24-12(b)所示。现在有一个粒子,其总能量 E 小于势能 U_0,就像我们静止站在地球表面一样。这个粒子如果是一个经典粒子,它显然无法进入(0,a)的区域。因为根据机械能守恒,有

$$E=E_k+U_0 \tag{24-56}$$

粒子的动能是负值,这在经典力学是不被允许的。但是现在粒子不是一个经典粒子,它的运动不遵守牛顿力学,而是遵循薛定谔方程。也就是说粒子像波一样传播,那么问题就归结为波的传播问题。图中的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ区域可以视为三种介质。波从介质Ⅰ传播到介质Ⅱ,在交界面上,波会部分反射、部分透射。当然在Ⅱ,Ⅲ的交界面上,波同样会反射和透射。介质Ⅰ是真空,波可以自由传播[①]。介质Ⅱ呢?介质Ⅱ可以视为有阻尼的介质。比如电磁波入射到金属上,由于电磁波是振荡的电磁场,会在金属内部激发电流,入射电磁波的能量会很快耗散。所以电磁波只能穿透很薄的金属。同时激发的电流也会产生很强的电磁波,这部分电磁波提供给了反射。因此金属表面都很亮,具有高反射率。我们现在利用薛定谔方程来探究这个传播过程。根据(24-55)式,薛定谔方程可以写成

$$\begin{cases}E\Psi(x)=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x), & x<0 \text{ 或 } x>a\\ E\Psi(x)=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x)+U_0\Psi(x), & 0\leqslant x\leqslant a\end{cases} \tag{24-57}$$

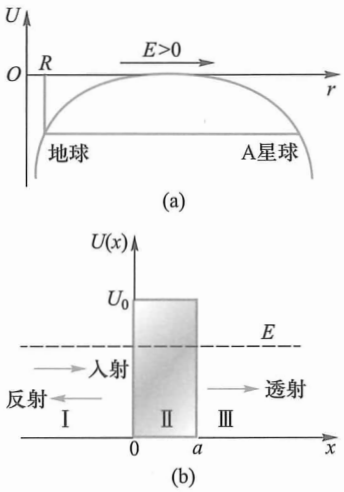


图 24-12 图(a)为地球和 A 星球形成的引力势垒,图(b)为简化的势垒

NOTE

① 物质波和机械波不一样,机械波不能在真空中传播,物质波可以。

NOTE

(24-57)式中的第一个方程的通解是

$$\Psi(x)=A_1e^{ik_1x}+A_2e^{-ikx},\quad x<0$$
$$\Psi(x)=Ce^{ik_1x},\quad x>a \tag{24-58}$$
$$k_1=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

其中 A_1 是入射波振幅，A_2 是反射波振幅，C 是透射波振幅，因为在Ⅲ区域就没有反射波了。振幅都是复数，可以提供额外的相位差(见 24-3 节末关于复数的基本性质)，因此不用考虑反射波是否有半波损失，一切由边界条件确定。(24-57)式第二个方程的通解是

$$\Psi(x)=B_1e^{-k_2x}+B_2e^{k_2x},\quad 0\leqslant x\leqslant a$$
$$k_2=\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar} \tag{24-59}$$

其中 B_1 是向右传播的波的振幅，B_2 是向左传播的波的振幅，后者是在Ⅱ、Ⅲ交界面的反射波①。它们都是随着传播距离增加指数衰减的，因此介质Ⅱ有阻尼。

然后的操作是利用波函数在Ⅰ、Ⅱ交界面和Ⅱ、Ⅲ交界面波函数连续以及一次导数也连续的四个条件，确定系数 A_2、B_1、B_2 和 C，我们将 A_1 我们视为已知条件(入射波)。比如由波函数连续得到

$$A_1+A_2=B_1+B_2,\quad x=0$$
$$B_1e^{-k_2a}+B_2e^{k_2a}=Ce^{ik_1a},\quad x=a \tag{24-60}$$

如果波函数一次导数也连续，可以得到

$$ik_1(A_1-A_2)=-k_2(B_1-B_2),\quad x=0$$
$$-k_2(B_1e^{-k_2a}-B_2e^{k_2a})=ik_1Ce^{ik_1a},\quad x=a \tag{24-61}$$

我们不打算严格解这四个联立的复数方程组(可以将其作为自己的练习)，而只想获得近似的结果。考虑到(26-60)式第二个方程左边是Ⅱ、Ⅲ界面的入射波和反射波，它们的振幅模方应该在同一量级，即

$$|B_1|e^{-k_2a}\sim|B_2|e^{k_2a}\Rightarrow|B_1|\sim|B_2|e^{2k_2a} \tag{24-62}$$

如果 k_2a 很大，$|B_1|$ 远大于 $|B_2|$。这样在(24-60)式和(24-61)式的第一个方程中我们可以忽略 B_2，联立这两个方程得到

$$B_1=\frac{2ik_1}{ik_1-k_2}A_1 \tag{24-63}$$

① 其实它们是不断在Ⅰ、Ⅱ和Ⅱ、Ⅲ交界面反射的波的叠加，由于传播的衰减，可以大致视为Ⅰ、Ⅱ交界面的向右传播的透射波和Ⅱ、Ⅲ交界面的反射波。

利用(24-60)式和(24-61)式的第二个方程得到(B_2 项这时不能忽略,因为有大的系数,必须通过两方程消去)

NOTE

$$C=\frac{2k_2}{k_2-\mathrm{i}k_1}B_1\mathrm{e}^{-k_2a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1a} \tag{24-64}$$

联立(24-63)式和(24-64)式得到

$$C=-\frac{4\mathrm{i}k_1k_2}{(k_2-\mathrm{i}k_1)^2}\mathrm{e}^{-k_2a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1a}A_1 \tag{24-65}$$

因此透射率为

$$\begin{aligned}P&=\frac{|C|^2}{|A_1|^2}=\frac{16k_1^2k_2^2}{(k_2^2+k_1^2)^2}\mathrm{e}^{-2k_2a}\\&=\frac{16E(U_0-E)}{U_0^2}\mathrm{e}^{-2\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}a}\end{aligned} \tag{24-66}$$

即粒子有一定的概率穿过势垒,这就是著名的量子隧道效应。对于经典物理学中的波来说,这是预料中的结果。因此从微观粒子波动性的角度看,很自然地有穿过势垒的概率。那么从粒子性的角度来看,如何理解粒子在势垒中的负动能呢?量子理论允许粒子处于这样“虚”的状态。就如同原子光谱一样,光子可以处在一个宽泛的能量状态,偏离中心值越大,概率越小。势垒中的粒子也是这样,可以假想它与某一正常态(动能为正)偏离某一能量 ΔE。粒子处于这种能量状态的时间是有限的,Δt 与其偏离的能量 ΔE 大小之间满足不确定关系

$$\Delta E\Delta t\geqslant\frac{\hbar}{2} \tag{24-67}$$

其中

$$\Delta E\geqslant U_0-E \tag{24-68}$$

(24-68)式保证粒子正常态动能为正。因此粒子在势垒中的时间为

$$\Delta t\geqslant\frac{\hbar}{2\Delta E} \tag{24-69}$$

这时粒子在势垒中的速度为

$$v=\sqrt{\frac{2(\Delta E+E-U_0)}{m}} \tag{24-70}$$

因此粒子在势垒中可以运动的距离是

$$\Delta x=v\Delta t\geqslant\sqrt{\frac{2(\Delta E+E-U_0)}{m}}\frac{\hbar}{2\Delta E} \tag{24-71}$$

为了求出粒子可以运动的最大距离,对(24-71)式右边的 ΔE 求导,让导数等于零(取极值),可以得到

NOTE

$$\Delta E = 2(U_0 - E) \tag{24-72}$$

代入(24-71)式得到粒子在势垒中运动的最大距离是

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0 - E)}} \tag{24-73}$$

这和由(24-66)式得到的指数衰竭形式完全一致(就是概率为 $\sim e^{-1}$ 时的距离)。从(24-73)式,我们也可以看到,对于一个宏观粒子,比如 1 g 的粒子,由于其质量是电子的 10^{27} 倍,即使遇到和电子相同的势垒,比如 eV 量级,其能够穿透的势垒厚度只有电子的 10^{-13},所以宏观发生隧道效应的可能性无法观测到。

量子隧道效应首先运用于解释太阳的能源来源。1926 年,英国物理学家爱丁顿提出太阳的能源来自氢元素的核聚变。这个假说提出后就遭到众多物理学家的反对。因为两个质子(氢原子核)只有相距 1 fm(飞米,10^{-15} m),它们之间才有足够的核力聚集成更重的原子核。然而要达到如此近的距离,首先要克服质子之间强大的库仑排斥力。我们可以估计一下太阳内部需要多高的温度,两个质子才有可能挨得这么近。也就是质子具有的(热)动能转化成质子间的库仑势能

$$\frac{3}{2}kT = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \sim 10^6 \text{ eV} \Rightarrow T \sim \frac{10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}{2 \times 10^{-23}} \sim 10^{10} \text{ K}$$

太阳内部不可能具有 100 亿度的高温!然而这个假说最终被证明是正确的,因为质子并不需要挨近到 1 fm,它们就有一定的概率隧穿入内部核力的势阱中而束缚起来[见图 24-13(a)]。所以太阳需要的温度低得多,再配上足够的粒子数密度(足够的碰撞频率),太阳就可以维持温和的聚变反应。毫无疑问的是,质量更大的恒星,中心温度更高,密度更大,反应更加剧烈,因此超大的恒星寿命远远低于太阳的寿命。另外一个例子是氨分子,见图 24-13(b)。N 的基态能量小于势垒,经典上 N 只能待在左边或右边,而事实上 N 不断穿过势垒在两边来回振动。

量子隧道效应在现代有广泛的应用。扫描隧道显微镜(STM)就是利用了量子隧道效应(图 24-14)。针尖靠近被测材料,材料中的电子会隧穿到针尖,隧穿的概率与针尖和材料的距离相关。针尖在材料表面移动,距离会随着材料表面的原子凹凸而改变,这会反映到隧穿电流的大小上。隧穿电流经过放大在显示器上就会显示材料表面的结构。

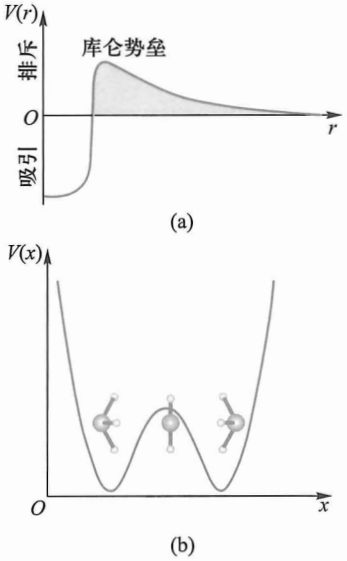


图 24-13 图(a)是两个质子之间的势垒,图(b)是 NH_3(氨)分子中 N 原子处于三个 H 原子的势场图像。N 原子与三个 H 原子在一个平面内时,势能是最大的,而处于与 H 原子不共面的一边时势能最小。两边是对称的。当 N 处在基态时,按照经典理论,其不是处于左边,就是处于右边,不能处于中间,而且两边互不相通,而事实是 N 以一定的频率不断在两边游走

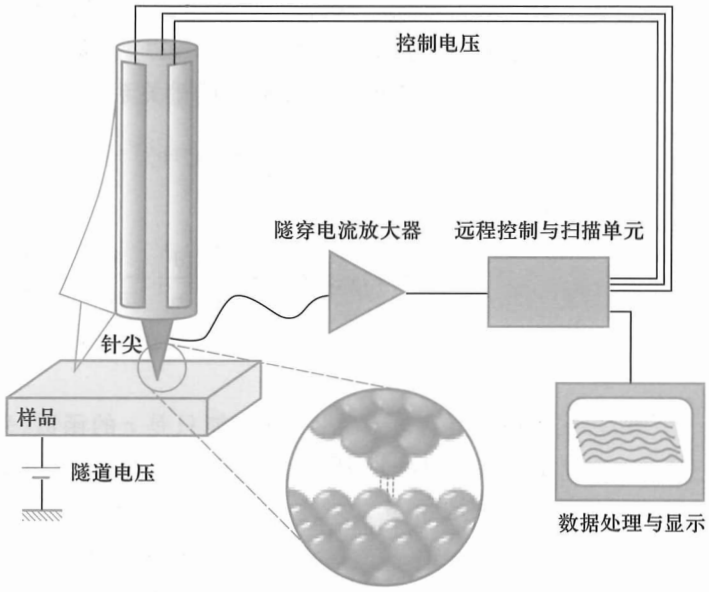


图 24-14 扫描隧道显微镜的示意图(见彩色插页)

例 4

STM 的探针与原子表面的距离为 1 nm。原子中的势垒高度为 3 eV,探针在移动时,由于原子之间的间隙,导致探针与原子的距离有 0.01 nm(约为原子半径的 1/10)的波动,问隧穿电流改变多少?

解 隧穿的概率是

$$P \sim \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}a}$$

$$P' \sim \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}(a-\Delta a)}$$

概率比是

$$\frac{P'}{P} = \mathrm{e}^{2\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}\Delta a} = e^{0.177} = 1.19$$

因此隧穿电流大概有 19%的波动。

24-9 氢原子

1. 能量本征态

我们谈到了几个薛定谔方程的运用,还没有涉及薛定谔方程最成功的例子。薛定谔建立了薛定谔方程后,首先就将其应用到氢原子上。正是氢原子上的成功应用,薛定谔方程才被广泛认

NOTE

可。薛定谔为此获得了1933年诺贝尔物理学奖。由于氢原子是三维问题，我们需要把方程(24-27)式推广到三维的情况。推广也是直截了当的。由经典的能量关系

$$E=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+V(x,y,z) \tag{24-74}$$

自然得到

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,y,z,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(x,y,z,t)+V(x,y,z,t)\Psi(x,y,z,t) \tag{24-75}$$

氢原子具有球对称性，其势能只是 r 的函数，采用球坐标是方便的。如图24-15所示，球坐标采用的是 (r,θ,ϕ)，其和直角坐标的关系是

$$\begin{aligned}x&=r\sin\theta\cos\phi\\ y&=r\sin\theta\sin\phi\\ z&=r\cos\theta\end{aligned} \tag{24-76}$$

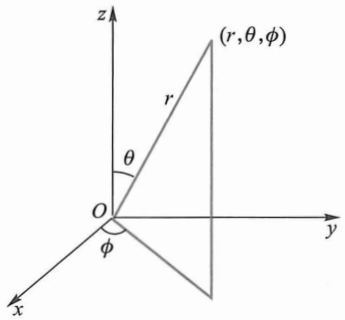


图 24-15

由于解方程有些烦琐，没有兴趣的同学可以直接跳到本节最后看结果(此处的介绍也是简介，我们主要是为了通过这个过程引进轨道角动量)。由(24-76)式可以得到偏微分的关系式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{24-77}$$

因此氢原子的薛定谔方程为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,\theta,\varphi,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Psi(r,\theta,\phi,t)-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\Psi(r,\theta,\phi,t)$$

由于我们处理的是定态问题，可以把方程写成

$$E\Psi(r,\theta,\varphi)=-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\Psi(r,\theta,\phi)\right]-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Psi(r,\theta,\phi)-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\Psi(r,\theta,\phi) \tag{24-78}$$

(24-78)式中有一个关于角度偏微分的组合算符

$$\hat{O}=-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \tag{24-79}$$

这个算符的本征态就是球谐函数。

NOTE

$$\hat{O}Y_{lm}(\theta,\phi)=l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi), \quad l=0,1,2,\cdots,m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l \tag{24-80}$$

球谐函数组成完备基[①]。就如同傅里叶变换一样,任何三维变量函数都可以球谐函数作为基展开。因此波函数可以写成

$$\Psi(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{24-81}$$

由于球谐函数是正交归一的,属于不同球谐函数的分量在(24-78)式中是互相独立的。(就像一个矢量方程,x,y,z 轴分量的方程是互相独立的。)因此我们可以只考虑(24-81)式中的某个分量,而把波函数写成

$$\Psi(r,\theta,\phi)=a_{lm}(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{24-82}$$

将(24-82)式代入(24-78)式得到

$$Ea_{lm}(r)=-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}a_{lm}(r)\right]+\frac{\hbar^2}{2mr^2}l(l+1)a_{lm}(r)-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}a_{lm}(r) \tag{24-83}$$

(24-83)式是关于坐标 r 的方程,可以通过分析其渐进行为求解。最后得到的能量本征值是

$$E_n=-\frac{1}{n^2}\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\right),\quad n=1,2,3,\cdots \tag{24-84}$$

有点意外的是,能量的本征值和 l 无关[(24-83)式看起来和 l 相关]。然而(24-84)式的确就是玻尔模型得到的结果。要获得(24-84)式,还有一个先决条件:$n>l$,也就是 l 最大取到 $n-1$。这一点和玻尔模型不一致。为了说明这一点,我们首先要明白 l 的含义。我们现在要引进角动量算符。根据经典力学,角动量等于

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{24-85}$$

因此角动量算符为

$$\hat{L}=\boldsymbol{r}\times-\mathrm{i}\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \tag{24-86}$$

我们还可以定义角动量平方的算符

$$\hat{L}^2=\hat{L}\cdot\hat{L} \tag{24-87}$$

在球坐标系中,(24-87)式和(24-79)式的关系是

$$\hat{L}^2=\hbar^2\hat{O} \tag{24-88}$$

因此由(24-80)式可知,系统角动量平方算符的本征值等于

$$L^2=l(l+1)\hbar^2 \tag{24-89}$$

(24-88)式不应该令人惊讶。在经典力学的中心力场中,角动量

① 球谐函数的性质可以参考数学物理方法的教材或者数学手册。

NOTE

守恒，因此粒子总在一个平面中运动。其速度为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{24-90}$$

(24-90)式是采用极坐标，将速度分解为径向和横向。因此粒子的动能为

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2} \tag{24-91}$$

(24-91)式中横向动能对应于(24-78)式中的横向动能。

我们现在回到前面的问题，由于 l 最大取到 $n-1$，所以对于基态 $n=1,l=0$。由(24-89)式可知，基态电子的轨道角动量为零，而玻尔模型角动量永远不等于零。

现在我们来确定氢原子的能量本征态。由(24-83)式可知

$$a_{lm}(r)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi),\quad l=0,1,2,\cdots,n-1,m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l \tag{24-92}$$

就是能量本征态。我们把氢原子的能量本征态改写成

$$\Psi_{nlm}(r,\theta,\phi)=a_{nl}(r)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi),\quad n=1,2,3,\cdots$$
$$l=0,1,2,\cdots,n-1,m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l \tag{24-93}$$

(24-93)式中，去掉了径向波函数 a 的下标 m，增加了 n。因为方程(24-83)式与量子数 $n(E)$ 相关，与 m 无关，所以 $a_{nl}(r)$ 的形式只与量子数 n,l 相关。这样氢原子波函数由三个量子数确定：主量子数 n、轨道角动量 l 和磁量子数 m(至于为什么叫磁量子数，下小节会介绍。)虽然波函数与三个量子数相关，能量却只和主量子数 n 相关。这点和玻尔模型也是很不一样的：具有同样能量的氢原子(因而 n 相同)，l 可以有 n 种取法：$l=0,1,2,\cdots,n-1$，即电子的角动量可以不同。而且，对于同一个 l，m 可以有 $2l+1$ 种取法：$m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$。对于一个给定的 n,l,m 的不同取法共有

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1)=n^2 \tag{24-94}$$

种。我们把具有相同能量但是具有不同量子数的态称为能量简并态，把简并态的数目称为简并度。氢原子的能量简并度是 n^2。有一种习惯的约定：$l=0$ 的简并态称为s态(s波或s轨道)，$l=1$ 的简并态称为p态(p波或p轨道)，$l=2$ 的简并态称为d态(d波或d轨道)等。比如1s，就是 $n=1,l=0$ 的能态，2p就是 $n=2,l=1$ 的能态。

氢原子3d的能量简并度是多少？

最后对本节作一个小结。氢原子的能量本征态是(24-93)式，能量本征值是(24-84)式。(24-93)式同时也是角动量平方

的本征态(24-89)式。由于(24-93)式中 l、m 的取值可以有一定的随意性,氢原子能态是简并的,能量简并度(不包括自旋,自旋后面会讲)可由(24-94)式得到。

NOTE

2. 氢原子的电子云

电子在原子中是没有固定轨道的。我们只能通过其波函数知道在原子中的概率分布。电子在体积元 $\mathrm{d}V=r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega$(球坐标)中出现的概率为

$$|\Psi(r,\theta,\phi)|^2\mathrm{d}V=|a_{nl}(r)|^2r^2|\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)|^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega \tag{24-95}$$

$\mathrm{d}\Omega$ 是球坐标中的立体角。首先我们考虑 $l=0$ 的 s 态。球谐函数可以在特殊函数教材中查到。由于

$$\mathrm{Y}_{00}(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{24-96}$$

和方位角无关,所以 s 态单位立体角的概率分布是球对称(各向同性)的,当然径向分布与 n 相关,如

$$\begin{aligned}a_{10}(r)&=\frac{2}{a_0^{3/2}}\mathrm{e}^{-r/a_0}\\ a_{20}(r)&=\frac{1}{(2a_0)^{3/2}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)\mathrm{e}^{-r/2a_0}\end{aligned} \tag{24-97}$$

其中 a_0 是玻尔半径。由(24-95)式可知,对于基态 $n=1$,单位径向长度和单位立体角内的概率分布开始随着 r 增大,在 $r=a_0$ 处达到最大[即对 $a_{10}^2(r)r^2$ 求极值],然后随着 r 增加而逐渐减小。特别需要提到的是,总能量 $E=T+U=-13.6$ eV 是不变的,然而动能和势能随着位置的变化而变化。当 $r=2a_0$ 时,$E=U$。在经典力学,电子是不可能处于 $r>2a_0$,因为势能大于总能量。显然在量子力学中电子是有概率处于这样的区域的。对于激发态 $n=2$,(24-97)式显示在 $r=2a_0$ 处概率等于零,然后又会增加。图 24-16 是电子概率分布示意图。对于 $l=1$ 的 p 态,球谐函数为

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}_{10}(\theta,\phi)&=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\\ \mathrm{Y}_{1\pm1}(\theta,\phi)&=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}\end{aligned} \tag{24-98}$$

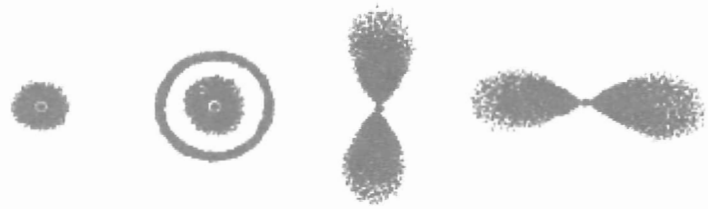
所以 $(l,m)=(1,0)$ 态,在 z 轴方向概率密度最大,在 xy 平面概率密度等于零,而 $(l,m)=(1,\pm1)$ 态,在 z 轴方向概率密度等于零,

NOTE

在 $x-y$ 平面概率密度最大。($n=2, l=1$)的径向波函数是

$$a_{21}(r)=\frac{r}{2\sqrt{6a_0^5}}e^{-r/2a_0} \tag{24-99}$$

根据(24-95)式,2p 态在 $r=0$ 处的概率密度等于零,在 $r=4a_0$ 处概率达到最大,然后衰减。综合(24-98)式和(24-99)式,其概率分布见图 24-16,形状像哑铃。概率分布常被形象地称为电子云。



$n=1, l=0$ 1s　　$n=2, l=0$ 2s　　$n=2, l=1$ $m_l=0$ 2p　　$n=2, l=1$ $m_l=\pm 1$ 2p

图 24-16

验证 1s 态径向概率分布在 $r=a_0$ 时达到最大。

24-10 塞曼效应

1896 年,荷兰物理学家塞曼在观察磁场中钠燃烧火焰的光谱时,发现钠的 D 线光谱变宽了。更精细的测量发现谱线分裂成若干条线。这是人们第一次观察到原子能级在磁场中劈裂的现象。洛伦兹从电子的轨道运动出发,对这个现象作出了解释。由于电子的运动,原子具有磁矩。从经典的角度看,电子绕原子核旋转,其产生的磁矩是

$$\boldsymbol{u}=-\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{L} \tag{24-100}$$

其中 e 是电子电荷量的绝对值,m_e 是电子的质量,这是为了与后面的磁量子数 m 区别。这个磁矩在磁场中会受到一个力矩,力矩的效果等效于势能:

$$V=-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{B} \tag{24-101}$$

按照前面的操作,在量子力学里,(24-101)式可算符化成

$$V=\frac{e}{2m_e}\hat{L}\cdot\boldsymbol{B} \tag{24-102}$$

其中的角动量算符在(24-86)式中定义了。可以选取坐标,让磁场方向朝向 z 轴,(24-102)式就转化成

$$V=\frac{eB}{2m_e}\hat{L}_z \tag{24-103}$$

由(24-79)式、(24-80)式和(24-88)式,我们知道球谐函数是角动量平方算符的本征态,本征值是 $l(l+1)$。其实,球谐函数还是角动量 z 轴分量算符的本征态,

$$L_z Y_{lm}(\theta,\phi)=m\hbar Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{24-104}$$

所以(24-93)式也是(24-103)式的本征态。这样氢原子的能量就变成

$$E_{nm}=-\frac{1}{n^2}\left(\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right)+\frac{e\hbar B}{2m_e}m \quad n=1,2,3,\cdots,m=0,\pm1,\cdots,\pm l \tag{24-105}$$

这时能量不仅与主量子数 n 相关,还与磁量子数 m 相关,这个"磁"的来源就在于此。那么能量的简并就被打破了。对于 $l=1$ 的量子态,m 可以取三个值:$-1,0,1$。一条光谱就分裂成三条了(见图 24-17)。塞曼效应证实了角动量空间取向的量子化,即角动量在任何方向上的投影取值也是量子化的。对于 p 波,角动量的大小为

$$L=\sqrt{L^2}=\sqrt{2}\hbar \tag{24-106}$$

而在任意方向(比如 z 轴)上的确定值只能取

$$L_z=-\hbar,0,\hbar \tag{24-107}$$

它总是小于总角动量(24-106)式的大小,这说明在 x 轴和 y 轴方向还有剩余的角动量。而 x 轴,y 轴,z 轴方向的角动量我们不可能同时精确获得($l=0$ 除外),否则我们总可以选择一个方向,让这个方向正好向着角动量的方向,因而在这个方向上角动量的大小正好等于总角动量,这样就与(24-107)式不一致了。角动量的这一性质被量子力学所保证,也是另外一种不确定关系。

图 24-17(a)如果是一个 3d 轨道的电子到 3p 的跃迁。还会分裂成三条谱线吗?

由于塞曼效应的能级劈裂正比于磁场的大小,可以利用塞曼效应测量原子所处环境磁场的大小,这在天文学中有广泛的应用。太阳黑子处于强磁场中就是通过塞曼效应发现的。

塞曼效应还应用在激光制冷上。人类现在能够达到的最低温度在 10^{-11} K 左右。要达到如此接近绝对零度的低温,必须设法降低原子的运动速度,让其运动得很慢。激光从六个方向射向

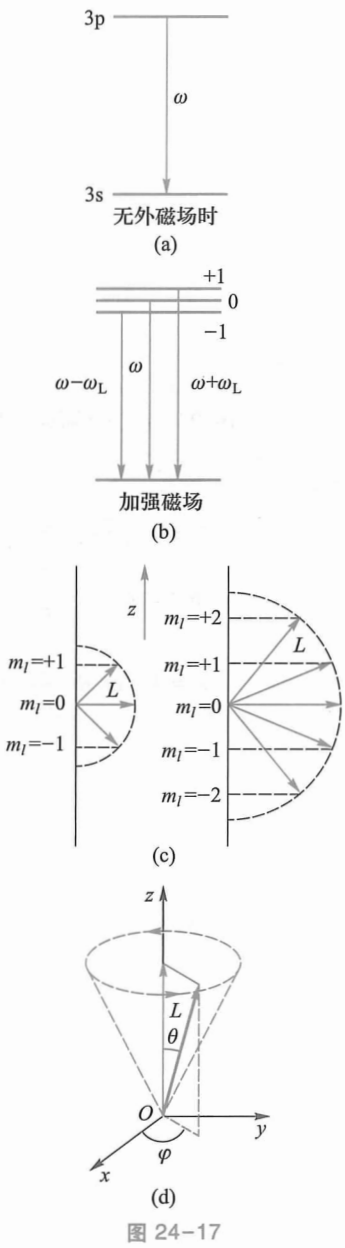


图 24-17

NOTE

原子，像一种黏汤。原子在黏汤中运动，速率就降了下来。然而要实现这种设想，需要原子能够吸收迎面射来的光子。因此激光的频率设置为比原子的共振吸收频率略小，这样原子由于向着光子运动，会产生多普勒效应，正好实现共振吸收。而从原子背面飞来的光子不会被吸收，从而达到减速的目的。这和穆斯堡尔效应的情形很类似（见第十九章）。然而这样还是不够的，因为随着温度降低，原子的速率会降低，多普勒效应会减弱。这时候可以在原子中加入磁场，导致原子能级改变。原子能级改变的大小可以由控制磁场大小实现，只要实现温度的下降和磁场的变化同步就可以实现。（原子吸收光子后达到激发态，最终还会辐射出光子。由于辐射光子的方向是随机的，所以总体上不会影响原子的速率。）

例 5

如图 24-17(c)所示，当 $L=2$ 时，角动量与 z 轴的夹角有几种可能？

解

$$L=\sqrt{2(2+1)}\,\hbar=\sqrt{6}\,\hbar$$

$$m=2,\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{6}},\theta=35.3°$$

$$m=1,\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{6}},\theta=65.9°$$

$$m=0,\cos\theta=0,\theta=90°$$

$$m=-1,\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{6}},\theta=114.1°$$

$$m=-2,\cos\theta=\frac{-2}{\sqrt{6}},\theta=144.7°$$

24-11 电子自旋

1922 年，德国物理学家施特恩和格拉赫为了验证原子角动量空间量子化，使银蒸气经过狭长通道穿过不均匀的磁场到达照相底片右成像。由于原子具有磁矩，其穿过不均匀的磁场会受到磁力的作用发生偏转，磁矩大小不同，朝向不同，发生的偏转不同。如果原子的磁矩是经典的，那么它们的大小和方向会连续分布，照相底片上会留下连续分布的原子沉淀。如果原子磁矩是量子的，磁矩的大小和方向只有有限种，应该看到离散的原子沉淀。如图 24-18 所示，他们的确看到了两条条纹，而不加磁场，只有一条条纹。虽然条纹分裂了，但是数目却不对。因为对于任意轨道

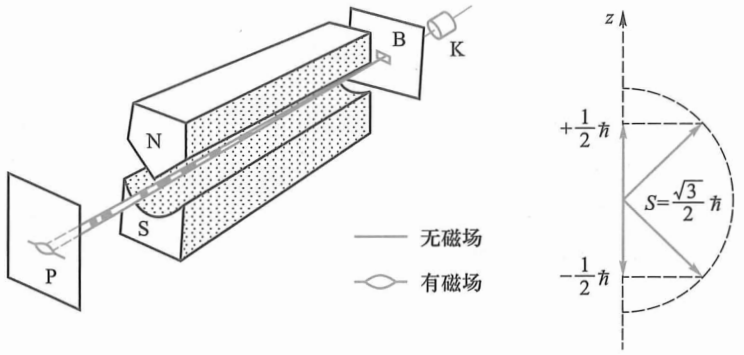


图 24-18 施特恩-格拉赫实验

角动量 l，m 有 $2l+1$ 种取法，是奇数。为了解释这个现象，荷兰两位年轻的物理学家乌伦贝克和古兹密特提出电子不仅可以绕原子核旋转，还可以绕自己的对称轴旋转，如一个刚体小球①。如果电子自转的角动量也是量子化的，其也可以用 (S, m_s) 描述。S 是总自旋量子数，m_s 是自旋的磁量子数，即

$$S^2 = s(s+1)\hbar^2 \qquad (24-108)$$
$$m_s = -s, -s+1, \cdots s-1, s$$

电子自旋也会使电子具有磁矩

$$\boldsymbol{u}_s = -\frac{e}{m_e}\boldsymbol{S}$$
$$V = -\boldsymbol{u}_s \cdot \boldsymbol{B} = \frac{eB}{m_e}S_z \qquad (24-109)$$

需要注意的是，自旋磁矩的常数因子是轨道磁矩(24-100)式的二倍。现在如果设定 $s=1/2$，自旋的磁量子数只能有两个值：1/2 和 -1/2($2s+1=2$)。这样就可以解释实验中的两条条纹了。电子具有自旋后，其在原子中的状态需要四个量子数描述：n、l、m、m_s。对于氢原子来说，如果没有外磁场，原子的能量简并度与没有电子自旋时相比会增加一倍，即为 $2n^2$。

电子的 1/2 自旋还赋予了它特殊的统计性质(费米统计)：两个电子不能处于完全相同的量子态上，这就是著名的泡利不相容原理②。泡利不相容原理为人们理解原子的周期律指明了方向：稳定的原子处于能量的最低态，因此电子将尽量处于主量子数 n 小的态。对于确定的 n，一共只有 $2n^2$ 个不同的量子态。若原子

① 这两位年轻人当时在埃伦费斯特教授那里做博士研究生。在导师出差时，他们完成了论文并将其提交到物理期刊。导师看了论文后说，如果电子是一个刚体小球，为了达到 $\hbar/2$ 的角动量，必须超光速旋转。两位年轻人听后想收回论文，埃伦费斯特教授说："年轻人犯点错误没有关系。"因此电子自旋只在量子理论中才会出现，是电子的内禀性质，不能用经典图像解释。

② 其实泡利不相容原理早于电子自旋提出。两位年轻人在提出电子自旋时受到了泡利不相容原理的启发。

NOTE

的电子数大于 $2n^2$，填满这些态后就填 $n+1$ 的量子态，以此类推。对于同一个主量子数 n，填的顺序从小的轨道角动量 l 开始。这些特性使得原子具有壳层结构。$n=1$ 时，只能填两个电子：$1s^2$；$n=2$ 时，填充的顺序为 $2s^2$，$2p^6$，共 8 个电子；$n=3$ 时，填充的顺序为 $3s^2$，$3p^6$，$3d^{10}$，共 18 个电子；等等。当然在多电子的原子中，电子之间也有相互作用，这会导致不同量子态的能量实际上发生了改变，因此最后电子填充的次序并不完全按照上面的排列方式，但是依然遵循能量最低原则。

重子是一种微观粒子，由三个夸克组成。常见的重子有质子和中子。而夸克也是一种费米子，具有 1/2 自旋。实验上发现了一种 Δ^{++} 重子，它由三个 u 夸克组成，三个 u 夸克都是 s 态，且自旋态也完全一样，这违反了泡利不相容原理。为了解释这个现象，物理学家格林伯格提出这三个 u 夸克其实处于不同的量子态，为此他赋予夸克一种新的量子数：色荷①。色荷可以有三种：红、绿、蓝，这样三个 u 夸克正好可以处于不同的量子态。有了色荷，夸克之间的强相互作用理论——量子色动力学就建立起来了。

如果电子是一个半径为 10^{-15} m 的小刚体球，请估算电子的旋转角速度和表面的线速度。

*24-12 量子纠缠和量子通信

我们知道电子轨道角动量的本征波函数是球谐函数[(24-80)式]，它同时也是 z 轴方向角动量的本征波函数[(24-104)式]。那么自旋的本征态和本征波函数是什么？自旋是粒子的内禀性质，无法用粒子的运动形式来描述，因此其波函数与空间坐标无关。但是自旋也是角动量，其与轨道角动量有很多共性②。我们可以像轨道角动量那样，选取本征波函数同时是电子自旋平方算符和 z 轴方向自旋算符的本征态，当然这个态不可能是 x 轴和 y 轴方向自旋算符的本征态[见式(24-107)式中的讨论]。我们采用狄拉克的符号，把自旋的本征态表示成

① 我国物理学家、中国科技大学刘耀阳教授同时独立提出夸克具有色荷。

② 轨道角动量与空间转动相关，用数学群论的语言来描述，它是转动群的生成算符。自旋是对这个概念的推广。基于群论，自旋与轨道角动量有极大的相似度。

NOTE

$$\hat{S}^2|SS_z\rangle = S(S+1)\hbar^2|SS_z\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|SS_z\rangle \quad (24-110)$$

$$\hat{S}_z|SS_z\rangle = S_z\hbar|SS_z\rangle$$

由于 S 的数值永远是 1/2，我们可以把自旋本征态形象地简化为

$$\hat{S}_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle, \quad \hat{S}_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle \quad (24-111)$$

现在我们考虑由两个电子组成的系统。两个电子的总自旋是两个电子自旋之和。如果两个自旋正好方向相反，它们的总自旋为零，那么它们在 z 轴方向的总自旋也为零，因此这个态可以表示成

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (24-112)$$

(24-112)式中第一个箭头表示 1 号电子的自旋，第二个箭头表示 2 号电子的自旋。1 号自旋向上、2 号自旋向下的态与 1 号自旋向下、2 号自旋向上的态在 z 轴方向的总自旋都为零，因此它们都是可以存在的状态。但是 z 轴方向的总自旋为零并不能保证整个态的总自旋为零(或者说不能保证总自旋平方算符的本征值为零)，这也是(24-112)式中减号的意义所在，它保证了态的总自旋为零，即任何方向上的总自旋为零[在总自旋为零时，显然沿任何轴方向投影的角动量也为零，这时 x 轴、y 轴、z 轴方向的角动量可以同时为确定的值(零)]。(24-112)式可以视为 1 号自旋向上、2 号自旋向下的态和 1 号自旋向下、2 号自旋向上的态的叠加态，它们的概率各为1/2。由于总角动量为零，(24-112)式中的箭头方向不必沿 z 轴，它沿 x 轴、y 轴或者任何其他方向都是成立的。

现在我们假想一个总角动量为零的粒子衰变成两个电子[①]，它们各自向相反的方向飞行。由于总角动量为零，两个电子的自旋波函数为(24-112)式。虽然我们确信两个电子的总自旋为零，但是每个电子的自旋不是确定的，它们向上和向下的概率各为 1/2。现在我们在两个电子的前方各摆放一个探测器。其中 1 号电子前面的探测器离衰变粒子近一些。这样 1 号电子前的探测器“先”测定 1 号电子的自旋方向。比如测到 1 号电子的自旋朝上，波函数(24-112)式马上就变成

$$|\uparrow\downarrow\rangle \quad (24-113)$$

所以 1 号探测器的操作员可以肯定 2 号电子探测器的结果是电

① 目前没有粒子可以衰变成两个电子，存在零自旋粒子衰变成一正电子、一负电子的情况。用两个电子代替一正电子、一负电子不影响我们的讨论。

NOTE

子自旋朝下。这样,似乎2号电子前探测器的结果是由1号探测器“先”探测导致的,其实不是这样。由于两个探测器距离足够远,两次探测是两个类空事件,在某个参考系中看,是1号在前,在另一个参考系中看是2号探测在先。所以不能确定到底是1号探测器还是2号探测器触发了波函数变成(24-113)式[①]。当然也有人认为是出现了超光速现象:1号电子前探测器的结果瞬间影响了2号电子,使2号电子的自旋朝下,那么狭义相对论就要修改了。事情是不是这样呢?如果要否定狭义相对论,就要否定狭义相对论的因果律。仅凭1号电子自旋朝上,2号自旋朝下是不行的,因为你不能确定到底是1号先朝上,还是2号先朝下。两者只是互为关联,谈不上出现了两个类空的因果事件。如果要产生两个类空的因果事件,你必须要证明其中一个事件是因,另一个事件是果。然而你无法利用电子自旋的性质来产生这样两件类空因果事件。比如1号电子前探测器的操作员希望通过测量向2号测量员发送超光速信息(比如:2号自旋朝上就下班,朝下继续加班),让2号操作员作出反应,这样就产生两个类空因果事件。问题是这种操作可能吗?1号操作员在探测之前,并不知道探测结果,所以他无法向2号操作员发送确切的信息。如果他想把自己的想法告诉2号操作员,他只能等自己的探测结果出来。比如探测结果是1号自旋朝上,他想让2号继续上班,他只能通过电磁信号告诉2号:“2号自旋向下就加班,自旋向上就下班。”所以2号作出反应的事件和1号发出命令的事件一定是两个类时事件。

上面我们其实介绍了量子的一个重要特性:量子纠缠。1号电子的自旋和2号电子的自旋互相捆绑,知道1号自旋朝向,立刻就知道了2号自旋朝向,无论它们相距多远。冥冥之中它们之间似乎有超距相互作用。我们这里需要说明,两个经典(符合决定论)的粒子,如果它们的总角动量为零,自旋方向也是相反的。它们即使相距很远,也可以通过知道其中一个的自旋方向,马上就知道另外一个的自旋方向。然而经典(符合决定论)粒子在出发时,它们的自旋已经确定了,只是你不知道而已,不存在“超距相互作用”。两个量子电子,出发时自旋方向没有确定,不测量谁也不知道它们的自旋方向。它们的自旋是在测量后瞬间确定

① 如果两次测量是类时的,这时在任何参考系中两次测量的顺序不变。这种情况一般不受关注,因为没有显示出“超光速”的关联。2号电子前探测器可以在测量之前就获得1号探测结果的电磁信号通知。两次有因果关系的测量获得信息的速度不超过光速。

的[①]。就像薛定谔的猫，在开门之前，猫的死活是不确定的，是你打开门的瞬间确定了猫的死活。

我们上面的讨论，也附带引出了另一个问题：1 号操作员如何向 2 号操作员传递信息？

虽然最后证明 1 号操作员不可能向 2 号传递超光速信息，但是也引出了另外一种传递信息的方式。就像上面所述，1 号操作员向 2 号操作员发射纠缠电子，然后他自己先测量自己一方的电子自旋。根据测量结果，他把指令用自旋方向编成码，通过电磁信号发射给 2 号操作员。2 号操作员根据自己测量电子自旋的结果，对比电磁信号的编码获得指令。这种通信方式极为安全，敌方（甚至电磁信号的发射员）单独获得纠缠电子或者电磁信号都不可能得知指令，特别是敌方截获了纠缠电子，就破坏了电子的量子纠缠，很容易被 2 号操作员发现，从而通知 1 号操作员重新发送指令。量子通信是一种新型的通信工具，世界上多个国家都在研发，我国在这方面走在世界的前列[②]。

NOTE

本章摘要

1. 德布罗意关系　　$p=\dfrac{h}{\lambda}$

2. 不确定关系　　$\Delta x\Delta p_x\geqslant\dfrac{\hbar}{2},\Delta E\Delta t\geqslant\dfrac{\hbar}{2}$

3. 波函数

（1）归一化　　$\int|\Psi(x,y,z)|^2\mathrm{d}V=1$

（2）概率密度　　$\rho(x,y,z)=|\Psi(x,y,z)|^2$

4. 一维定态薛定谔方程

$$E\Psi(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x)+V(x)\Psi(x)$$

5. 无限深势阱

$$\Psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin k_nx,k_n=\frac{n\pi}{a},\quad n=1,2,3,\cdots$$

① 如何确定微观粒子究竟是经典（符合决定论）的还是量子的，物理学家费了一番周折。直到 1964 年贝尔提出了贝尔不等式，才确立了在实验中区分经典和量子粒子的准则。到目前位置，实验支持微观粒子遵循量子力学原理。

② 实用的量子通信采用的是纠缠光子。

NOTE

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2},\quad n=1,2,3,\cdots$$

6. 隧穿概率

$$P=\frac{16E(U_0-E)}{U_0^2}e^{-2\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}a}$$

7. 氢原子

(1) 能级 $E_n=-\frac{1}{n^2}\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\right),\quad n=1,2,3,\cdots$

(2) 角动量

$$L=\sqrt{l(l+1)}\,\hbar,\quad l=1,2,\cdots,n-1$$

$$L_z=m\hbar,\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$$

(3) 电子自旋

$$S=\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar,\quad S_z=\pm\frac{1}{2}\hbar$$

(4) 泡利不相容原理

原子中电子的状态由四个量子数 n、l、m、m_s 确定，任意两个电子不能具有完全相同的量子数。

(5) 氢原子能级简并度：$2n^2$

习题

24-1 热中子(20 ℃)的平均波长是多少？

24-2 一个电子的德布罗意波长等于其康普顿波长，它的速度是多少？

24-3 在图 24-4 的多晶衍射实验中，G.P.汤姆孙用的电子动能是 2×10^4 eV。铜的晶格常量是 $a=3.6$ Å，最大晶面距离是 $a/\sqrt{3}$。求图 24-4 中第一条明纹(除中心亮点外)与入射电子方向的夹角。

24-4 一个人体重 100 kg。他站着“不动”。根据不确定关系，显然他不可能完全精确地“不动”，否则位置就完全不确定。这里的“不动”指的是平均速度为零。我们假定对他的位置作准确测量，误差是 1 μm。那么他的速度不确定度是多大？我们假定由于偶然原因，他的速度不确定度都沿着一个方向(这种概率几乎为零)，累计下来他需要多长时间才能挪动 1 μm？

24-5 在一维无限深势阱中，势阱宽为 a。将电子视为波，在势阱中只能以驻波存在。请直接写出驻波的波长条件，然后计算动量大小和动能。

24-6 把电子禁闭在边长为 $2a_0$ 的正方形盒子中。电子的最小动能为多少？如果将电子换为质子，将质子囚禁在边长为原子核直径(10^{-14} m)的正方形盒子中，质子的最小动能是多少？(视为三个独立方向的势阱)

24-7 一个谐振子的能量是 $E=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2$。请用不确定关系估计这个谐振子的基态能量。(提示：需要求出极小值。)根据所得结果，你会联想到什么？

24-8 请用不确定关系说明：一个粒子的波动性(干涉性)和粒子性(轨道性)是不会同时出现的。

24-9 动量本征态满足方程

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)=p\Psi(x)$$

请求解这个方程,获得动量本征态(不需要将其归一化)。

24-10 一个粒子的波函数是

$$\Psi(x)=A\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

求 A 的值,并求粒子的平均位置以及位置的不确定度。

$$\left(\text{提示:}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi},\int_{-\infty}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

24-11 一个粒子处于两个能量分别为 E_1 和 E_2 的本征态的叠加态上,

$$\Psi=\eta_1\Psi_{E_1}+\eta_2\Psi_{E_2}$$

两个本征态波函数都是正交归一的。求这个态的平均能量和能量的不确定度。

24-12 将 3d 的氢原子置于磁场中,它跃迁到 2p,可能发出几条光谱线(不考虑自旋,不考虑角动量守恒①)?

24-13 如图 24-17(d)所示,如果 $l=1$,$m=1$,角动量与 z 轴的夹角是多少?这时角动量在 xy 平面上的投影不等于零。那么角动量在 xy 平面投影的方向指向哪个方向的概率大?请猜测角动量在 x 轴方向的平均值 $\overline{L}_x$ 和 y 轴方向的平均值 $\overline{L}_y$,并计算平均值 $\overline{L}_x^2$ 和 $\overline{L}_y^2$。(提示:$L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$)

24-14 塞曼效应中,如果激发态轨道角动量是 1,基态轨道角动量为零,考虑自旋(不考虑角动量守恒),能级会劈裂成几条?



习题解答

① 由于光子的自旋为 1,实际上有些过程受到角动量守恒的限制。

第二十五章　凝聚态物理



本章补充资源

NOTE

凝聚态物理是对凝聚态物质进行研究的科学，以原子和电子为“基本粒子”，利用量子力学和统计物理学等手段研究物质表现出物理性质的原因。凝聚态物理强调多粒子效应和对称性破缺。多粒子效应指体系所包含的粒子之间的相互作用和微观粒子的量子统计规律，通常会在体系的哈密顿量（也就是能量）上有所体现，从而使凝聚态物质具有自身独特的电子结构、热力学量和电磁学性质。同时，凝聚态物质的对称性破缺则是体系有序程度的体现，我们都知道晶体通常具有平移对称性，而非晶和液体没有这样的对称性，晶体的对称性更高，会有更多的约束条件，这是晶体和其他非晶凝聚态物质的物理性质差异的重要基础。而凝聚态物质的对称性则包括空间的平移、旋转、反演，时间的平移、反演、粒子替换、电荷符号变换和规范变换等。当某种对称性消失，则称发生了这种对称性的破缺，对应物质的物理性质将发生巨大的变化，例如时间反演对称性破缺与铁磁和反铁磁的形成有关，规范对称性破缺将导致宏观波函数出现等。凝聚态物质的各种物理性质本质上都是由多粒子效应和对称性破缺导致的。

25-1　凝聚态物理的研究对象

凝聚态物质是巨量粒子通过相互作用凝聚形成的，其涉及的粒子数目巨大，所以常用物质的量（mol）来描述凝聚态物质。我们知道 1 mol 物质的原子数为阿伏伽德罗常量，即 6.023×10^{23}。这是一个巨大的数目，为了直观感受这个数目，我们举个例子。这个数目相当于能够容纳整个太平洋海水所需要的饮料杯的数目，或者铺在中国国土上 14 km 厚的爆米花的数量！这么大数目的粒子间还有很强的、复杂的相互作用，可以想象凝聚态物质体系多复杂！而研究发现，我们也无法根据少数粒子的性质作简单外推来认识大量且复杂的粒子集合体，即凝聚态的行为。因为在任何不同的复杂性层级下，物质会呈现全新的性质，这种现象称

为层展性。

NOTE

为什么把大量的粒子放到一起，构成非常复杂的一个系统，它会呈现出完全不同的性质和规律呢？从物理学的角度讲，主要有三个原因。首先，物质系统可能会通过相变形成不同的形态。比如水可以是气态、液态、固态（包括晶态和非晶态）。另外，大量粒子在一起会产生非常强的非线性效应，甚至混沌效应。给它一个非常小的扰动，会使系统变化到全新的状态（如蝴蝶效应）。在复杂的多粒子系统中，这种自组织的临界现象非常普遍。此外，量子粒子系统中的粒子之间还会发生量子纠缠：这些粒子之间非常强地关联在一起，任何一个粒子的一点点扰动或者变化，其他的粒子都会感受到。

当温度降低，大量粒子不断凝聚过程中会随着降温过程的不同得到不同结构的凝聚态物质（如图 25-1 所示）。为了研究复杂的凝聚态物质，一般我们可以根据粒子排列的有序化程度把凝聚态物质分为非晶和晶体。其中非晶是原子或分子强无序关联体。其最基本特征是微观结构长程无序而短程有序，具有复杂的动力学和热力学行为，是通过熵调控和玻璃转变形成的远离平衡态的亚稳态复杂物质。非晶在宏观上是兼具固体、液态性质的物质。非晶种类繁多，性质奇异且丰富。实际上，我们日常生活中有很多非晶，比如生物体中含有大量非晶有机物质，而非晶中的一种——玻璃和我们的生活密切相关。非晶在外形（如典型的玻

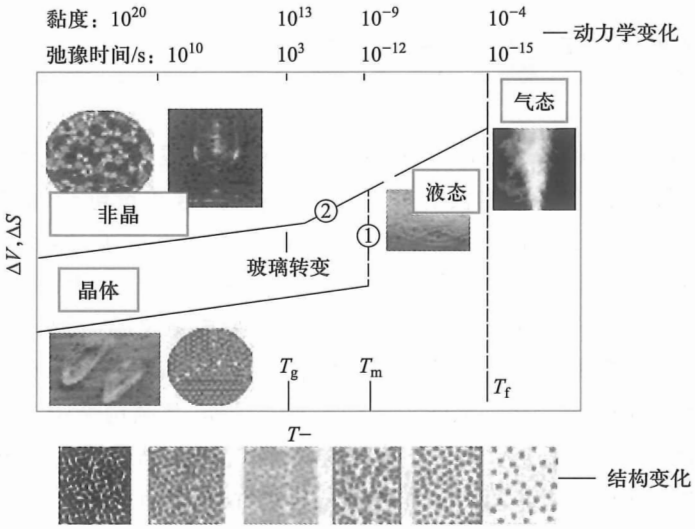


图 25-1 凝聚态物理的研究范畴，上图展示在不同的黏度、弛豫时间、温度、体积变化和熵变条件下凝聚态物质的物态。下图则展示在微观图像中，凝聚态物质的结构随温度的变化（见彩色插页）

NOTE

璃材料琥珀)上和晶体固体也有明显差别。

另外一类原子排列比较有序的凝聚态物质称为晶体,组成晶体的粒子按一定的规则周期性地有序排列,例如天然的岩盐、水晶、半导体锗和硅等。由于晶体中粒子排列比较规则,可以利用周期性边界条件把研究大量粒子的问题简化成研究几个或几十个粒子的问题,所以其研究相对比较成熟。

还有一类介于晶体和非晶之间的凝聚态物质——准晶。它是20世纪80年代由以色列科学家丹尼尔·谢赫特曼(Daniel Shechtman)在急骤冷却的合金中发现的一类凝聚态物质,其本人因发现准晶而独享了2011年诺贝尔化学奖。在准晶的原子排列中①,其结构是长程有序的,这一点和晶体相似;但是准晶不具备平移对称性,这一点又和晶体不同。一般情况下,晶体是凝聚态物质的最稳定状态,所以本章我们主要介绍晶体的一些基本性质。

25-2 晶体的结合类型

组成晶体的粒子之间存在相互作用力,它使粒子有序地排列形成晶体。使晶体中的粒子结合在一起的力通常称为化学键,按照键的类型的不同,晶体可分为四大类。

1. 离子键和离子晶体

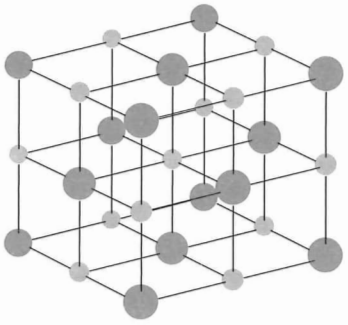


图25-2 离子晶体氯化钠的晶体结构(见彩色插页)

碱金属和碱土金属元素的原子只有一个或两个价电子,它们与原子核结合得比较松散,原子容易失去这些价电子而成为带正电的离子。相反,卤族元素的原子有七个价电子,容易从外部得到一个电子而形成带负电的离子。当正负离子靠得很近时,就依靠它们之间的静电力而结合在一起,形成稳定的结构。这种化学键称为离子键。通过离子键的作用而形成的晶体称为离子晶体。氯化钠(NaCl)晶体是典型的离子晶体,其结构见图25-2。离子晶体的特点是以离子作为基本单元,晶体的结合是靠正负离子之间的静电力。离子晶体由于没有自由电子,所以电导率比较

① 我国科学家郭可信在国内率先引入高分辨电子显微镜,从原子尺度直接观察晶体结构。他几乎与以色列科学家丹尼尔-谢赫特曼同时发现了准晶结构,即五重旋转对称和Ti-V-Ni二十面体准晶,之后又首先发现八重旋转对称准晶。1988年,他首先发现稳定的Al-Cu-Co十重旋转对称准晶及一维准晶;1997年至2000年,又获得准晶覆盖理论的实验证据。

低。由于正负离子之间的静电力很强，故离子晶体具有高熔点和低挥发性，而且一般比较硬。

2. 共价键和共价晶体

虽然离子键能够解释很多重要化合物的性质，但是许多无机化合物晶体或分子和绝大多数有机化合物分子不是以离子状态存在的。例如金刚石（C）、氮化硼（BN）和甲烷（CH_4）等。这种化合物或分子中的原子彼此接近时，它们的价电子多集中在两个核中间势能较低的区域，这时价电子为两个原子核共有，形成的键称为共价键或原子键。通过共价键结合的晶体称为共价晶体。共价键的强度很大，所以共价晶体的硬度大、熔点高，比如金刚石就是自然界最硬的材料，其结构见图 25-3。

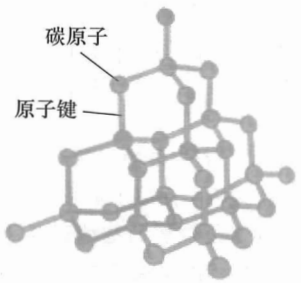


图 25-3 共价晶体金刚石的晶体结构（见彩色插页）

3. 金属键和金属晶体

组成金属的原子由于电离能较小而容易失去外层的价电子。原子失去价电子后，以正离子的形式排列在晶格的格点上[①]；脱离原子的电子成为能在整个晶体内运动的为全体正离子所共有的自由电子，这就是所谓的电子共有化。自由电子的总体称为电子气，电子气和正离子之间的相互作用力使离子结合在一起，这种结合力称为金属键。由金属键结合的晶体称为金属晶体，简称为金属。由于金属内的共有化电子可以在整个晶体内自由运动，所以金属具有良好的导电性和导热性。金属键的作用较强，因此金属一般具有较高的硬度和熔点。此外，由于金属键不像共价键那样具有方向性，正离子之间较易发生相对滑移，所以金属一般具有较好的延展性（图 25-4）。

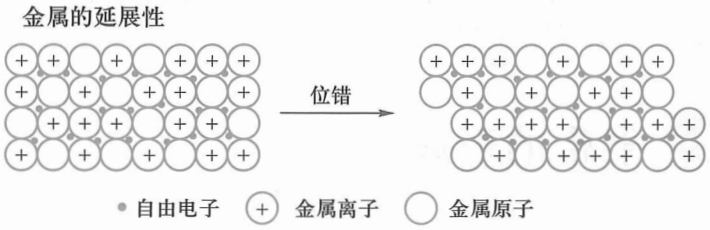


图 25-4 金属的延展性导致的位错

NOTE

① 晶体中的原子或分子在空间中作有规则的周期性排列，称为晶体的晶格。

4. 范德瓦耳斯键和分子晶体

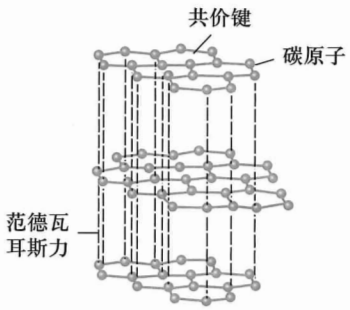


图 25-5 石墨烯的层状结构。层内共价键将层内原子耦合在一起，层间则通过较弱的范德瓦耳斯力维系石墨烯的层状结构

有一类晶体由外层电子已饱和的原子(如氦、氩、氖等惰性气体原子)或分子(如 O_2、CO_2 等)组成。在低温下，这些原子或分子可以结合成晶体，它们的原子或分子仍保持原有的电子结构，分子或原子之间靠范德瓦耳斯力结合，这种结合力称为范德瓦耳斯键。

范德瓦耳斯键比前面三种键弱得多，它不可能破坏分子内部的结合，形成的晶体保留了每个分子的特性，所以由范德瓦耳斯键结合的晶体称为分子晶体。有些晶体的结合力具有多样性，而不是单纯的一种键。例如，石墨和金刚石一样，都是由碳原子组成的，但它们有不同的结构。在石墨晶体中既有共价键，又有范德瓦耳斯键，见图 25-5，因此它是一种混合型晶体，而金刚石是共价晶体。

25-3 能带理论

NOTE

为了理解不同晶体的性质，人们一般把晶体中的共有化电子视为自由电子气，电子在晶格内自由运动，势能取为零，因而在求解薛定谔方程时完全忽略了晶格和电子以及电子与电子之间的相互作用。这一理论能定性半定量地解释金属的电导和热导性质，但它不能解释晶体的结合力，也不能解释为什么晶体可分为导体、半导体和绝缘体。

为了研究这些相互作用对电子能级的影响，可以利用周期性边界条件，考虑电子在晶体周期势场中运动，通过求解薛定谔方程来确定晶体的电子结构。由此人们提出了能带理论，为解释和预测晶体性质提供了一个很好的普遍适用的模型，下面对能带理论作简单介绍。

1. 能带的形成

为了理解能带的起源，我们来研究一种将原子连接成晶体的虚拟过程。设我们有某种晶体的 N 个原子，当各原子彼此处于孤立状态时，每个原子周围电子的能量是量子化的，它们具有完

全一致的能级(比如氢原子中的电子能级);每一原子中的各个电子对能级的占据是与其他原子无关的。随着各原子越来越靠近,原子之间(或者说不同原子的相应电子能级之间)将产生越来越强的相互作用,这将导致各能级位置的变化:全部 N 个原子都由原来都相同的单一能级变成 N 个彼此非常靠近但并不重合的能级①。由此可见,在形成晶体时,原来各孤立原子的每一个能级都因分裂为 N 个紧密排列在一起的能级而形成一个能带。对不同的能级来说,能带的宽度并不相同。一般来说,越靠外层的电子所占据的能级越容易和其他原子的外层电子所占据的能级发生作用,且相互作用也较强,而内层电子所占据的能级之间由于距离较远,所以相互接触的概率也较小,导致受扰动比较小。图 25-6 表示能级分裂与原子间距离 r 的函数关系。由图可见,内层电子由于基本上被束缚在原子核附近,在两核之间势垒很高,因此内层电子所占据的能级在晶体中发生的分裂很小,能带宽度较小。而价电子所占据的能级发生了显著的分裂,能带宽度较大。基态原子中未被电子占据的那些较高的能级也将形成相应的能带。

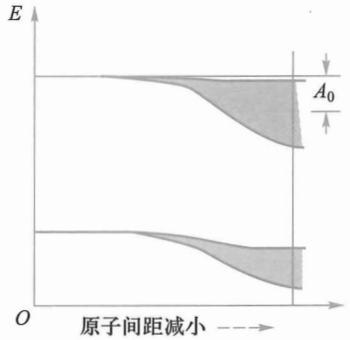


图 25-6 能带形成示意图,原本双原子体系的能级,随着原子的加入,原子的间距减小,能级数目增加为现有原子数目,最后形成能带

2. 能带的结构

能带的带状结构可以通过求解电子在周期性势场中运动时的薛定谔方程得到。这种场是由晶格产生的,其解是一个具有晶格周期性的函数,称为布洛赫(F.Bloch)函数。由于固体中周期性势场的作用,电子的能谱出现一系列不容许能级存在的禁带,它们把能量容许存在的区域分割成一系列能带(称为允带)。禁带和允带组成了能带结构,如图 25-7 所示。而从能量最小原理可知,在基态情况下,晶体中的电子先填充图 25-7 能带结构示意图中能量低的能级,然后再依次填充到高能级。晶体中如果一个能带中所有的能级都已被电子填满,就称之为满带,其中由价电子所在能级分裂成的能量最高的满带又称为价带。而部分被电子填充的能带称为导带。各能级均未被电子所占有的能带称为空带。

NOTE

① 由于泡利不相容原理,同一个能级最多只能容纳 2 个自旋相反的电子。

NOTE

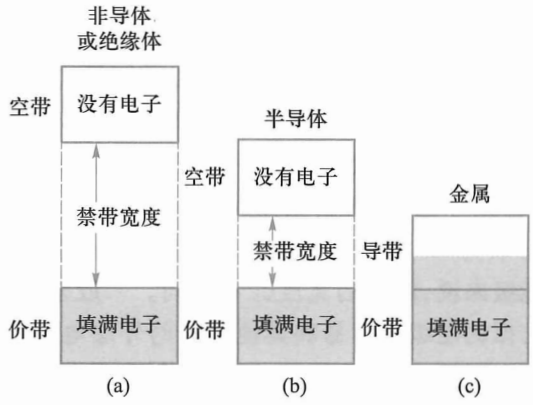


图 25-7 绝缘体(a)、半导体(b)和金属(c)的能带结构示意图。绝缘体中,导带和价带间形成巨大的能隙,仅有价带为满带,导带中没有电子,形成空带。半导体中,导带和价带间形成能隙,但带隙比绝缘体小。而金属中,导带和价带交叠,导带部分被填充,但未填满

3. 导体、绝缘体和半导体的能带模型

从能带理论的角度来讲,导体和绝缘体的区别主要在于价电子所填充的最高能级(称为费米能级)是在未填满的能带,还是在满带。如果费米能级处在一个能带中间,即拥有部分填充的能带,则是导体;如果费米能级恰好填满一个能带,即体系只有满带和空带,则是绝缘体。至于半导体,从能带结构上来看,和绝缘体大体相似,只是禁带比较窄。图 25-7 给出了导体、绝缘体和半导体的能带模型。下面将结合这些年最新的研究成果,分别对金属、半导体和绝缘体作具体介绍。

25-4 金属

一般而言金属包括简单金属、贵金属、过渡金属、稀土金属和半金属,它们的共同特点就是导带上有未填满的能级。而对于部分填充的能带,在没有外电场时,两个对称分布的状态以相同的概率对称地被电子填充,所以总电流等于零。在外电场的作用下,一个未填满的能带中,电子状态的分布不再是对称的。此时,

向电场反方向运动的电子比较多，总电流不为零。因此，在电场作用下，如果能带未填满，由于电子的运动，在固体中可以产生电流。

NOTE

1. 简单金属

价电子仅来源于 s 和 p 壳层的金属称为简单金属，如碱金属 Na、K、Cs 等，二价金属 Ca、Sr 和 Ba 等以及三价的 Al、In，它们都可以用近自由电子模型处理，其最外层电子都只是填充了相应能带的一半，因此导电性较好。

2. 贵金属

贵金属，诸如 Cu、Ag、Au 一类，与碱金属十分相似，均是只有 s 轨道上有一个价电子；但不同的是，贵金属的 s 轨道附近还有全满的 d 轨道。由于 s 轨道的存在，部分能带的计算仍可以使用近自由电子模型，但由于 d 轨道能带能接近费米能（零温自由电子气模型中电子所能达到的最高能量），它们仍然会影响贵金属的物理性质，如光吸收特性可使贵金属具有金属光泽。

3. 过渡金属

过渡金属是 d 轨道被部分填充的金属，由于 d 轨道未满，相比于全满时的 d 轨道能量更高。使得 d 轨道的能带能与费米面产生交叠，从而使得过渡金属的输运性质受到 s 和 d 轨道的电子共同影响。同时，由于 d 轨道带宽较窄，使其在费米能级处具有较高的态密度，而电子比热容正比于费米能级处的态密度，所以过渡金属也具有相对于简单金属更高的比热。

另一方面，由于 d 轨道对应能带的部分填充，过渡金属具有显著的磁性，如铁磁金属 Fe、Co、Ni 和反铁磁金属 Cr、Mn。以 Fe 为例，在显著低于居里温度时，费米能级处的 d 轨道能带分别由自旋取向向上的多数态电子和自旋取向向下的少数态电子组成，从而展现出净磁化强度。

4. 半金属(semi metal)

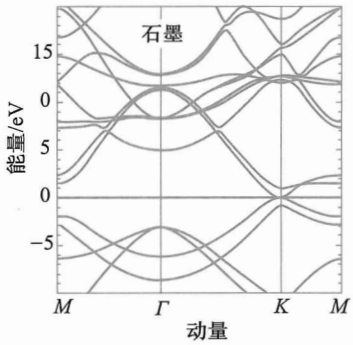


图 25-8 石墨的能带结构图。可以看到石墨烯是半金属(semi metal),仅在倒空间的高对称点 K 处出现了能带交叠

结构和石墨相似的 C、Bi、As、Sb 等均是半金属,半金属的能带特点是在能量空间上和普通金属一样,出现类似的能带部分填充,所以呈一定的金属性,但在动量空间,其部分填充的并不是同一个能带,而是几乎全满的价带和几乎全空的导带,且价带和导带在动量空间并不交叠,所以其载流子浓度相较于金属要小几个数量级,导电性也较差。

这里简单介绍一下石墨。石墨全部由 C 原子组成,是典型的层状材料,它每一层的结构是简单六角格子。C 原子的其中三个价电子与六角平面内周围的 C 原子的价电子波函数以 sp^2 杂化形成共价键。而剩余的一个价电子处于呈哑铃状的 $2p_z$ 态,其轴线沿着 c 方向垂直于平面。石墨主要靠 $2p_z$ 态电子云在层内的交叠导电,其能带结构呈半金属性,如图 25-8 所示。由于其价带和导带在动量空间也是交叠的,所以石墨在层内的导电性较好。但石墨的层间距较大,主要靠范德瓦耳斯力维持,因此层间导电性不如层内,这使得石墨的电导率有很强的各向异性。

5. 半金属(half metal)

NOTE

这里的半金属在英文上是 half metal,和上面介绍的半金属(semi metal)虽然在中文名称上一样,但本质上是两种截然不同的导体(图 25-9)。Half metal 导电性与电子的自旋属性有关,它

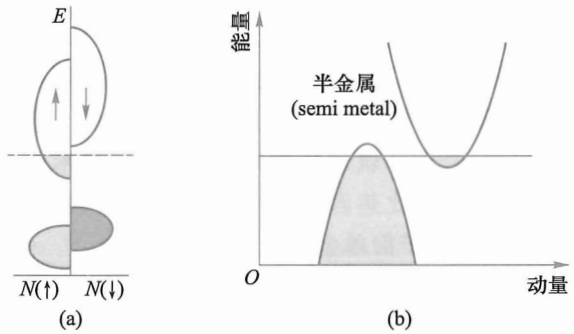


图 25-9 图(a)为 half metal 的态密度图,横坐标是自旋向上和向下的粒子数,左右箭头分别表示自旋向上和自旋向下,可以看到在 half metal 中自旋向上和自旋向下的能带发生了劈裂,仅有自旋向上粒子的导带被部分填充,而自旋向下粒子的导带是空带。图(b)为 semi metal 的能带示意图,阴影部分代表有电子的填充,这里可以看到价带存在空穴,而导带中则存在电子,因此 semi metal 具有一定导电性

的自旋向上和自旋向下的能带发生劈裂。其中自旋向上(向下)的能带与费米面发生交叠,而自旋向下(向上)的能带则在费米面处存在能隙,因此自旋向上(向下)的电子表现出金属的性质,而自旋向下(向上)的电子则表现为半导体或绝缘体中电子的性质,比如一种钙钛矿氧化物 $SrRuO_3$ 和一些霍斯勒(Heusler)合金就是典型的半金属。

25-5 绝缘体

1. 绝缘体导电性

NOTE

在基态情况下,绝缘体不存在部分填充的能带,其能带要么完全没有电子填充,成为空带;要么完全被电子填满,成为满带(见图 25-3)。在满带中,尽管每个电子在运动时都带有电流,但是在没有电场时,电子占据某个状态的概率只同该状态的能量有关。由量子力学可知,电子的状态是对称分布的,两个对称分布的状态的电子具有相同的能量,因此被占据的概率相同,它们运动的速度大小相等,方向相反。因此,这两个对称分布的状态的电子电流互相抵消,总电流为零。

有外电场时,在能带中所有的电子都以相同的速度向与电场相反的方向移动。但是,由于电子状态的分布是均匀的,电子的运动并不改变电子的分布情况。从一个能级状态上移出去的电子实际上同时从对称分布的同一能级状态的电子移进来,从而使整个能带始终处于均匀填满的状态。因此,即使在有外电场时,满带的电子也不参与导电。

这个满带与它上面最低的空带间的禁带宽度较宽,为 5~10 eV。由于满带电子是不导电的,若要使其导电,就必须增大满带中电子的能量,使其进入能量更高的空带,也就是说必须给它一份不低于禁带宽度的能量,而外电场不能给予电子这样大的能量(除非电场强度大到使晶体发生击穿)。因此,这种固体为绝缘体,比如氧化铝、氮化硼、金刚石等。



拓扑绝缘体

2. 拓扑绝缘体

近年来，人们发现了一种新型绝缘体——拓扑绝缘体，它其实是一种不同于前面所提到的绝缘体的新型物态。它最直观的性质就是其内部为绝缘体，而表面允许导电（图 25-10）。在拓扑绝缘体的内部，电子能带结构和常规的绝缘体相似，其费米能级位于导带和价带之间。而在拓扑绝缘体的表面存在一些特殊的量子态，这些量子态位于拓扑绝缘体能带结构的带隙之中，从而允许其导电。这就像是一个绝缘的瓷器碗，镀了金之后，便具有了表面的导电性。不过这是两种本质上完全不同的表面导电。镀金碗表面的导电性，对瓷器来说是外加的，将随着镀层的损坏而消失。而拓扑绝缘体的表面导电是源自绝缘体的内禀量子性质，杂质和缺陷都不会影响它。这些量子态可以用类似数学中的拓扑理论来描述，是一种拓扑有序态，所以称这种绝缘体为拓扑绝缘体。

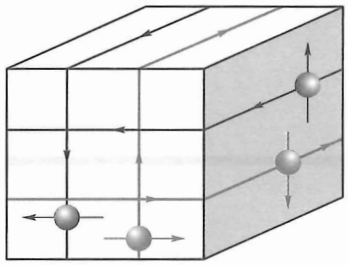


图 25-10 拓扑绝缘体表面电流示意图（见彩色插页）

NOTE

拓扑绝缘体在电子器件方面很有应用前景。比如，拓扑绝缘体中电子运动是受对称性保护的，好似为电子运动设置了专门的通道，使其几乎不会受到阻碍，其运动行为可以像光子一样获得很高的电导率，从而可以制备性能更优异的量子器件。

事实上，不仅绝缘体中有这种拓扑序导致的新奇物态，金属，甚至超导体中也存在这种拓扑有序态。这种有序态必须由波函数在整个动量空间的全局拓扑序参量（拓扑不变量）来描述。波函数宏观拓扑有序态的研究导致了一系列新型量子材料的发现，如拓扑绝缘体、拓扑半金属、拓扑超导体等。此外，根据拓扑性质对材料进行划分的新分类方法，拓扑量子材料的研究成为当前全球科学研究的热点和新兴领域。近年来的一大理论预言便是在拓扑超导体中可以获得马约拉纳费米子，而进一步通过将其和旋转对称性破缺的磁性薄膜的结合，更可以对马约拉纳费米子进行操纵，从而实现自容错的拓扑量子计算。



马约拉纳费米子

25-6 半导体

从能带上看，半导体的能带占据情况和绝缘体类似，只有满带和空带，只不过满带和空带之间的禁带宽度一般比绝缘体小，为 0.5~2 eV。由于半导体的禁带宽度较小，所以一部分电子能

NOTE

够通过热激发(光激发也是可行的)从满带跃迁到上面的空带,结果空带上的一些低能级被电子占据,空带成为部分占据的导带。这些电子所起的作用与金属中价电子所起的作用相似,可参与导电。另外,由于满带中一部分电子受激发进入空带而留下了一些空能级,称为电子空穴,简称空穴,使得原来的满带也变成了部分占据的能带。在外电场作用下,满带中一个靠近空穴的电子便进入空穴,从而产生一个新的空穴,然后这个新的空穴又被靠近的电子填充。如此继续下去,可见空穴的运动方向与电子的运动方向相反,好像是一个带正电荷的载流子,显然,空穴对导电也有贡献,这种导电称为空穴导电。因此,在外电场作用下,半导体导带中的受激电子和满带中的空穴都有导电作用,即两个能带对导电都有贡献。必须指出,空穴和空穴导电的概念只有在被填满的满带中才有意义。也许有人会问,空穴运动不是由电子运动引起的吗?为什么还叫空穴导电?我们知道,满带中的电子是不参与导电的,只有当满带顶部少数电子受激跃迁到上面的空带而留下空穴时,在外电场作用下,才发生导电。为了简化问题,可以把这时的满带视为填充了少量空穴的导带,导电问题就等效成少量空穴的定向移动,因此电流就可以视为由满带中空穴导电引起的。可见,空穴的运动并不是某一实在的带正电粒子的移动,其所反映的是半导体中整个多电子系统的运动性质。

半导体的一个主要特征是电导率随温度的升高而按指数规律增大,这一点也可以用能带理论解释。当半导体温度升高时,由于受热激发的电子数目随温度呈指数上升关系,因此有更多的受激电子跃迁到空带上,导致空带上的电子和满带中的空穴大量增加,因此电导率随温度迅速增加。

半导体分为本征半导体和杂质半导体两类。纯净的半导体属于本征半导体,杂质半导体的导电性质取决于掺入的杂质。

(1) 本征半导体的导电性

本征半导体的导电性是由满价带顶部的电子受热激发进入空带(导带)而产生的。在这种情况下,空带中因出现电子而成为导带,与此同时,满价带顶部将出现同样数量的空穴。在外电场作用下,导带中的电子和满价带中的空穴都参与导电,并称为载流子,这种导电性称为本征导电性。一般地,只有高纯度的半导体在足够高的温度下才具有本征导电性。在半导体中,热激发电子与空穴相遇时,将返回价带而形成复合。因此,在本征半导体中将同时发生两种过程:热激发电子和空穴的成对产生,以及电子和空穴的成对消失(复合)。第一种过程

NOTE

的产生率随温度按指数规律迅速增大，即产生率与 $\exp(-\Delta E_g/kT)$ 成正比，其中 ΔE_g 是导带和价带间的禁带宽度（又称带隙），T 是温度，k 是常量；第二种过程的复合率与热激发电子数 N^- 成正比，也与空穴数 N^+ 成正比。当达到平衡时，产生率与复合率应相等，故

$$(N^-N^+) \propto \exp(-\Delta E_g/kT)$$

对于本征半导体来说，热激发电子数和生成的空穴数相等，故

$$N^- = N^+ \propto \exp(-\Delta E_g/2kT)$$

由于热激发电子和空穴都是载流子，而电导率正比于载流子的数量，所以本征半导体的电导率也就应按如下规律随温度而迅速增大：

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-\Delta E_g/2kT)$$

式中 ΔE_g 是禁带宽度，σ_0 可近似视为一个常量。

（2）杂质半导体的导电性

如果在纯净半导体内掺入少量其他元素的原子，使其电子和空穴之间的平衡被打破，其导电性能将有很大的改变。所掺进的原子称为杂质，掺有杂质的半导体称为杂质半导体，其导电性称为杂质导电性。杂质半导体可分为两类：一类以电子导电为主，称为 n 型半导体；另一类以空穴导电为主，称为 p 型半导体。

先介绍 n 型半导体的导电性。

如图 25-11（a）所示，在四价元素硅（Si）的半导体中掺入少量的五价元素锑（Sb）等杂质，可构成 n 型半导体。

四价的硅原子有四个价电子，掺进杂质原子后，硅晶格上的一些硅原子被锑原子所替代。由于锑原子有五个价电子，其中四个价电子与相邻的硅原子形成共价键，第五个价电子就显得多余了，结果杂质原子实际上成为锑离子，这个多余的电子受到锑离子的束缚，因此环绕锑离子运动。理论计算表明，这个多余电子的能级在禁带中，并靠近导带底部的边缘能级，这种能级称为杂质局域能级。图 25-11（b）中靠近导带的细短线表示杂质的多余价电子在禁带中形成杂质局域能级。杂质的多余价电子在杂质局域能级中并不参与导电，但由于很靠近导带，受热激发时，很容易脱离锑离子的束缚而跃迁到导带中去，成为在晶体中游荡的自由电子，因此这些局域能级又称为施主能级，提供自由电子的那些杂质称为施主杂质。实验结果表明，施主能级和导带底部之间的能量差值 ΔE_d（称为杂质电离能）的一般仅为 10^{-2} eV。因此，这种半导体中虽然杂质原子的数目不多，但在常温下导带中自由电子的浓度比同一温度下本征半导体导带中自由电子的浓度大

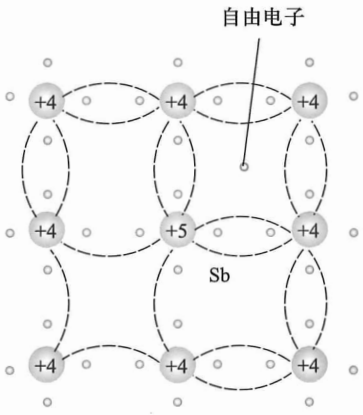


图 25-11 （a）半导体硅中掺入 Sb，产生多余的自由电子，从而得到 n 型半导体。（b）n 型半导体的能带示意图，虚线为掺杂原子的局域能级，可以看到掺杂原子的能级与导带很近，电子很容易受热激发到导带上

得多，从而提高了半导体的导电性能。由于参与导电的载流子是电子，因此我们称这种半导体为电子型半导体。由于电子带负电，又称 n 型半导体。

接下来介绍 p 型半导体的导电性。如图 25-12(a)所示，如果在四价元素硅(Si)的半导体中掺入少量三价元素硼(B)等杂质，则可构成 p 型半导体。

三价的硼原子在替代硅晶格中一个四价的硅原子时，能和邻近的硅原子形成三个共价键。要形成四个共价键还缺少一个电子，因此在硼原子邻近区域产生一个未配对的空键，这是一个能够捕获一个电子的地方。在热激发下，邻近的硅原子的共价键中的一个电子容易被捕获到这个位置形成第四个共价键，这时杂质原子变成硼离子(B^-)，在被移去一个电子的硅原子上产生一个空穴。这个空穴相当于正电荷$+e$，它受到硼离子B^-的束缚，环绕其运动。计算表明，这个空穴相应于晶体禁带中靠近满带顶部空着的杂质局域能级，满带顶部与杂质局域能级的能量差值(杂质电离能)ΔE_a约为 0.01eV。因此，在温度不太高的情况下，满价带中的电子很容易被激发到杂质局域能级上，同时在满带中形成空穴，如图 25-12(b)所示。由于这些杂质局域能级能接受从满价带跃迁来的电子，所以又称为受主能级，而硼这类三价杂质称为受主杂质。满价带顶部的电子由于受热激发跃迁到受主能级，而留下一些空穴，于是在外电场作用下，满价带中靠近空穴的电子便进入空穴，同时形成一个新的空穴。因此，满价带中空穴可认为是在电场作用下在硅晶体中作定向运动，参与导电。这种半导体中的空穴浓度比本征半导体的空穴浓度大得多，从而增强了半导体的导电性。由于参与导电的载流子是空穴，所以称这种半导体为空穴型半导体。由于空穴带正电，我们又称 p 型半导体。

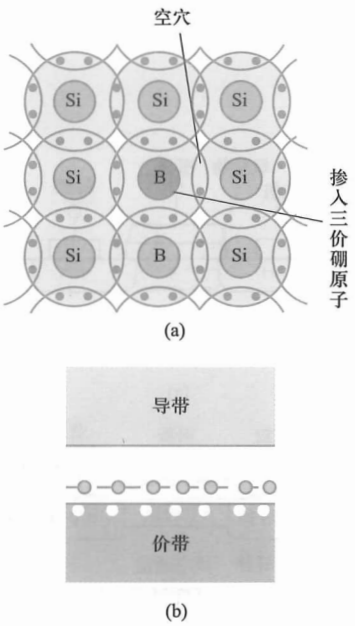


图 25-12 (a)半导体硅中掺入硼，产生多余的空穴，从而得到 p 型半导体。(b)p 型半导体的能带示意图，虚线为掺杂原子的局域能级，可以看到掺杂原子的能级与价带很近，价带中的电子很容易受热激发到硼原子的局域能级上，从而在价带形成空穴

由以上分析可见，在含有杂质的半导体中，若杂质原子的价电子数比晶体本身原子的价数大 1，则只存在一种类型的载流子——电子，相应的半导体称为 n 型半导体；若杂质原子的价电子数比晶体原子的价数小 1，则将产生另一种类型的载流子——空穴，相应的半导体称为 p 型半导体。

n 型半导体的电子型导电性质和 p 型半导体的空穴型导电性质，已经在研究霍尔效应时被实验证实。根据测量到的霍尔电势差的符号，就可以确定载流子是电子还是空穴。

(3) 半导体器件

p 型和 n 型半导体的主要用途在于可以用来制备半导体器件，事实上电子工业上常用的晶体管，如二极管、三极管等和集成

NOTE

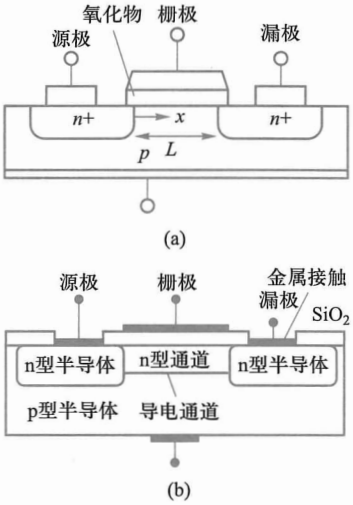
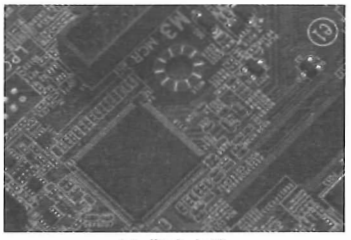
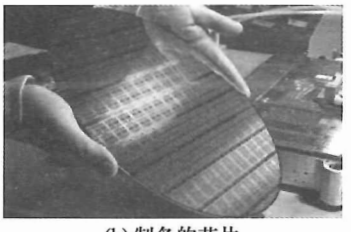


图 25-13 增强型场效应晶体管(a)和耗尽型场效应晶体管(b)示意图



(a) 集成电路



(b) 制备的芯片

图 25-14 半导体器件的应用(见彩色插页)

电路的基本逻辑单元——场效应晶体管等都是基于 p 型和 n 型半导体制成的。其本质都是可以通过一个电流或电压控制另一个电流或电压的器件。下面我们以场效应晶体管为例来说明如何利用 p 型和 n 型半导体来实现逻辑功能。

场效应晶体管(field-effect transistor,FET)是一种通过电场效应控制电流的电子元件。其结构如图 25-13 所示,可以分为栅极(gate)、漏极(drain)、源极(source)三个端。对于增强型场效应晶体管,当源极和漏极是 n 型半导体时,它们之间的区域就由 p 型半导体构成。由于源极和漏极中导电的载流子主要是电子,而它们之间的区域载流子主要是空穴,所以就算在源极和漏极之间加上电压也不会产生净的电流;这时如果在栅极加上电压,使得 p 型半导体区域中的空穴远离栅极,导致靠近栅极的很窄的沟道内多数载流子从空穴变成电子,就可以在源极和漏极间产生由电子构成的导电通道,获得电流。相反,当源极和漏极是 p 型半导体时,它们之间的区域就由 n 型半导体构成。由于源极和漏极中导电的载流子主要是空穴,而它们之间的区域主要是电子,所以就算在源极和漏极之间加上电压也不会产生净的电流;这时如果在栅极加上电压,使得 n 型半导体区域中的电子远离栅极,导致靠近栅极的很窄的沟道内多数载流子从电子变成空穴,就可以在源极和漏极间产生由空穴构成的导电通道,获得电流。还有一种常用的晶体管称为耗尽型场效应晶体管,其结构如图 25-13(b)所示。由于在靠近栅极区域的半导体导电类型和源极、漏极相同,所以不加栅极电场时源极和漏极间就是导通的,通过栅极电场可以使得靠近栅极的沟道区域的导电类型发生改变,进而关断源极和漏极间的电流。所以两种场效应晶体管的工作原理是类似的,只不过前者是通过施加栅极电压使得源极和漏极发生导通,而后者是通过栅极电压关断源极和漏极间的电流。

因此,通过栅极就可以控制源极和漏极,使其之间导通或不导通,分别对应逻辑上的 0 和 1。无数个这样的场效应晶体管就构成了大规模集成电路,可以实现各种各样的逻辑功能。现在世界最先进的集成电路[图 25-14(a)]制备工艺可以使得每个场效应晶体管的尺寸只有几纳米,在指甲盖大小的芯片[图 25-14(b)]上可以集成上百亿甚至上千亿个晶体管,而我

国正在大力发展这一领域，有很多制备工艺问题亟待解决[①]。

25-7 电子关联效应

NOTE

能带理论非常成功，可以解释并预测大量晶体的很多性质，但由于其忽略了电子和电子之间的关联效应，所以对于电子之间具有强相互作用的体系无能为力，对其很多性质也无法很好地解释，下面将对这类体系进行简单介绍。

1. 莫特绝缘体

早在 1937 年，就有人指出很多被能带理论预测为导体（因为在每单位晶格有奇数个电子，就像碱金属一样）的过渡金属氧化物实际上是绝缘体，后被称为莫特绝缘体。而能带理论在这里失效的原因是没有考虑莫特绝缘体中电子和电子之间的关联效应。

在最基本的能带理论中，电子之间的静电排斥相互作用被忽略了，不会出现在哈密顿算符里，即不影响能量。故各个电子被看成是独立的，不会相互影响（唯一的影响来自泡利不相容原理）。然而，在许多物质中，特别是窄能带的晶体中，电子间的关联效应十分重要，以过渡金属氧化物和镧系氧化物最典型，比如前者中，d 轨道上的电子相互靠近，静电能的增加将不能忽略。由于电子导电需要电子从一个原子跳到另一个原子，因此原本晶体中的原子变为阴阳离子，此时阴离子同一格点同一轨道被两个电子同时占据，电子和电子之间存在巨大的库仑斥力，因此被同时占据时就需要克服这一斥力，当运动电子没有克服这一斥力所需要的能量时，就不会发生导电现象，相应的电子就只能待在各自原子所形成的势阱中不发生运动（如图 25-15 所示），就变成了绝缘体。这时，由于每个原子格点上有奇数个电子，就产生了局域磁矩，其实很多物质宏观铁磁性和反铁磁性就是由于这种相

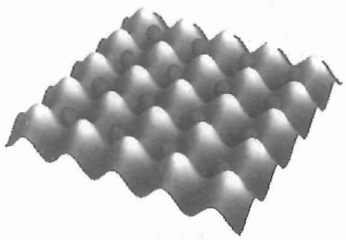


图 25-15 莫特绝缘体示意图，势垒如同蛋托，将像鸡蛋一样的电子束缚在框中（见彩色插页）

① 2022 年，美国通过了所谓的“芯片法案”来遏制中国半导体产业的发展，这不仅破坏了以国际法为基础的国际秩序，还有悖全球科技合作大势。这无法恢复美国在芯片领域的垄断地位，还会给芯片企业、芯片产业和全球科技合作发展带来重大危害。随着中国深入实施创新驱动发展战略，高水平科技自立自强也会加快实现。未来，伴随越来越多的科技企业和科研人才投入芯片关键核心技术的基础研究和应用创新，中国必将在高端芯片制造领域取得重大突破。

邻局域磁矩间的平行和反平行耦合排列所导致的。

2. 超导性

一些金属和合金在温度低于某一临界值时，电阻突然趋于零，我们说物质进入了超导状态。物质的这种电阻变为零的性质称为超导电性，具有超导电性的材料称为超导体。电阻发生这一转变时的温度称为临界温度，以 T_c 表示。例如对于钨，$T_c=0.01$ K；对于铅，$T_c=7.2$ K；对于铌三锡合金，$T_c=18.1$ K 等。

（1）超导体的特性

1908 年，荷兰物理学家昂内斯成功地制备了液氦，三年后，他在实验中发现水银的电阻在 $T=4.2$ K 时突然下降到无法检测的程度，即样品电阻降到 10^{-5} Ω 以下。图 25-16 是当时水银样品的实验结果，它标志着超导电性的发现。昂内斯把载有电流的超导环从莱顿运到剑桥，展示了这一现象，并在长达一年的时间里未观察到超导环里电流的衰减。昂内斯因此于 1913 年获得诺贝尔物理学奖。

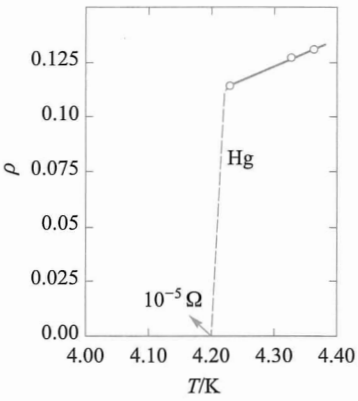


图 25-16 水银的电阻与温度关系

之后，柯林斯为检验处于超导状态的超导体的电阻是否确实为零，在长达两年半之久的观察中得出了与昂内斯相同的结论。

超导体除了在超导状态时具有电阻为零的特点之外，另一个特点是它是一个完全抗磁体，即在超导状态时，磁场不能贯穿至超导体内部，这一现象称为迈斯纳效应。它是 1933 年，迈斯纳和奥克森费尔德在一项实验中发现的。把一个超导体样品放到磁场中加以冷却，则在过渡到超导状态后，磁场将完全被排斥在样品之外，如图 25-17 所示，因而样品中的磁感应强度变为零。

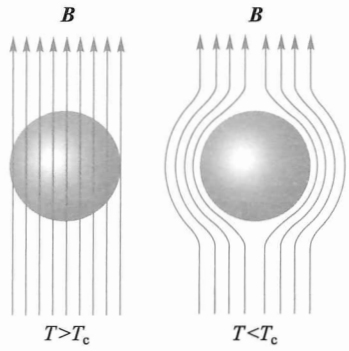


图 25-17 迈斯纳效应

把处于临界温度以下的超导体放到外磁场中，可发现外磁场增加到某一临界值时，超导体会出现电阻，即恢复到正常态。破坏超导电性的磁场的临界值称为临界磁场，用 H_c 表示。

临界磁场 H_c 的值与样品的温度有关。对于给定的材料，当温度从 $T=0$ K 升高到 T_c 时，临界磁场 H_c 从最大值逐渐降到零。对于水银，这一依赖关系的大致图像如图 25-18 所示。

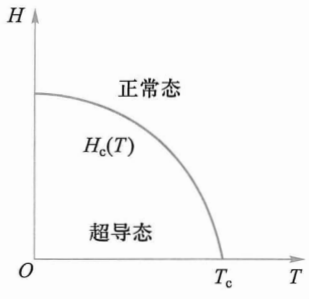


图 25-18 水银超导体临界磁场和温度的关系

如果把处于临界温度 T_c 以下的超导体接入电路，并增大通过超导体的电流，可发现电流在增大到某一临界值 I_c 时，超导状态将被破坏，恢复到正常态。电流的这一临界值称为临界电流，以 I_c 表示，它与温度有关。这一依赖关系的图像和图 25-18 中

的 H_c 与 T 的关系相似。

NOTE

(2) BCS 理论

在超导电性中,量子力学效应不再是微观尺度的,而是一种宏观尺度的量子现象。关于超导电性的微观理论,比较成功的是在 1957 年由巴丁、库珀和施里弗提出来的电子和声子相互作用理论。这一理论简称为 BCS 理论。按照这一理论,在低温条件下,金属中的电子除受到库仑斥力外,还受到一种特别形式的相互引力。电子的这种相互引力是这样形成的:电子与晶格的相互作用,使晶格受到扰动,而这种扰动又会影响并吸引另一个电子,这相当于以晶格扰动为媒介使两个带负电的电子之间产生吸引作用,当两个电子之间的相互引力大于库仑斥力时,两个电子就结合成电子对,称为库珀对。库珀对中的两个电子的动量大小相等、方向相反,而且它们的自旋方向彼此相反,所以库珀对的自旋为零。库珀对的协调运动就形成了超导电流。

我们不应当把库珀对看成是两个黏在一起的电子。相反,它们之间的距离非常大,约为 10^{-4} cm,即比晶体中两个相邻原子之间的距离大四个数量级。

库珀对由于总自旋为零而聚集于基态,并导致金属能级的重新排列,使处于超导态的电子系统的激发态与基态之间隔开一个宽度为库珀对结合能 $E_{结}$ 的能隙,所以库珀对的电子很难从基态跃迁到激发态,并久久地停留在基态中。在其运动速度很小时(低温条件下相当于电流小于 I_c),库珀对将不受激发,这就意味着运动是无摩擦的,亦即电阻为零。

能隙宽度 $E_{结}$ 随温度的升高而减小,并在临界温度 T_c 以上时变为零,这时所有的库珀对将受到破坏,因而金属将从超导态过渡为正常态。由超导理论可知,一个通以电流的超导环的磁通是量子化的:

$$\Phi = n\Phi_0$$

上式中,$\Phi_0 = h/(2e)$ 是磁通量子,磁通量子中的 $2e$ 是载流子的电荷量(超导体中的载流子是库珀对,因此是 $2e$)。对于传统超导体,所有的实验测量都可以用这一理论解释和预测。巴丁、库珀、施里弗因此于 1972 年获得诺贝尔物理学奖。BCS 理论是很复杂的,要深入探讨需要用到高等量子力学知识,有兴趣的读者可阅读有关超导电性的专业书籍。

需要指出的是,根据 BCS 理论,超导的临界温度 T_c 一般不会超过 40 K,但 1987 年,华人物理学家吴茂昆和朱经武在钇钡铜氧系材料上把临界超导温度提高到 90 K 以上。这是史上第一次超

NOTE

越液态氮沸点“温度壁垒”(77 K)而将超导温度从 30 K 提升到 90 K(-183 ℃)以上的研究,突破了自 1911 年后七十多年的物理学研究瓶颈,为高温超导体下了定义,即临界温度高于 77 K 的材料,不但于当年获瞩目,也对之后超导体的科学与商业应用产生了巨大影响。1987 年底,人们又在铊钡钙铜氧系材料中把临界超导温度的记录提高到 125 K。1986—1987 年的短短一年多的时间里,临界超导温度提高了近 100 K,这一过程中很多中国科学家作出了重要贡献。① 时至今日,高温超导的机理还处在研究阶段,一般认为其库珀对的形成机制不能单纯由 BCS 理论的晶格扰动解释,而需要考虑电子之间的各种不同形式的强关联效应(如自旋涨落等)。

本章摘要

1. 凝聚态物质

凝聚态物质的丰富性质由多粒子效应和对称性破缺共同主导。

2. 固体的分类

晶体、非晶。

晶体按结合方式可分为四类:

离子晶体——通过离子键的作用形成。

共价晶体——通过共价键的作用形成。

金属晶体——通过金属键结合而成。

分子晶体——通过范德瓦耳斯键结合而成。

3. 固体的能带理论

晶体中的价电子共有化,使原子中的电子能级分裂形成一系列和原来能级很接近的新能级,从而连成一片,形成能带。

能带理论能成功地解释为什么有的固体是导体,有的是绝缘体,而有的则是半导体。

4. 金属

简单金属、贵金属、过渡金属、半金属。

① 1987 年 3 月 18 日,正在纽约举行的美国物理学会年会临时增加了“高临界温度超导体专门会议”。会议报告从 19:30 开始,一直进行到第二天凌晨 3:15,持续了 7 小时 45 分钟。中国科学家赵忠贤是当晚报告人中最耀眼的科学家之一,他做了长达 20 分钟的报告,并在国际上首次公布液氮温区超导体的元素组成:钇、钡、铜、氧。这也标志着中国的高温超导研究跻身世界前列。

NOTE

5. 半导体的导电机理

半导体可分为两类：

(1) 本征半导体——载流子是电子和空穴。

(2) 杂质半导体，它又可分为两类：①n 型半导体——载流子以电子为主；②p 型半导体——载流子以空穴为主。

半导体元件和器件：增强型场效应晶体管、耗尽型场效应晶体管。

6. 绝缘体

绝缘体不导电的原因、拓扑绝缘体性质。

7. 关联效应

莫特绝缘体：用能带理论解释为金属，实际为绝缘体。

超导电性：一些金属和合金在温度低于某一临界值时电阻突然趋于零的现象。

超导体的基本特性：零电阻。

迈斯纳效应：导体是完全的抗磁体。

临界磁场和临界电流。

超导电性的 BCS 理论——电子和声子的相互作用理论。载流子是库珀对。

思考题

25-1 试分析固体与孤立原子中的电子在能量特性上的不同。

25-2 什么是能带、禁带、导带和价带？

25-3 试用能带理论说明导体、绝缘体与半导体导电性能的差别。

25-4 当温度足够低时，硅由半导体变成绝缘体；而温度足够高时，硅又从半导体变成导体。试分析上述现象。

25-5 本征半导体与杂质半导体在导电性能上有什么区别？

25-6 硅晶体掺入磷原子后变成什么类型的半导体？这种半导体是电子多了，还是空穴多了？这种半导体是带正电、带负电，还是不带电？

25-7 如果某一半导体中掺有相同数量的施主和受主杂质，它们的导电性会互相抵消吗？为什么？

25-8 场效应晶体管的基本结构是什么？它是如何实现对电流的控制的？

25-9 半导体有哪些主要特性和应用？

25-10 超导体有哪些基本性质？

习题

25-1 试确定下列掺杂半导体是 p 型还是 n 型。

(1)硅中掺入锑(五价);

(2)锗中掺入铟(三价);

(3)锗中掺入铝(三价);

(4)硅中掺入砷(五价)。

25-2 硅和金刚石的能带结构很相似,只是禁带宽度不同。已知金刚石的禁带宽度为 5.33 eV,硅的禁带宽度为 1.14 eV,试分别计算它们能吸收辐射的最大波长。

25-3 从能带角度出发,画出 half-metal 和 semi-metal 的特征能带或态密度

25-4 KCI 晶体在已填满的价带上方有一个 7.6 eV 的禁带。对波长为 140 nm 的光来说,此晶体是透明还是不透明?(提示:光不被晶体吸收即透明,光能被晶体吸收即不透明)

25-5 光敏元件 CdS 和 PbS 的禁带宽度分别是 2.43 eV 和 0.3 eV,试分别计算它们光致导电的波长极限,并由此说明为什么 CdS 可用在可见光到 X 射线的短波方面,而 PbS 却可有效地用在红外方面?

25-6 对于增强型场效应晶体管,如果源极和漏极是 p 型半导体,他们之间应是什么半导体?如果源极和漏极是 n 型半导体,他们之间应是什么半导体?

25-7 纯硅晶体中硅的密度为 $2.33\times10^{3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$,自由电子数密度约为 10^{16} 个 $\cdot\ \mathrm{m^{-3}}$,如果用掺磷的方法使其自由电子数密度增大 10^{6} 倍,试求:(1)多大比例的硅原子应被磷原子取代?(2)1.0 g 硅按上述比例掺磷需要多少磷?

25-8 拓扑绝缘体的表面或拓扑绝缘体和普通绝缘体的界面是否有导电电子?其电阻是多少?



习题解答

第二十六章　核物理和粒子物理简介

核物理主要研究原子核的性质和行为，研究内容包括研究核力（即强相互作用力，它在原子核内部使质子和中子结合在一起）、核结构（例如各种原子核的形状和尺寸）、核反应（如原子核的合并和分裂）以及放射性衰变等。此外，核物理还研究相关实际应用，例如在军事（核武器和放射性示踪器）、能源生产（核能）、医疗（放射性药物和放射治疗）和其他领域中应用核反应和放射性。原子核物理学与量子力学有密切的联系，因为它涉及原子尺度的粒子和相互作用。



本章补充资源

NOTE

粒子物理专门研究更基本、更微小的粒子和力，这些粒子和力构成了宇宙的基本结构，例如夸克、轻子（如电子和中微子）以及各种玻色子（如光子和希格斯玻色子等）。粒子物理学家还研究这些粒子之间的相互作用和力，以及这些力如何在高能环境下（如大型强子对撞机）产生新的粒子。粒子物理是物理学中最基础的领域之一，因为它探讨的是物质和宇宙的最基本成分和力。

本章简要介绍这两部分内容的基础知识。

26-1　原子核的组成和特征

1. 原子核的组成

原子核是原子的核心部分，它位于原子中心，占据原子体积的极小部分，但包含了几乎所有的原子质量。最简单的原子是氢原子，它的核由一个称为质子的粒子组成。所有其余原子的核都由两种类型的粒子——质子和中子组成。这些粒子统称为核子。

（1）质子

质子是由英国物理学家卢瑟福在 1917 年发现的。他在进行

NOTE

放射性研究时，观察到了一种带正电的粒子，这就是我们今天所说的质子。质子的数量决定了原子的化学性质，因为它决定了原子的电子数，而电子云结构决定了元素的化学性质。质子的数量也定义了元素的原子序数。质子的质量为 1.007 276 u，其中 u 是原子质量单位，1 u = 1.660 539×10^{-27} kg。质子的质量是电子的 1 836 倍。

质子是一个具有自旋的粒子，其自旋量子数为 1/2。质子的固有磁矩是由于质子的电荷和自旋引起的，在磁场中，质子的固有磁矩会导致质子的能量状态发生改变，这是核磁共振（NMR）和磁共振成像（MRI）这类技术的基础。质子的固有磁矩用核磁子（nuclear magneton）表示，约为 2.79 倍的核磁子，核磁子是在原子核磁矩测量中经常使用的自然单位。由于玻尔磁子是基于电子质量和电荷量的，而核磁子是基于质子质量和电荷量的，因而 1 玻尔磁子约等于 1 836 倍的核磁子，质子的子的固有磁矩约为电子磁矩的 1/660。

（2）中子

中子是由英国物理学家查德威克在 1932 年发现的。查德威克的发现改变了科学界对原子核结构的理解，他也因此在 1935 年获得了诺贝尔物理学奖。

中子是原子核中没有电荷的粒子（即它是电中性的）。虽然中子对元素的化学性质没有直接影响，但它们的存在确实影响了原子的物理性质，比如原子质量和稳定性。中子和质子的总数定义了元素的质量数。

中子的质量约等于质子质量的 1.001 4 倍，两者的质量非常接近。中子的自旋等于 1/2，其固有磁矩约等于 -1.91 倍的核磁子。尽管中子是中性粒子，但它仍然有磁矩，且负号代表中子磁矩的方向与其自旋方向相反。这是因为中子内部由带电的夸克构成（两个下夸克和一个上夸克），这些夸克的运动和自旋产生了磁矩。

2. 原子核的特征量

原子核最重要的特征量是原子序数（通常用符号 Z 表示），等于核中所含的质子数目并决定其电荷，此电荷为 $+Ze$（其中 e 是电子电荷量的绝对值）。原子序数 Z 决定了化学元素在门捷列夫元素周期表中的排列序号。原子核中质子和中子的总数目用字母 A 表示，并称为核的质量数。核内的中子数 $N=A-Z$。我们

采用符号${}_{Z}^{A}\mathrm{X}$来标记核，其中X是元素的化学符号，左上角A为质量数，左下角Z为原子序数。通常，把具有相同原子序数Z和中子数N的一类原子称为核素，Z相同而A不同的一类原子称为同位素，大多数化学元素都有好几种稳定的同位素。

NOTE

3. 原子核的大小和密度

实验表明，一部分原子核的形状接近于球形，其余核的形状为椭球形，不过它们相对于球形的变化是较小的。因此，我们可以用原子核半径来近似地表示原子核的大小。实验确定的原子核的半径可用以下公式表示：

$$R=r_0A^{1/3} \tag{26-1}$$

式中，r_0是由实验确定的常量，约为1.2×10^{-15} m；A是原子核的质量数(即核子数)。

由原子核的半径，可以得到原子核的大小约为

$$V=\frac{4}{3}\pi r_0^3A \tag{26-2}$$

原子核中单位体积内的核子数目为

$$n=\frac{A}{V}=\frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}=1.38\times10^{44}\text{个}/\mathrm{m}^3 \tag{26-3}$$

质量密度等于单位体积内的核子数n与核子质量m_p的乘积(因为$m_p\approx m_n$)，即

$$\rho=nm_p=1.38\times10^{44}\times1.67\times10^{-27}\ \mathrm{kg/m^3}=2.3\times10^{17}\ \mathrm{kg/m^3} \tag{26-4}$$

可见，1 cm^3的核物质重达2.3亿吨！

由(26-2)式可知，核的体积V与核中的核子数A成正比，即与总质量成正比。由此可见，所有核中的物质密度几乎都相同，与核的大小无关。

在一些恒星的后期，当它们的星核中的氢作为热核聚变能源被耗尽之后，星体的巨大质量引起的万有引力可将其自身压缩成密度极大的天体，这个过程就是引力坍缩或者超新星爆发。在这种情况下，原子已被破坏，电子离开原子核形成所谓的“电子海洋”，核沉浸在“电子海洋”中，这种星被称为白矮星，其密度约为10^9到$10^{11}\ \mathrm{kg/m^3}$。

NOTE

4. 原子核的质量和结合能

一个原子核的总质量总是小于组成它的核子的质量和，其原因是各个核子组成原子核时要将核子彼此之间的结合能释放。质量的差值称为原子核的质量亏损，一般以 Δm 表示：

$$\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - m_A \tag{26-5}$$

其中，m_A 表示质量数为 A 的原子核的质量。

核子的静止能量与其质量的关系是 $E_0 = mc^2$。因此，静止原子核的能量比彼此之间无相互作用的静止核子的总能量要小，以下是一个差值：

$$\Delta E = [Zm_p + (A-Z)m_n - m_A]c^2 \tag{26-6}$$

其中，ΔE 称为原子核的结合能。如果要使一个原子核分裂成单个质子和中子，就必须提供与结合能等值的能量。

结合能与质量亏损的关系是 $\Delta E = \Delta mc^2$，这符合爱因斯坦的质能方程。

26-2 原子核的模型

建立核理论的尝试遇到了两个困难：一个是对核子间的相互作用力认识不够，另一个是多体量子力学问题的处理极为复杂和困难。对于前者来说，核力的性质十分复杂，特别是它的范围非常有限，并且随距离的增大迅速减小到零，这使得对核力的全面理解十分困难，而对于后者来说，由于原子核是一个多体系统，由众多的质子和中子组成，描述这样的多体系统是非常复杂的，因为每一个粒子都不再是独立的，而是与其他所有粒子通过量子力学相互作用，形成一个整体的波函数，这种相互作用在量子力学中是非线性的，意味着难以分解为更小的、更易于解决的问题。

这些困难促使物理学家发展了各种核模型，如液滴模型和壳层模型，它们通过借用其他领域（如流体动力学和量子力学）的理论，以一种更直观和数学上更易处理的方式来描述和理解原子核的性质。然而，需要注意的是，这些模型只是近似的描述，不能完全反映原子核的所有复杂性质，但它们在预测某些特定的核行为方面却十分有效。在本书范围内，我们仅介绍其中典型的两种。

NOTE

1. 液滴模型

原子核的液滴模型最初在1939年由苏联物理学家弗仑克尔提出，随后由尼尔斯·玻尔和其他学者进一步发展。弗仑克尔注意到，在各种不同的原子核中，核物质的密度几乎是一个常量。这表明核物质的压缩性是极小的，这一特性与液体非常相似。此外，液滴中分子之间的相互作用力和原子核中核子之间的相互作用力都是短程力，这些都进一步证实了原子核和液滴之间的相似性。因此，将原子核比作带电的液滴是有理由的。

液滴模型为我们提供了一种理解原子核性质的方式。利用这个模型，我们可以得到描述原子核结合能与核半径关系的公式。此外，液滴模型也可以解释一些其他的核物理现象，如重核的裂变过程。然而，值得强调的是，这是一种理论模型，它的目的是帮助我们理解和预测原子核的行为，而非真实地描述原子核的物质状态。实际上，原子核并不是液体，也不是液滴，这只是一种理论上的类比。

2. 壳层模型

核的壳层模型由迈耶(Maria G. Mayer)和延森(J. H. D. Jensen)于1949年各自独立提出。这个模型主要依据的基本假设是：核子在其他核子产生的平均势场中独立地运动。因此，核子存在于特定的离散能级中，每个能级都被核子占据，这些能级构成了壳层，每一壳层都能容纳一定数目的核子。完全填充的壳层形成了一种特别稳定的结构。

根据实验观测，特别稳定的核中的质子数或中子数(或者两者都是)等于以下数值：2、8、20、28、50、82、126。这些数被称为幻数。质子数或中子数是幻数的核被称为幻核，其中质子数和中子数都是幻数的核被称为双幻核。例如，氦核$_2^4\mathrm{He}$的质子数和中子数都是2，因此它是一个双幻核。氦核$_2^4\mathrm{He}$突出的稳定性表现在它是放射性衰变时重核释放的唯一一种复合粒子(即α粒子)。

壳层模型提供了一种理论框架，能够有效地解释为什么这些特定的数字(即幻数)会导致核的高稳定性。由于这个重要的贡献，迈耶和延森在1963年共同获得了诺贝尔物理学奖。

26-3 核力

NOTE

到现在为止，我们认识了自然界的两种基本的相互作用力：万有引力、电磁力。在原子核范围内，万有引力的作用是可以忽略的，而质子间的静电力只能起排斥作用，核子间的磁力又不很大。那么，是什么力使核子之间如此紧密地结合在一起形成原子核的呢？答案是强相互作用力，也就是通常所说的核力。这是一种只在核子间有影响的力，强度非常大，足以克服质子间的电磁排斥力。

虽然我们对强相互作用力的了解并不能像对万有引力和电磁力那样，建立一个明确的公式，但我们已经能够通过大量的实验研究描绘出核力的主要特性。下面将对这种力进行简单的介绍。

1. 核力的性质

（1）强相互作用力

核力是一种强相互作用力，它的强度可以抵消质子间的电磁排斥力，使原子核得以存在。这一事实说明了核力的强度。核子散射实验表明，核力的作用强度约比电磁力的强度大两个数量级。

（2）核力是短程力

核力的力程在 2×10^{-15} m 的数量级。当距离大于 10^{-15} m 时，核力显著小于电磁斥力；但在小于 10^{-15} m 的距离时，核力显著大于电磁力。这种现象表明，核力的作用是极其定域的。

（3）核力与核子的电荷无关

无论是作用在两个质子、两个中子，还是一个质子和一个中子之间，核力都具有相同的数值。这个特性称为核力的电荷无关性，这意味着核力并不受核子的电荷影响。

（4）核力具有饱和性

核力的饱和性体现在：在原子核中，核子的平均结合能并不随核子数目的增多而增大，而是几乎保持不变。这意味着在原子核内部，每一个核子都只与少数几个核子有直接的相互作用，不会与所有的核子都有直接的相互作用。

2. 核力的介子场理论

NOTE

按照现代观点，核子间的强相互作用是通过交换一种称为介子的粒子而产生的。为了理解这个过程，我们可以参考电磁相互作用。

带电粒子间的相互作用通过电磁场来实现，这个场可以被视为由光子组成。在量子电动力学中，两个带电粒子的相互作用过程涉及光子的交换。换言之，一个电子释放一个光子，然后另一个电子吸收这个光子。1935 年，日本物理学家汤川秀树（H. Yukawa）以电磁力为类比，提出了核力的介子场理论，他认为核子间的相互作用是通过交换介子产生的。也就是说，一个核子释放一个介子，然后另一个核子吸收这个介子。他估算出这个自然界中存在的而当时尚未发现的介子的质量为电子质量的 200～300 倍。由于介子的质量介于电子和核子之间，故因此而得名。

1936 年，安德森（C.D.Anderson）和尼德迈耶（S.H.Neddermeyer）从宇宙线中发现了质量等于 $207m_e$ 的称为 μ 子的粒子，人们以为找到了上述的介子，但是后来很快弄清楚这种 μ 子和核子的相互作用很弱，并不是传递核力的介子。直到 1947 年，鲍威尔（C.F.Powell）在宇宙射线实验中发现了另一种类型的介子即所谓的 π 介子，才证实了汤川秀树 12 年前预言的介子。π 介子存在三种类型：正的 π 介子（π^+）、负的 π 介子（π^-）和中性的 π 介子（π^0）。π^+ 和 π^- 介子的电荷量的绝对值等于元电荷 e，其质量为 $273m_e$，而中性 π 介子的质量为 $264m_e$。因此这三种介子的自旋都为零。它们都是不稳定的，π^+ 介子和 π^- 介子的平均寿命为 2.6×10^{-8} s，而中性 π 介子的寿命更短，约为 0.8×10^{-16} s。

由于对介子的预言以及介子的发现在核力理论中的重要贡献，汤川秀树于 1949 年获得了诺贝尔物理学奖，而鲍威尔因其在发现介子的工作中的突出表现，于 1950 年获得了诺贝尔物理学奖。

26-4 放射性衰变及其应用

在现在知道的 2 600 多种原子核中，绝大多数是不稳定的，会自发性地放出射线（α 粒子、β 粒子、γ 射线）并转变为另一种元素或同位素，这种现象称为放射性衰变。放射性衰变在医学、工业和考古中有着广泛的应用。

NOTE

1. 放射性衰变规律

各个放射性核的衰变是互不相关的。因此,可认为在时间间隔 dt 内发生衰变的核的数目 dN 既与未衰变核的数目 N 成正比,也与时间间隔 dt 成正比,即

$$dN=-\lambda N dt \tag{26-7}$$

式中 λ 是衰变常量,它代表的是单位时间内一个原子衰变的概率。负号是为了能把 dN 看作未衰变核的数目 N 的减少量。对(26-7)式积分,可得关系式:

$$N=N_0 e^{-\lambda t} \tag{26-8}$$

式中 N_0 是初始时核的数目,N 是 t 时刻尚未衰变核的数目。我们将(26-8)式称为放射性衰变定律,这个定律说明未衰变核的数目随时间按指数规律而减少。

在时间 t 内衰变的核的数目可以表示为

$$N_0-N=N_0(1-e^{-\lambda t}) \tag{26-9}$$

核的原有数目衰变到一半所需的时间称为半衰期 T。由(26-9)式可求得半衰期为

$$T=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{0.693}{\lambda}=0.693\tau \tag{26-10}$$

这个公式说明了半衰期 T 与衰变常量 λ 的关系。值得注意的是,这里 $\tau=1/\lambda$ 称为核的平均寿命,是指放射性粒子从诞生(或被观察开始)到衰变的平均时间。

天然放射性现象是在 1896 年由法国科学家亨利·贝可勒尔(A.H.Becquerel)在研究铀盐时意外发现的。他注意到这种物质能够在照相底片上产生影像,而这种现象并不需要外部光源。在放射性物质的研究领域,玛丽·居里(M.Curie)和皮埃尔·居里(P.Curie)对此作出了显著的贡献。他们从铀矿中提炼出了两种新的放射性元素——钋和镭,并研究了其放射性特性。由于这些卓越的工作,他们在 1903 年共同获得了诺贝尔物理学奖。

2. 放射性衰变的主要类型

(1) α 衰变

α 粒子也被称为氦核 ^4_2He,由两个质子和两个中子构成,带有两个单位的正电荷。在 α 衰变中,放射性原子核放出一个 α 粒子,转化为原子序数少 2、质量数少 4 的新原子核。例如,铀同位

素 $^{238}_{92}U$ 发生 α 衰变，放出 α 粒子后，转化为钍 $^{234}_{90}Th$：

$$^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He \tag{26-11}$$

通常，只有重原子核才会发生 α 衰变。α 粒子在衰变中以极大的速度（约 10^7 m/s）飞出。α 粒子是重带电粒子，穿过物质时会消耗大量能量，因此其行程相对较短。在空气中，其可行进约 3 cm；在固体中则只能运动到约 10^{-3} cm 的距离，甚至可以被一张普通纸挡住。

（2）β 衰变

开始时，人们认为 β 衰变是核内放出电子的过程。然而，后续实验发现存在三种不同类型的 β 衰变：电子发射、正电子发射以及电子俘获。电子俘获是指原子核俘获一个核外电子，此过程中，核内的一个质子转化为一个中子，并同时释放一个中微子：

$$^{0}_{-1}e + {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n + \nu \tag{26-12}$$

因此，释放电子不再是 β 衰变的唯一形式。

例如，β^- 衰变中，钍 $^{334}_{90}Th$ 可以衰变为镤 $^{234}_{91}Pa$，同时放出一个电子和一个反中微子：

$$^{234}_{90}Th \rightarrow {}^{234}_{91}Pa + {}^{0}_{-1}e + \tilde{\nu} \tag{26-13}$$

同时，在 β^+ 衰变中，氮 $^{13}_{7}N$ 可以衰变为碳 $^{13}_{6}C$，同时放出一个正电子和一个中微子：

$$^{13}_{7}N \rightarrow {}^{13}_{6}C + {}^{0}_{+1}e + \nu \tag{26-14}$$

（3）γ 辐射

原子核在经历 α 衰变和 β 衰变后，通常会处于激发状态。当原子核从这种激发状态跃迁到较低能级或基态时，通常会以辐射电磁波的形式释放能量，产生的就是 γ 射线。γ 辐射是一种电磁辐射的形式。

3. 半衰期与用 ^{14}C 测定年代

每种放射性核都有其特征的半衰期，这个性质使得我们可以通过衰变规律来确定地质年代。如果某种放射性核的半衰期较长，样品中的放射性就能得到较好的保持。反之，如果半衰期较短，样品的放射性将会迅速减弱。

利比等人利用碳-14（^{14}C）的半衰期特性提出了一种测量文物年代的方法。下面，我们通过一个利用 ^{14}C 测量古代生物死亡年代的例子来阐述这种方法。

无论是在活体还是死体的生物组织中，都会含有少量的放射性核 ^{14}C。^{14}C 是由大气中的宇宙射线中子轰击氮核产生的

NOTE

($n+{}^{14}N \rightarrow {}^{14}C+p$)。$^{14}C$ 的半衰期为 5 730 年，它在大气中的浓度可以通过其与 ^{12}C 的比值($1:10^{12}$)来表示。

在生物体内，通过代谢过程，碳元素不断被摄取并发生新陈代谢。因此，活体内的 ^{14}C 浓度与大气中的 ^{14}C 浓度保持平衡。然而，当生物死亡后，与外界的物质交换就会停止，体内的 ^{14}C 无法得到新的补充，而原有的 ^{14}C 仍然在不断衰变，导致 ^{14}C 的浓度不断下降。因此，我们可以通过测量古代生物遗骸中的 ^{14}C 含量来推算其死亡的时间。

例 1

今测量到一具需要考古的古尸体中 ^{14}C 的放射性为 8 个衰变/(分·克)，而用同样方法测得活的同种生物体的 ^{14}C 的放射性为 12.5 个衰变/(分·克)，求它的死亡年代。

解 由(26-8)式和(26-10)式可得

$$t=\frac{T}{0.693}\ln\frac{N_0}{N}=\frac{5\ 730}{0.693}\ln\frac{12.5}{8}\ \text{y}=3\ 886\ \text{y}$$

例 2

根据方程

$${}^{131}_{53}\text{I}\rightarrow {}^{131}_{54}\text{Xe}+{}^{0}_{-1}\text{e}$$

在治疗甲状腺疾病的过程中所用的碘 $^{131}_{53}I$ 将发生 β 衰变。这个反应的半衰期约为 8 天。假定我们使用 10.00 g 的 $^{131}_{53}I$ 开始治疗，问在 32 天(大约一个月)后还剩下多少碘？

解 由(26-8)式得到剩下的碘为

$$N=N_0e^{-\lambda t}=N_0e^{-\frac{\ln 2}{T}t}=10e^{-\frac{0.693}{8}\times 32}\ \text{g}=0.625\ \text{g}$$

26-5 核裂变与核动力反应堆

1. 核裂变的发现

1938 年，德国学者奥托·哈恩(O.Hahn)和同事弗里茨·斯特拉斯曼(F.Strassmann)通过实验发现，当用中子轰击铀原子核时，会生成位于周期表中间位置的元素——钡和镧。这个发现对

NOTE

他们来说是难以理解的，因为在此之前，尚未有人发现原子核能放射出比 α 粒子还大的粒子。因此，他们把实验结果报告给了他们的一位前同事，物理学家利泽·梅特涅（L.Meitner）。梅特涅和她的侄子奥托·弗里施（O.Frisch）进一步研究后提出，吸收中子后的铀核可能分裂成了两个大致相等的部分，这就是裂变碎片。他们为这个过程起了一个新的名字——裂变，并将其与细胞分裂过程进行了类比。他们发现，每个发生裂变的铀核大约能释放出 200 MeV 的能量，这种能量以裂变碎片飞速分开时的动能形式表现出来。每个原子核释放的能量几乎为相同质量的任何普通炸药的 108 倍。

后续的研究发现，裂变可以通过多种方式发生，最常见的是分裂成质量比为 2∶3 的碎片。这些碎片是由慢中子（热中子）作用于 $^{235}_{92}U$ 产生的。尤其重要的是，每个核在裂变时都会释放出若干个中子。例如，由慢中子引起的 $^{235}_{92}U$ 核裂变产物可以是 $^{141}_{56}Ba+^{92}_{36}Kr+3\,^{1}_{0}n$，或者是 $^{139}_{54}Xe+^{95}_{38}Sr+2\,^{1}_{0}n$ 等。显然，裂变后释放的中子数大于 1。除了分裂成两块之外，偶尔也有裂变成三块甚至四块的现象发生。三分裂是我国科学家钱三强和何泽慧在 1947 年发现的，它出现的概率仅为 3/1 000。

原子核裂变所释放的巨大能量来源于质量转化成能量的过程。反应物的质量和裂变产物的质量之间存在质量差，即反应物的总质量大于这些裂变产物的总质量。根据相对论的质能关系式 $\Delta E=\Delta mc^2$，这个质量差以能量的形式出现。

并不是所有的原子核都能被慢中子引发裂变，天然存在的铀中只有 $^{235}_{92}U$ 可以被慢中子裂变，但其在天然铀中的含量仅为 0.72%。另外两种可以被慢中子引发裂变的重要核素是 $^{239}_{94}Pu$ 和 $^{233}_{92}U$。

2. 链式反应

裂变过程不仅能释放出巨大的能量，还会发射出额外的中子。例如，$^{235}_{92}U$ 每次裂变平均可以产生 2.5 个新中子。这些新产生的中子有潜力引发更多的裂变，生成更多的中子，这些中子又可以触发更多的裂变反应。这种自我持续的过程被称为链式反应。

费米和他的团队发现，低速或者说热中子能有效地引发 $^{235}_{92}U$ 的裂变。在中子与原子核碰撞的过程中，中子会损失一部分能量，成为热中子。1942 年，费米和他的团队首次成功地在实验中

NOTE

实现了铀的自持续链式反应。

然而，由于中子穿透力强并且裂变反应区域有限，很多中子在能被铀核捕获引发裂变之前逸出反应区。因此，这会阻止链式反应的持续进行。为了防止中子的逸出，可以增大铀的体积。当铀-235 的体积大于临界体积时，中子将快速增多，触发快速链式反应，反应会具有爆炸性，这就是原子弹的原理。

要使链式反应可控，就需要一种装置，也就是反应堆。在普通的热中子反应堆中，中子减速剂（或者称慢化剂）的使用是关键，因为它可以使中子能量迅速减小，转变为热中子，而不会被$^{238}_{92}U$吸收。常用的减速剂包括石墨、重水等不会吸收中子的轻元素。

1942 年 12 月 2 日，第一个自持式铀-石墨链式反应堆在费米的领导下于美国芝加哥大学体育场看台下的网球场建造完成，从而使大规模利用原子能成为可能。

裂变原子弹可以认为是一种以最快速度释放大量能量的特殊反应堆。$^{235}_{92}U$的临界质量约为 3.6 kg，如果装在杯子里，其体积还不满一杯。以“枪式”原子弹为例，在原子弹内，可裂变铀被分成两个亚临界质量的部分，通过爆炸使两块铀合并成一个超过临界质量的铀核，然后，由两块铀之间的中子源释放大量中子引起链式裂变反应。在广岛原子弹爆炸中，转化为能量的质量不到总质量的 1/1 000，大约为 0.001 kg。核爆炸的灾难性效果主要是由于它能产生巨大的热量、强烈的冲击波，且裂变产物具有放射性。

3. 核动力反应堆

随着工业化和城市化进程的推进，全球能源需求正在急剧增加。传统的化石燃料，如石油和煤炭，虽然在一段时间内提供了主要的能源，但它们的储备有限，对环境的影响也日益突出。因此，我们需要寻找更可持续、更环保的能源替代品。在这种背景下，核能的潜力引起了广泛的关注。

核能是指利用核裂变或核聚变等原子核反应释放出的能量。与化石燃料释放的能量相比，核能具有能量密度高、供应稳定和环境污染较低等优点。对于未来的能源供应，利用铀-235、铀-238 和钍-232 等原子核裂变产生的能量可能是一个关键的解决方案。因此，核能的利用受到世界各国的极大重视。我国近些年来建成的浙江秦山和广东大亚湾核电站就是利用核能发电的一种实践。

目前的大多数的核反应堆都采用含有$^{238}_{92}U$和少量$^{235}_{92}U$的燃

料棒，$^{235}_{92}U$ 作为主要消耗的核燃料。然而，天然铀中 $^{235}_{92}U$ 的含量仅有约 0.72%，以目前的铀资源储备和使用率来估计，只够人类使用几十年的时间。然而，天然铀中约 99.3%是 $^{238}_{92}U$，它自身不易通过慢中子裂变，但它可以捕获一个快中子，然后经过一系列衰变，变成钚-239，这种物质可以通过慢中子裂变释放能量。反应过程如下：

$$^{238}_{92}U+^{1}_{0}n \rightarrow ^{239}_{92}U \xrightarrow{\beta^-} ^{239}_{92}Np \xrightarrow{\beta^-} ^{239}_{94}Pu$$

这也就是快中子反应堆（快堆）的原理。快堆能够通过吸收中子将铀-238 转化为钚-239，而钚-239 是一种有效的核燃料。这就使得我们能够利用天然铀中的大部分铀-238，进一步扩大核能源。除此以外，快堆还可以利用和转化其他核设施产生的废料，继续产生能源，减少核废料的储存和处理问题。

核电作为一种清洁能源（指在运行过程中不排放温室气体），在面对全球气候变化的问题上有其不可替代的地位。同时，虽然核电站包含有低强度的辐射源，但在正常运行下，这种辐射被严格控制在安全范围内，不会对周围环境和人类健康构成威胁。然而，涉及核电站的一个主要问题是反应堆的安全性问题。虽然在过去的几十年中，全球范围内的商用核电站的安全性得到了显著的提高，但仍然发生过一些严重的反应堆事故，包括美国的三英里岛事故、苏联的切尔诺贝利事故和日本的福岛事故。这些事故强调了核电站运行的安全问题，推动我们不断提高核电站的安全设计和运行标准。

除了提供民用能源之外，核动力反应堆还被广泛用于潜艇和航空母舰等军事船只的动力系统。核动力潜艇的优势在于它可以在不需要进行表面呼吸或充电的情况下长期在水下行驶。核动力反应堆也被用于某些深空探测任务。核电源可以提供探测器在远离太阳的深空环境中所需的电力和热量，使其能够进行长期的科学研究。此外，研究反应堆被用于产生中子束，可以用于研究材料的性质，进行生物医学研究；还可以生产放射性同位素，用于肿瘤治疗和医疗影像技术等。

NOTE

26-6 核聚变与受控热核反应

除了重核裂变能够放出大量的能量之外，轻核聚变也能够放出大量的能量。在核的聚变过程中，轻核聚合为重核，新生成的

NOTE

重核的结合能比原始的轻核结合能要大，从而释放出能量。与产生大量放射性废物的核裂变反应相比，核聚变反应产生的放射性废物明显少得多。然而，实现有效和稳定的核聚变反应仍面临着一些技术挑战。此外，与铀的供应相比，氢和其他轻元素几乎能无限地供应。据研究，太阳和恒星的能量是由核聚变产生的。

德国物理学家贝特(H.Bethe)曾提出一种能产生同样巨大能量的称为碳循环机制的方法。在较高的温度下，碳循环发生概率较大。在碳循环过程中，产生一个 α 粒子的过程会伴随两次 β 衰变，每次 β 衰变都会产生一个正电子并释放一些能量，总共释放约 26.7 MeV 的能量。碳在这个过程中起到催化剂的作用。

无论在核聚变还是在核裂变中，能量的释放都是源于物质的转化，这也就是爱因斯坦的质能方程 $E=mc^2$ 所描述的。实际上，氢在太阳这个“火炉”中就是作为核燃料使用的。尽管太阳每秒消耗的氢达数百万吨，但由于太阳的质量非常大，其储备的氢量十分充足，足以维持数十亿年之久。

碳循环的核聚变反应表达式为

$${}^{12}_{6}\mathrm{C}+{}^{1}_{1}\mathrm{p}\rightarrow{}^{13}_{7}\mathrm{N}+\gamma$$

$${}^{13}_{7}\mathrm{N}\rightarrow{}^{13}_{6}\mathrm{C}+{}^{0}_{+1}\mathrm{e}+\nu$$

$${}^{13}_{6}\mathrm{C}+{}^{1}_{1}\mathrm{p}\rightarrow{}^{14}_{7}\mathrm{N}+\gamma$$

$${}^{14}_{7}\mathrm{N}+{}^{1}_{1}\mathrm{p}\rightarrow{}^{15}_{8}\mathrm{O}+\gamma$$

$${}^{15}_{8}\mathrm{O}\rightarrow{}^{15}_{7}\mathrm{N}+{}^{0}_{+1}\mathrm{e}+\nu$$

$${}^{15}_{7}\mathrm{N}+{}^{1}_{1}\mathrm{p}\rightarrow{}^{12}_{6}\mathrm{C}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

$$\rightarrow{}^{4}_{2}\mathrm{He}+2\,{}^{0}_{1}\mathrm{e}+2\nu+26.7\ \mathrm{MeV}$$

在实验室中，我们已经利用高能加速器观察到了聚变反应，但要使聚变反应能够大量发生却是一个巨大的挑战。因为聚变反应涉及的原料主要是带正电荷的粒子，这使得它们在尝试接近其他同样带正电荷的粒子时，会受到库仑斥力的阻挠。这与中子因无电荷而能更容易地进入原子核形成鲜明对比。

以氘核的聚变反应为例，当两个氘核互相接触时，它们的相对动能需要达到 206 keV 才能克服库仑斥力，从而让聚变反应发生。以它作为热运动的平均动能 $\frac{3}{2}kT$ 来计算，相应的温度达到了 1.6×10^{9} K。然而，考虑到其他因素，一般估计实现可控核聚变反应的温度至少要 10^{8} K。在如此高的温度下，许多物质的原子都会电离成电子与正离子并存的状态，即物质的第四态——等离子体。因此，这种在高温下进行的聚变反应也被称为热核反应。

NOTE

除了对高温的需求之外，实现聚变反应还必须满足从等离子体获得的能量大于维持等离子体所需要的能量的条件。这就要求等离子体有足够大的密度，并维持足够长的时间。因此，科学家们研究了各种可能的聚变反应堆方案，其中有两种方案最有希望：一种是磁约束装置，它利用强磁场约束等离子体，使其围绕磁感线运动；另一种是激光惯性约束，这种方法是使强激光束均匀照射到直径为几十到几百微米的氘氚靶丸上，靶丸吸收能量熔化后向外喷射，其反冲力使靶内的氘氚燃料迅速压缩至高密度，并进一步加热到高温，从而发生强烈的聚变反应。我国著名核物理学家、中国科学院院士王淦昌教授早在20世纪60年代就提出了用激光进行受控热核反应的观点，目前这一研究还在继续进行中。

26-7 粒子的性质和分类

在20世纪初，物理学家开始探索物质的微观结构，研究人员发现原子的直径约为 10^{-10} m。随着研究的深入，人们逐渐认识到原子核的直径约为 10^{-14} m 的数量级，并且原子核主要由质子和中子组成。这样，质子、中子、电子和光子就被认为是构成物质的“基本粒子”。然而在当时，“基本粒子”并不限于这些，实践发现，有很多能与这些粒子相互作用和转化的新粒子，它们互相不能成为对方的构成单元，因此都被归为“基本粒子”。

随着高能加速器的应用，实验物理学家发现这样的粒子数越来越多，可以达到几百种，远超化学元素的种类，并且还在不断增多。随着实验和理论研究的深入，物理学家开始认识到，某些所谓的“基本粒子”并不完全像点粒子那样没有大小和内部结构，它们有一定的大小和内部结构。因此，现在我们更倾向于称这些“基本粒子”为粒子，基本粒子物理学也被更广泛地称为粒子物理学。到目前为止，真正能称为基本粒子的只有62种（见后）。

1. 粒子运动的主要特点

（1）所有的“基本粒子”都处于微观尺度，这意味着它们的行为受到量子力学的主导。

NOTE

（2）在某些情况下，粒子的运动速度可以接近光速，这是在粒子物理学中经常看到的现象，尤其是在高能物理实验中。

（3）粒子的运动过程中可能会表现出粒子间的转化，例如通过某些相互作用，粒子可能会转变为其他粒子，或者新的粒子可能会产生，这导致粒子数不是一个恒定的量。

上述特点决定了粒子物理学中所研究的物理规律既能反映微观粒子的量子效应，又能反映粒子高速运动的相对论效应。研究粒子物理学的理论基础是量子场论—— 一种将量子力学和狭义相对论结合起来的物理学理论。

2. 粒子的基本性质

（1）质量

质量是粒子的基本性质，它的测量值用于识别不同的粒子。

（2）寿命

许多粒子具有自发衰变的特性，且具有明确的平均寿命。对于稳定的粒子，例如光子、电子、中微子和质子，它们不会自发衰变，因此没有所谓的平均寿命。粒子的平均寿命是指在其自身参考系中，从产生到衰变的平均时间。

（3）自旋

自旋是粒子的固有属性，是描述粒子内禀角动量的物理量。每种粒子都有特定的自旋值。

（4）电荷

粒子的电荷值是量子化的，实验测得的粒子的电荷值都是电子电荷量绝对值的整数倍。

3. 粒子的分类

至今为止，科学家们已经发现并确认了众多种类和数量的粒子，对它们进行分类是一项具有挑战性的任务。这些粒子可以按照多种属性进行分类。例如，根据粒子的自旋和统计性质，可以将粒子分为费米子和玻色子。从电荷角度看，可以将粒子分为带电粒子和中性粒子。在粒子物理学中，一个重要的分类方法是按照粒子的相互作用性质进行分类。

规范粒子：规范粒子是传递基本力的粒子。电磁相互作用就是通过规范粒子——光子来传递的。这种相互作用的特点

是粒子在相互作用过程中吸收或放出相应的规范粒子。规范粒子的自旋为 1。到目前为止,我们已经发现了 12 种规范粒子,分别是光子、胶子、Z 玻色子、W 玻色子。胶子是传递强相互作用。Z 玻色子、W 玻色子传递弱相互作用。之所以称这些粒子为规范粒子,是因为这些粒子的存在体现了自然界中的某种规范对称性。规范粒子是基本粒子。

NOTE

轻子:轻子是自旋为半整数的粒子,它们不直接参与强相互作用,但直接参与电磁相互作用和弱相互作用。已发现的轻子共有六种,包括电子和之前提到的 μ 子以及它们的反粒子,共有十二种。轻子是基本粒子。

强子:强子是直接参与强相互作用的粒子,目前已发现的大部分粒子都属于强子。最常见的强子是质子和中子。根据自旋值的不同,强子又可以进一步分为介子和重子。

介子:自旋为整数的强子统称为介子,至今已经发现并确认的介子有一百种。

重子:自旋为半整数的强子被称为重子(或反重子)。

强子不是基本粒子,它是由夸克组成的。由三个夸克(quark)组成的称为重子。由一个夸克与一个反夸克组成的称为介子。我们将这种分类方案称为朴素夸克模型。

近 20 年来,加速器中新发现了超过三个夸克或反夸克组成的强子,这些强子称为奇异强子。它们按照自旋依然可以分为重子和介子。

夸克:到目前为止,夸克属于基本粒子,它们构成所有的强子。但是夸克本身不能被实验直接探测到。夸克一共包括 36 种,它们参与所有类型的相互作用。

希格斯粒子:称为上帝粒子,自旋为零,不带电荷。在粒子物理标准模型中,它扮演着为各种粒子提供质量的角色。希格斯粒子已在 2013 年被实验发现。

引力子:在理论中被认为是传递引力相互作用的粒子。关于引力的量子理论还不成熟。引力子的发现还遥遥无期。

综上所述,虽然被发现的粒子很多,但是按照目前的粒子物理标准模型,并不是所有粒子都被认为是构成物质的基本单元。被认为是基本粒子的一共有 62 种,其中 61 种被实验证实,它们分别是(图 26-1):12 种规范粒子(光子,Z 玻色子, W+玻色子、W-玻色子和 8 种胶子),12 种轻子,36 种夸克,希格斯粒子。

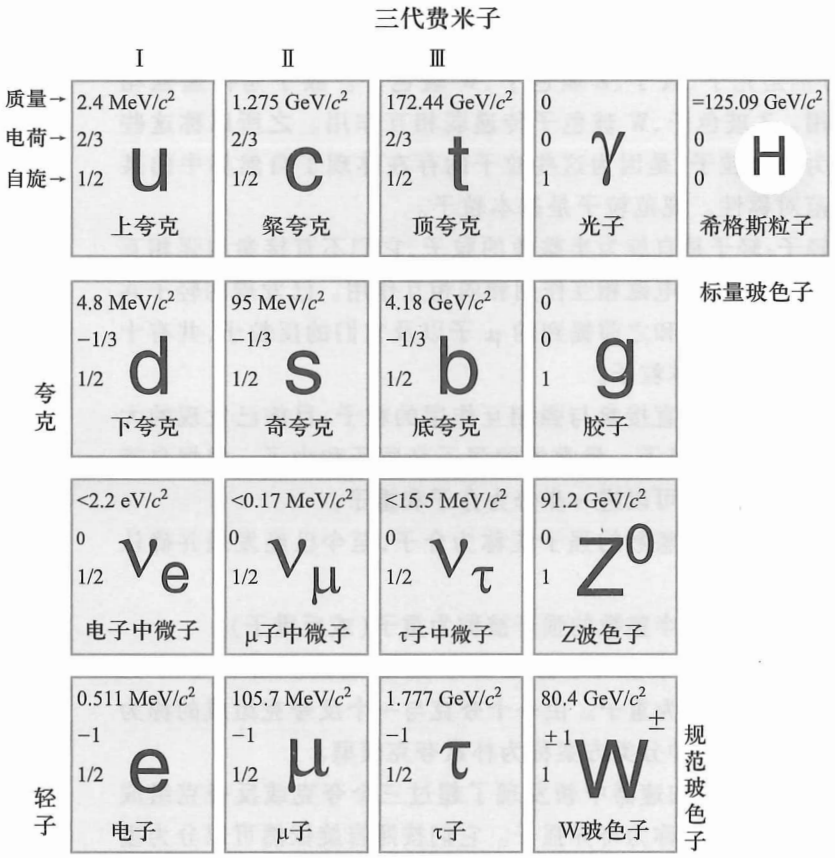


图 26-1　基本粒子

26-8　粒子和反粒子

NOTE

1928 年，狄拉克提出了一种相对论性量子理论，也就是现在我们所说的狄拉克方程，它是出于对电子在高速运动时行为的解释和描述的需求。这个理论成功解释了许多高速运动电子的性质，并与实验结果高度符合。狄拉克还在其理论基础上预言了反粒子，特别是正电子的存在。这个预言在 1932 年由安德森在宇宙线实验中得到了验证。后来的研究进一步发现，各种粒子都有相应的反粒子存在（不带电粒子的反粒子就是它本身），这是一个普遍的规律。

一个粒子的反粒子具有与其完全相同的质量和自旋，但电荷与之完全相反。此外，当粒子与其对应的反粒子相遇时，它们可能会相互湮没，它们的静止质量会转变成其他形式的粒子（如光

子)所携带的能量。

例如,当一个正电子在物质中运动速度不快时,它通常会与一个电子很快地湮没,产生两个光子:

$$e^{+}+e^{-}\rightarrow 2\gamma$$

这个过程符合能量守恒定律,产生的每个光子具有 0.511 MeV 的能量,这正好等于一个电子的静止质量所对应的能量。

质子的反粒子称为反质子,它在 1955 年被首次观测到。仅仅一年后,科学家们又发现了反中子。这便引出了一个问题:为什么我们观察到的所有氢原子都是由一个正质子和一个负电子组成的,而不是由一个负质子(即反质子)和一个正电子(即反电子或称正介子)组成的呢?这种由反质子和反电子构成、与氢原子性质相反的原子,我们称之为反氢原子。由反粒子核心与正电子组成的物质,我们将其称为反物质。如果物质和反物质具有对称性,我们可能会预料到宇宙中应有一半的物质为反物质,但实际观察却表明所有观测到的原子核都带有正电荷,而非负电荷,宇宙中反物质非常稀少。正反物质不对称的问题,是人类面对宇宙创生(宇宙大爆炸模型)所必须解决的棘手问题。标准模型中的 CP 破坏已经提供了一部分答案,但是这远远不够。这有待于 21 世纪年轻物理学家的探索。

NOTE

本章摘要

1. 原子核:由质子和中子组成。质子和中子称为核子。

原子核的形状接近于球形,其体积约为

$$V=\frac{4}{3}\pi r_0^3 A$$

原子核的质量亏损:$\Delta m=Zm_{\mathrm{p}}+(A-Z)m_{\mathrm{n}}-m_A$

原子核的结合能:$\Delta E=[Zm_{\mathrm{p}}+(A-Z)m_{\mathrm{n}}-m_A]c^2$

2. 原子核的模型:液滴模型、壳层模型。

3. 核力:核子间的强相互作用力。

4. 放射性衰变规律

$$N=N_0e^{-\lambda t}$$

式中 N 为未衰变核的数目。

放射性衰变类型:α 衰变、β 衰变、γ 辐射。

5. 核裂变:指铀核俘获中子后分裂成两个大致相等的裂变碎

片的过程。

6. 核聚变:轻核聚变成重核,并释放大量的能量。

7. 粒子和粒子物理学。

思考题

26-1 组成核的中子和质子能够紧密地结合在一起的原因是什么?核力有哪些基本性质?

26-2 什么叫原子核的衰变常量、半衰期和平均寿命?它们之间有什么关系?

26-3 原子核有哪些基本性质?什么是原子核的放射性衰变?如何利用放射性衰变规律来鉴定古物的年龄?

26-4 什么是结合能?它在核结构及核能的利用等研究中有何重要意义?

26-5 核能开发利用的途径有哪些?依据是什么?

26-6 为什么核的聚变要在高温下进行?而核的裂变不需在高温下进行?

26-7 “基本粒子”可分为几类?“基本粒子”之间有哪几种相互作用?其中哪种相互作用将粒子结合在一起?哪一种相互作用趋向于将粒子分开?

26-8 (1) 是否有质量为零的带电粒子?

(2) 是否有质量不为零的不带电粒子?

26-9 什么是反物质?反物质与正常物质相遇会发生什么?请估计:1 kg 反物质和 1 kg 正常物质相遇时会释放多少能量?

习题

26-1 用质子轰击锂核的核反应式为 ${}_1^1\mathrm{H}+{}_3^7\mathrm{Li}\rightarrow {}_2^4\mathrm{He}+{}_2^4\mathrm{He}$,试计算该反应的反应能。(已知有关同位素的质量:${}_1^1\mathrm{H}$:1.007 825u,${}_3^7\mathrm{Li}$:7.015 999u,${}_2^4\mathrm{He}$:4.002 603u,1u:931.5MeV/$c^2$)

26-2 若一中等质量的核 ${}_{50}^{120}\mathrm{Sn}$ 全部裂变成质子和中子,求:

(1) 该反应所需的总能量;

(2) 每个核子的结合能。

(已知质量 ${}_{50}^{120}\mathrm{Sn}$:119.902 199u,${}_1^1\mathrm{p}$:1.007 825u,${}_0^1\mathrm{n}$:1.008 665u)

26-3 试计算下述一个 α 粒子衰变过程中释放的能量:${}_{92}^{238}\mathrm{U}\rightarrow {}_{90}^{234}\mathrm{Th}+{}_2^4\mathrm{He}$。(已知质量 ${}_{92}^{238}\mathrm{U}$:238.050 785u,${}_{90}^{234}\mathrm{Th}$:234.043 593u,${}_2^4\mathrm{He}$:4.002 603u)

26-4 有一利用铀裂变发电的原子能发电站,发电功率为 5 000 kW,效率为 16.7%。试求该核电站中 ${}_{92}^{235}\mathrm{U}$ 核一昼夜的消耗量。(设每个铀核在裂变时平均释放 200 MeV 的能量)

26-5 用计数器测某一放射性元素的放射性时,测得某一时刻每分钟计数 4 750 次,5 分钟后测得每分钟计数 2 700 次,试求:

(1) 衰变常量;

(2) 半衰期。

26-6 某一放射性同位素的半衰期为 6.5 h，如果开始时样品中含有此同位素的原子数为 4.8×10^{20} 个。试问 26 h 后还有多少个该同位素原子？

26-7 用放射性碳测定植物、人类和动物残骸的年龄是一种较可靠的方法。今有从地下发掘出的古树片 50 g，测出其 $^{14}_{6}C$ 每分钟衰变次数为 320 次。若生长的树木中 $^{14}_{6}C$ 的放射性强度为每克每分钟衰变 12 次，$^{14}_{6}C$ 的半衰期为 5 730 年，试估计该树片埋藏的时间。

26-8 一瓶陈酒中 $^{3}_{1}H$ 的放射性强度为新鲜酒的 1%。已知 $^{3}_{1}H$ 的半衰期为 12.33 年，则该酒已存放了多少年？

26-9 在某一岩石样品中，发现 ^{206}Pb 相对于 ^{238}U 的比率为 0.61，已知 ^{238}U 的半衰期为 4.5×10^{9} 年，并设岩石中的 ^{206}Pb 均为由 ^{238}U 衰变而来，试计算该岩石的年龄。

26-10 利用放射性同位素可以测量人体血液的总量。将含有 $^{24}_{11}Na$ 放射性的生理盐水注射进人体，注入 1 cm^3 盐水时其放射性强度为 2 000 Bq（注：1 贝可勒尔（Bq）= 1 次核衰变/s），过了 5h 后，取出 1 cm^3 血液，测得放射性强度为 0.27 Bq，$^{24}_{11}Na$ 的半衰期为15 h，求人体的血液总量。

26-11 原子弹的一种裂变反应为 $^{235}_{92}U+^{1}_{0}n\rightarrow{}^{141}_{55}Cs+^{92}_{31}Rb+3\,^{1}_{0}n$，试求该反应中释放的能量。

（已知质量：$^{235}_{92}U$：235.043 924u，$^{92}_{37}Rb$：91.919 661u，$^{141}_{55}Cs$：140.920 006u，$^{1}_{0}n$：1.008 665u）

26-12 氘核进行如下的聚变反应：

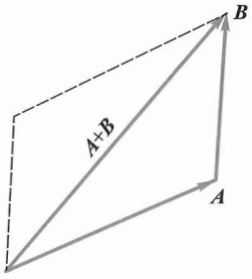
$$^{2}_{1}H+^{2}_{1}H\rightarrow{}^{4}_{2}He$$

已知氘核和氦核的平均结合能分别为 1.11 MeV 和 7.06 MeV，试求此聚变反应发生时释放的能量。

习题解答

附录Ⅰ　矢量知识

1. 矢量的定义



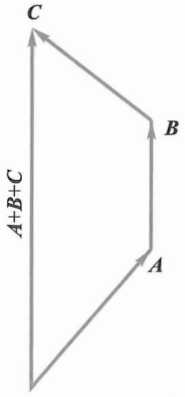
图Ⅰ-1

具有大小和方向且可按平行四边形定则相加的量称为矢量。最后一个条件是很重要的。如果一个量，它具有大小和方向，但其相加的方法不满足平行四边形定则，那这个量就不是矢量。例如，物体绕转轴作一有限角 φ 的转动。这个量有大小，其方向可用右手螺旋定则决定，即右手的四指指向转动方向，大拇指方向即为有限角 φ 的方向，若大拇指方向与转动轴正方向一致，即有限角 φ 为正，反之为负。然而它不遵守平行四边形加法定则。因此，有限角 φ 不是矢量。

矢量的大小称为矢量的模。形象地说，模给出矢量的长度，矢量的模总是正的。

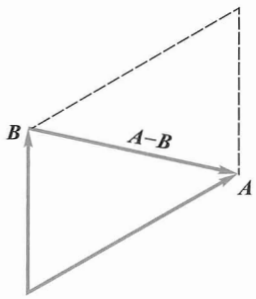
几何上，矢量用一端带箭头的直线段来表示。线段的长度按规定的比例确定相应矢量的模，箭头的指向是矢量的方向。

习惯上矢量用黑体字母标记，如 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{F}$ 等。同样，字母的普通体用来表示矢量的模，例如，v 是矢量 $\boldsymbol{v}$ 的模。有时，还将矢量置于两竖直小线段间来表示矢量的模，如 $|\boldsymbol{v}|$ 是矢量 $\boldsymbol{v}$ 的模。



图Ⅰ-2

2. 矢量的加法和减法



图Ⅰ-3

不画平行四边形图而进行的矢量相加在实用上是很方便的。从图Ⅰ-1可见，若把矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 首尾相接，然后从 $\boldsymbol{A}$ 矢量首端向 $\boldsymbol{B}$ 矢量尾端作出合成矢量，就能得到用平行四边形定则所得到的同样结果。两个以上矢量相加时，使用这种方法特别合适（见图Ⅰ-2）。

两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之差可看成矢量 $\boldsymbol{A}$ 加上矢量 $-\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$。如图Ⅰ-3所示。

从几何作图法很容易看出：两个矢量的和与相加的顺序无关，这就是加法交换律：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{Ⅰ-1}$$

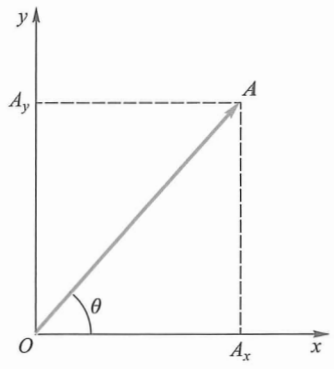
三个或三个以上的矢量与它们相加的顺序无关，这就是加法结合律：

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} \tag{Ⅰ-2}$$

3. 矢量的解析表示法

物理公式用矢量表示比较简洁，但运算较烦琐，若化成标量运算就方便得多了。

如图Ⅰ-4所示，在二维直角坐标系 xOy 中，有一矢量 $\boldsymbol{A}$，其起点在坐标原点 O。从矢量 $\boldsymbol{A}$ 的端点分别向 x，y 坐标轴作垂线，得到的量 A_x 和 A_y 就是矢量 $\boldsymbol{A}$ 的 x 分量和 y 分量。必须指出，一个矢量的分量是代数量，其值可正可负。若分别沿 Ox 和 Oy 轴取单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$（即其大小为 $|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=1$ 的矢量），则矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为



图Ⅰ-4

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j} \tag{Ⅰ-3}$$

其大小可表示为

$$A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2} \tag{Ⅰ-4}$$

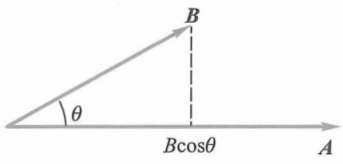
其方向可用矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 Ox 轴的夹角 θ 表示，即

$$\theta=\arctan\frac{A_y}{A_x} \tag{Ⅰ-5}$$

上述解析表示可推广到三维空间的矢量。

4. 矢量的标积（点积）

矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可用两种方式相乘，其中一种相乘方式得到一个标量，它等于这两个矢量的模与它们的夹角 θ 的余弦的积，如图Ⅰ-5所示，即



图Ⅰ-5

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta \tag{Ⅰ-6}$$

当书写矢量标积时，习惯上在矢量之间加一圆点，故又称为点乘，因此，标积有时也称为点积。（Ⅰ-6）式表示的是一个代数量。当 $\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}>0$；当 $\theta>\frac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}<0$，彼此垂直的矢量

NOTE

$\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$的标积为零。

必须指出，一个矢量的平方就是指这个矢量与其自身的标积，即

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A^2\cos 0°=A^2 \tag{Ⅰ-7}$$

因此矢量的平方等于其模的平方。例如，任意单位矢量的平方等于1，即

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1 \tag{Ⅰ-8}$$

顺便指出，由于坐标轴上的单位矢量互相垂直，故

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0 \tag{Ⅰ-9}$$

由标积定义(Ⅰ-6)式可知，标积是可以交换的，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{Ⅰ-10}$$

同样不难看出，标积服从分配律，即

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{Ⅰ-11}$$

若标量用解析式表示，则有

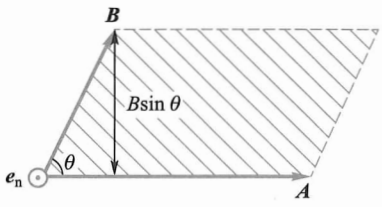
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{Ⅰ-12}$$

5. 矢量的矢积

矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的另一种相乘方式称为矢量的矢积，得到的是一个新的矢量$\boldsymbol{C}$，常用$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$表示，故又称为叉积，它的定义为

$$C=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=AB\sin\theta\boldsymbol{e}_n \tag{Ⅰ-13}$$

式中A和B分别为相乘矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的模，θ为矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的夹角，$\boldsymbol{e}_n$为矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$所在平面的单位法向矢量，$\boldsymbol{e}_n$的方向由右手螺旋定则决定，如图Ⅰ-6所示。矢积的模具有简单的几何关系，(Ⅰ-13)式中的$AB\sin\theta$在数量上等于矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$所构成的平行四边形的面积。



图Ⅰ-6

由于矢积的方向由第一个矢量$\boldsymbol{A}$转向第二个矢量$\boldsymbol{B}$的方向所决定，矢积的结果将依赖于相乘矢量的次序，交换相乘矢量的位置将导致矢积方向的颠倒，因而矢积是不可交换的，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{Ⅰ-14}$$

可以证明矢积服从分配律，即

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}) \tag{Ⅰ-15}$$

6. 矢量的三重积

NOTE

（1）三重标积

表达式 $A\cdot(B\times C)$ 称为矢量的三重标积，或称为三个矢量的混合积，它是一个标量，是矢量 A 与矢量 B，C 矢积的标积。三重标积允许乘数循环变换，即

$$A\cdot(B\times C)=B\cdot(C\times A)=C\cdot(A\times B) \qquad (\text{Ⅰ}-16)$$

（2）三重矢积

$A\times(B\times C)$ 称为矢量的三重矢积，它是一个矢量，并满足下列恒等式：

$$A\times(B\times C)=(A\cdot C)B-(A\cdot B)C \qquad (\text{Ⅰ}-17)$$

7. 矢量的导数

（1）两个矢量 $A(t)$ 和 $B(t)$ 标积的导数：

$$\frac{\mathrm{d}(A\cdot B)}{\mathrm{d}t}=A\cdot\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\cdot B \qquad (\text{Ⅰ}-18)$$

（2）矢量函数 $A(t)$ 平方的导数：

$$\frac{\mathrm{d}(A^2)}{\mathrm{d}t}=2A\cdot\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{Ⅰ}-19)$$

其微分形式为

$$\mathrm{d}(A^2)=2A\cdot\mathrm{d}A \qquad (\text{Ⅰ}-20)$$

注意到 $A^2=A^2$［见（Ⅰ-7）式］，故（Ⅰ-20）式可改写成

$$2A\cdot\mathrm{d}A=\mathrm{d}(A^2)\text{或}A\cdot\mathrm{d}A=\mathrm{d}\left(\frac{A^2}{2}\right) \qquad (\text{Ⅰ}-21)$$

（3）两个矢量 $A(t)$ 和 $B(t)$ 矢积的导数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A\times B)=\left(A\times\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\times B\right) \qquad (\text{Ⅰ}-22)$$

附录Ⅱ　常用物理常量表

名称	符号	数值	单位	相对标准不确定度
真空中的光速	c	299 792 458	$m \cdot s^{-1}$	精确
普朗克常量	h	$6.626\ 070\ 15\times10^{-34}$	$J \cdot s$	精确
约化普朗克常量	$h/2\pi$	$1.054\ 571\ 817\cdots\times10^{-34}$	$J \cdot s$	精确
元电荷	e	$1.602\ 176\ 634\times10^{-19}$	C	精确
阿伏伽德罗常量	N_A	$6.022\ 140\ 76\times10^{23}$	mol^{-1}	精确
玻耳兹曼常量	k	$1.380\ 649\times10^{-23}$	$J \cdot K^{-1}$	精确
摩尔气体常量	R	8.314 462 618…	$J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	精确
理想气体的摩尔体积（标准状况下）	V_m	$22.413\ 969\ 54\cdots\times10^{-3}$	$m^3 \cdot mol^{-1}$	精确
洛施密特常量	n_0	$2.686\ 780\ 111\cdots\times10^{25}$	m^{-3}	精确
斯特藩-玻耳兹曼常量	σ	$5.670\ 374\ 419\cdots\times10^{-8}$	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	精确
维恩位移定律常量	b	$2.897\ 771\ 955\cdots\times10^{-3}$	$m \cdot K$	精确
引力常量	G	$6.674\ 30(15)\times10^{-11}$	$m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$	2.2×10^{-5}
真空磁导率	μ_0	$1.256\ 637\ 061\ 27(20)\times10^{-6}$	$N \cdot A^{-2}$	1.6×10^{-10}
真空电容率	ε_0	$8.854\ 187\ 818\ 8(14)\times10^{-12}$	$F \cdot m^{-1}$	1.6×10^{-10}
电子质量	m_e	$9.109\ 383\ 713\ 9(28)\times10^{-31}$	kg	3.1×10^{-10}
质子质量	m_p	$1.672\ 621\ 925\ 95(52)\times10^{-27}$	kg	3.1×10^{-10}
中子质量	m_n	$1.674\ 927\ 500\ 56(85)\times10^{-27}$	kg	5.1×10^{-10}
氘核质量	m_d	$3.343\ 583\ 776\ 8(10)\times10^{-27}$	kg	3.1×10^{-10}
氚核质量	m_t	$5.007\ 356\ 751\ 2(16)\times10^{-27}$	kg	3.1×10^{-10}
玻尔磁子	μ_B	$9.274\ 010\ 065\ 7(29)\times10^{-24}$	$J \cdot T^{-1}$	3.1×10^{-10}
核磁子	μ_N	$5.050\ 783\ 739\ 3(16)\times10^{-27}$	$J \cdot T^{-1}$	3.1×10^{-10}
里德伯常量	R_∞	$1.097\ 373\ 156\ 815\ 7(12)\times10^{7}$	m^{-1}	1.1×10^{-12}
精细结构常数	α	$7.297\ 352\ 564\ 3(11)\times10^{-3}$		1.6×10^{-10}
玻尔半径	a_0	$5.291\ 772\ 105\ 44(82)\times10^{-11}$	m	1.6×10^{-10}
康普顿波长	λ_C	$2.426\ 310\ 235\ 38(76)\times10^{-12}$	m	3.1×10^{-10}
原子质量常量	m_u	$1.660\ 539\ 068\ 92(52)\times10^{-27}$	kg	3.1×10^{-10}

注：① 表中数据为国际科学理事会（ISC）国际数据委员会（CODATA）2022 年的国际推荐值。

② 标准状况是指 $T=273.15$ K，$p=101\ 325$ Pa。

附录Ⅲ　太阳、地球与月球的数据



附录Ⅳ　诺贝尔奖及诺贝尔物理学奖获得者



主要参考书目

